МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина

На правах рукописи

Олейник Елена Викторовна

*УДК 517.948*

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Золотарев Владимир Алексеевич
доктор физико-математических наук,
профессор

Харьков – 2015

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Треугольные и функциональные модели, которые принято считать аналогами спектральных разложений для несамосопряженных (неунитарных) операторов, вот уже более полувека играют важную роль в функциональном анализе. Впервые треугольные модели для несамосопряженных операторов были построены М.С. Лившицем в 1956 году. Функциональные модели для сжимающих операторов были построены Б.С. Надем и Ч. Фояшем. В основе соответствующих конструкций лежит анализ структуры характеристической функции М.С. Лившица. Построение аналогичных моделей для коммутативных систем несамосопряженных (неунитарных) операторов наталкивалось на существенные трудности [68]. Выход из создавшегося положения был найден М.С. Лившицем, которому удалось свойства коммутативности исходных операторов записать в терминах соотношений для характеристической функции. Именно анализ этих соотношений и позволил М.С. Лившицу [56] - [61], Л.Л. Ваксману [23], В.А. Золотареву [39] - [44], В. Винникову [25] - [27] осуществить построение треугольных моделей для коммутативных систем несамосопряженных операторов. Оказалось, что построение данных моделей опирается на решение системы нелинейных уравнений, существование решений для которой следует из общих соображений. Однако до сих пор не были предъявлены конкретные решения данной системы уравнений. Исследованию этой важной задачи, на которой базируется построение треугольных моделей коммутативных систем несамосопряженных операторов, и посвящена диссертация.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Основные научные результаты, которые изложены в диссертации, были получены при выполнении НИР "Спектральный анализ систем операторов и его применение"(номер государственной регистрации 0112U001060). Эта научно-исследовательская работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений типа Лакса, на которых основывается построение треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов, описание классов решений этой системы. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Дать полное описание решений системы типа Лакса, которая изучается в случае $n = 2$.
2. Найти общие методы нахождения решений системы типа Лакса, которые основываются на алгебро-геометрических методах.
3. Получить решения нелинейной системы дифференциальных уравнений в общем случае при $n = 3,\ 4,\ J = I,\ \alpha(x) = 0$ .
4. Построить решения системы нелинейных уравнений в терминах собственных векторов.

*Объект исследования.* В диссертации объектом исследования являются нелинейные системы дифференциальных уравнений типа Лакса.

*Предмет исследования.* Предметом исследования является изучение нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Лакса при $n = 3,\ 4,\ J = I,\ \alpha(x) = 0$. Предметом исследования есть также описание решений этой системы уравнений.

*Методы исследования.* В диссертационной работе используются: методы интегрирования дифференциальных уравнений (подразделы 2.2, 2.3); модернизированный метод решения обратных задач, методы теории эллиптических функций (подразделы 3.2, 3.3); методы линейной алгебры (разделы 4, 5).

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Описание решений системы типа Лакса в случае $n = 2$.
2. Решение нелинейной системы дифференциальных уравнений в общем случае при $n = 3,\ 4$.
3. Описание решений системы нелинейных уравнений в терминах поведения собственных векторов матрицы-функции $a(x)$, которая является спектральной плотностью.

**Научная новизна полученных результатов.**

1. Найдены явные формулы решений системы типа Лакса в случае $n = 2$ і $J = I$, а также в более общем случае, при произвольном $J$.
2. Описаны общие изоспектральные свойства решений системы типа Лакса.
3. Указан пошаговый процесс нахождения решений системы типа Лакса.
4. Описаны решения системы в случае полиномиальной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$ і $n = 2,\ 3,\ 4$, которые в некоторых случаях могут быть представлены с помощью эллиптических функций Якоби.
5. Получены уравнения для собственных функций матриц $a(x)$, $Ja(x)$ в терминах их собственных значений и собственных чисел оператора $\gamma(x)$, $\gamma(x)J$. Найдены некоторые их решения в случае $n = 3$ и простого спектра гладких матриц $a(x)$, $Ja(x)$, при заданном операторе $\sigma_2$. Установлено, что решения могут быть представлены через тригонометрические функции от аргумента, который зависит от $x$, а строится по матрице $\sigma_2$.

**Практическое значение полученных результатов.** Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы как для дальнейшего исследования решений системы с целью построения треугольной модели, так и для анализа подобных задач. Треугольные модели применяются в теории случайных процессов, теории полноты и базисности собственных функций. Материалы, которые содержатся в диссертации могут быть использованы для чтения спецкурсов по построению треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов, при проведении семинаров по дифференциальным уравнениям.

**Апробация результатов диссертации.** Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на: XIV международной научной конференции им. академика М.Кравчука (Киев, 19 - 21 апреля 2012 г.), международной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях "Тараповские чтения - 2012 (Харьков, 01 - 31 мая 2012 г.), Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012) International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday (Kharkiv, August 20 - 24, 2012), Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B.Lopatinskii (Донецк, 14 - 17 ноября 2012 г.), международной математической конференции "Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их применения"по поводу 75-летия со дня рождения академика А.М.Самойленко (Севастополь, 23 - 30 июня 2013 г.), международной школе-конференции "Современные проблемы математики "Тараповские чтения - 2013 (Харьков, 29 сентября - 4 октября 2013 г.). Основные результаты работы докладывались на научном семинаре в Донецком национальном университете, руководитель доц. Маламуд М.М. и на совместном заседании семинара спецсовета К64.051.11 и семинара по анализу в Харьковском национальном университете им. В.Н. Каразина (руководитель д. ф.-м. н., проф.. Коробов В. И.)

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях в реферируемых журналах [64] - [66], [74], [79] и в 6 материалах международных математических конференций [75] - [78], [80], [81].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти разделов, выводов и списка использованных источников. Полный объем диссертации составляет 123 страницы. Список литературы содержит 91 наименование. Результаты, которые выносятся на защиту, содержатся в разделах 2 – 5.

**Благодарности.** Автор диссертации выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В. А. Золотареву за постановку и обсуждение задач, постоянное внимание и всестороннюю поддержку, а также А. А. Луневу за обсуждение результатов и дружеское отношение.

# РАЗДЕЛ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Раздел посвящен изложению основных положений и утверждений из теории несамосопряженных операторов. Приведены треугольные модели коммутативной системы несамосопряженных операторов и установлено, что построение данных моделей базируется на решении системы нелинейных уравнений типа Лакса.

## 1.1. Локальный узел и ассоциированная с ним открытая система

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства $H$ в гильбертово пространство $G$, обозначим через $[H, G]$.

**Определение 1.1.** *Совокупность гильбертовых пространств $H$, $E$ и операторов $A \in [H, H]$, $\varphi \in [H, E]$, $\sigma \in [E, E]$, где $\sigma$ самосопряжен $\sigma = \sigma^*$ называется локальным узлом*

$$\Delta = (A; H; \varphi; E; \sigma)\,, \tag{1.1}$$

*если выполняется условие $A - A^* = i\varphi^*\sigma\varphi$. Оператор $A$ называется основным оператором узла $\Delta$, $\varphi$ - каналовым оператором, а $\sigma$ - метрическим оператором узла $\Delta$. Пространство $H$ называется внутренним, а $E$ - внешним пространством узла $\Delta$ [39],[62].*

Нетрудно показать, что любой оператор $A \in [H, H]$ может быть включен в такой узел $\Delta$, где $\sigma$ будет инволюцией, $\sigma = J$, $J = J^* = J^{-1}$. Для этого, используя спектральное разложение $2(A)_I = \int\limits_a^b \lambda dE_\lambda$ самосопряженного оператора [62] $2(A)_I = \frac{1}{i}(A - A^*)$, достаточно положить

$$E = \overline{A_I H},\ \varphi = \int\limits_a^b |\lambda|^{\frac{1}{2}} dE_\lambda,\ \sigma = J = \int\limits_a^b sign\ \lambda\ dE_\lambda.$$

Рассмотрим линейное многообразие вектор-функций $f(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве $G$ при $t \in [0, T]$. Обозначим через $L^2_{(0,T)}(G)$

гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного многообразия вектор-функций по норме

$$\|f\|^2 = \int\limits_0^T \|f(t)\|_G^2 dt < \infty.$$

**Определение 1.2.** *Открытой системой $F = \{R, S\}$ называется пара линейных непрерывных отображений*

$$H + L^2_{(0,T)}(E) \xrightarrow{R} L^2_{(0,T)}(H);$$
$$H + L^2_{(0,T)}(E) \xrightarrow{S} H + L^2_{(0,T)}(E),$$

*где $H$ и $E$ - некоторые гильбертовы пространства [39], [62].*

Элементы пространства $H + L^2_{(0,T)}(E)$ являются входами открытой системы $F$, их образы после применения отображений $R$ и $S$ называются соответственно внутренними состояниями и выходами открытой системы $F_\Delta$. Оператор $S$ называется передаточным отображением системы $F$. Рассмотрим узел $\Delta$ (1.1.).

**Определение 1.3.** *Открытую систему $F_\Delta = \{R_\Delta, S_\Delta\}$ назовем ассоциированной открытой системой с узлом $\Delta$ (1.1.), если $R_\Delta$, $S_\Delta$ задаются формулами*

$$F_\Delta : \begin{cases} R_\Delta(h_0, u(t)) = h(t); \\ S_\Delta(h_0, u(t)) = (h_T, v(t));\ t \in [0, T]. \end{cases} \tag{1.2}$$

*При этом $h(t)$ является решением задачи Коши*

$$R_\Delta : \begin{cases} i\dfrac{d}{dt}h(t) + Ah(t) = \varphi^*\sigma u(t); \\ h(0) = h_0;\ t \in [0, T], \end{cases} \tag{1.3}$$

*а отображение $S_\Delta$ задается формулами*

$$S_\Delta : \begin{cases} v(t) = u(t) - i\varphi h(t); \\ h_T = h(T);\ t \in [0, T], \end{cases} \tag{1.4}$$

*где $h(t)$ - решение задачи (1.3) [39], [62].*

Предположим, что на вход открытой системы (1.2) – (1.4) подана плоская волна $u(t) = u_0 e^{i\lambda t}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $u_0 \in E$. Естественно искать решения $h(t)$ и $v(t)$ в аналогичной форме: $h(t) = h_0 e^{i\lambda t}$, $v(t) = v_0 e^{i\lambda t}$, где $h_0 \in H$, $v_0 \in E$. Тогда уравнения (1.3) – (1.4) запишутся в виде

$$\begin{cases} h(0) = (A - \lambda I)^{-1}\varphi^* \sigma u_0; \\ v_0 = S_\Delta(\lambda) u_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

функция $S_\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* \sigma \tag{1.6}$$

и называется характеристической оператор-функцией М.С. Лившица узла $\Delta$ (1.1.) [44]. Отметим, что из ограниченности A следует, что резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ регулярна в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $G_A$. Поэтому $S_\Delta(\lambda)$ также голоморфна в $G_A$.
Рассмотрим два локальных узла

$$\Delta_k = (A_k, H_k, \varphi_k, E_k, \sigma_k),\ (k = 1, 2) \tag{1.7}$$

таких, что $E = E_1 = E_2$ и $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$.
**Определение 1.4.** *Сцеплением узлов $\Delta_1$ и $\Delta_2$ называется совокупность*

$$\Delta = \Delta_2 \bigvee \Delta_1 = (A, H, \varphi, E, \sigma),$$

*где $H = H_1 \oplus\ H_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, оператор $A$ имеет вид*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ i\varphi_2^* \sigma \varphi_1 & A_2 \end{bmatrix} = A_1 P_1 + A_2 P_2 + i\varphi_2^* \sigma \varphi_1 P_1,$$

*при этом $P_k$ - ортопроекторы в $H$ на $H_k$ (k=1,2) [39], [62].*

Нетрудно установить, что совокупность $\Delta$ также является локальным узлом. Таким образом, множество локальных узлов замкнуто относительно операции сцепления.
**Определение 1.5.** *Два узла $\Delta_1$ и $\Delta_2$* (1.7) *при условии $E = E_1 = E_2$ и $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ называются унитарно-эквивалентными, если существует такой унитарный оператор $U \in [H_1, H_2]$, что $UA_1 = A_2 U$, $\varphi_1 = \varphi_2 U$ [44], [62].*

Очевидная проверка показывает, что у унитарно-эквивалентных узлов $\Delta_1$ и $\Delta_2$ совпадают характеристические функции $S_{\Delta_1}(\lambda) = S_{\Delta_2}(\lambda)$.

**Определение 1.6.** *Подпространство*

$$H_\varphi = span\{A^n \varphi^* f;\ f \in \mathbb{E},\ n \in \mathbb{Z}_+\}$$

*называется главной компонентой узла* $\Delta$ (1.1.), *а* $H_\varphi^\perp = H \ominus H_\varphi$ *– дополнительной компонентой узла* $\Delta$. *Если* $H_\varphi = H$, *то узел* $\Delta$ *будем называть простым узлом [44], [62].*

**Теорема 1.1.** *Об унитарной эквивалентности. Предположим, что у двух простых узлов* $\Delta_1$ *и* $\Delta_2$ (1.7) *совпадают внешние пространства* $E = E_1 = E_2$, *и, кроме того* $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ *и* $\sigma$ *обратим. Тогда, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки совпадают характеристические функции* $S_{\Delta_1}(\lambda) = S_{\Delta_2}(\lambda)$, *то узлы* $\Delta_1$ *и* $\Delta_2$ *унитарно эквивалентны [44], [62].*

Перейдем к построению треугольной модели. Используя теорему Потапова [83] в случае $dim E = r < \infty$ и $\sigma = J (= J^{-1})$ представим характеристическую матрицу-функцию $S_\Delta(\lambda)$ узла в виде произведения:

$$S_\Delta\left(\lambda\right) = \int\limits_0^{\overset{\frown}{l}} \exp\left\{\frac{iJdF(t)}{\lambda - \alpha(t)}\right\} \prod_1^{\overset{\frown}{N}} \left(I + \frac{iJa_k}{\lambda - \lambda_k}\right), \tag{1.8}$$

где $\alpha(x)$ - вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0, l]$ $(0 \le l < \infty)$, $F(t)$ - матричнозначная неубывающая функция на $[0, l]$, для которой $trF(t) = t$; $\lambda_k$ - невещественные особые точки (полюса) матрицы $S_\Delta\left(\lambda\right)$, повторенные с учетом их кратности; а матрицы $a_k(x) \ge 0$ имеют ранг 1( $rank\ a_k = 1$), причем $(\lambda_k - \overline{\lambda}_k)P_k = ia_kJP_k,\ (k \ge 1)$, где $P_k$ - ортопроектор на область значений $a_kE^r$, $P_ka_k = a_k$, $N \le \infty$.

Рассмотрим тот случай, когда спектр оператора $A$ вещественный, тогда характеристическая функция $S\left(\lambda\right)$ имеет вид:

$$S\left(\lambda\right) = S_l\left(\lambda\right); \quad S(x, \lambda) = \int\limits_0^{\overset{\frown}{x}} \exp\left\{\frac{iJdF(t)}{\lambda - \alpha(t)}\right\}, \tag{1.9}$$

где $\alpha(x)$ - вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0,l]$ $(0<l<\infty)$, $F(x)=\int\limits_0^t a(t)dt$, а матрица $a(x)\geq 0$ размера $[r\times r]$ такая,что $tr\ a(x)\equiv 1$. Определим на линейном многообразии измеримых на $[0,l]$ вектор-функций $f(x)=(f_1(x),...,f_r(x))$ со значениями в евклидовом пространстве $E^r$ эрмитово неотрицательную билинейную форму

$$\langle f,g\rangle_F=\int\limits_0^l f(x)a(x)g^*(x)dx \tag{1.10}$$

Обозначим гильбертово пространство

$$L_r^2(l,a(x))=\{f(x)=(f_1(x),...,f_r(x));\int\limits_0^l f(t)a(t)f^*(t)dt<\infty\}, \tag{1.11}$$

считая, что факторизация по ядру метрики проведена. Зададим в $L_r^2(l,a(x))$ оператор $\breve{A}$ так

$$(\breve{A}f)(x)=\alpha(x)f(x)+i\int\limits_x^l f(t)a(t)Jdt,$$

Чтобы убедиться в корректности задания оператора $\breve{A}$, покажем, что ядро метрики (1.10) $KerF(x)=\{f\in L_r^2(l,a(x)):\langle f,f\rangle=0\}$ инвариантно относительно $\breve{A}$. Рассмотрим функцию $\chi_{[0,t]}(x)e_\alpha\in L_r^2(l,a(x))$, где $\{e_\alpha\}_1^r$ стандартный ортонормированный базис в $E^r$, а $\chi_{[0,t]}(x)$ - характеристическая функция множества $[0,t]$ $(0<t<l)$. Тогда из неравенства Коши-Буняковского

$$|\langle f,\chi_{[0,t]}(x)e_\alpha\rangle_F|^2\leq\langle f,f\rangle_F\langle\chi_{[0,t]}(x)e_\alpha,\chi_{[0,t]}(x)e_\alpha\rangle_F,$$

если $f\in KerF(x)$, следует, что $\int\limits_0^t f(x)a(x)dx=0$ для $\forall t\in(0,l)$. Поэтому $\breve{A}f(x)=\alpha(x)f(x)$, и значит вновь в силу неравенства Коши-

Буняковского

$$\langle \check{A}f, \check{A}f\rangle_F = \int\limits_0^l \alpha^2(x)f(x)a(x)f^*(x)dx \leq$$

$$\left(\int\limits_0^l \alpha^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^l f(x)a(x)f^*(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

что и обеспечивает инвариантность $KerF(x)$ относительно $\check{A}$. Нетрудно убедиться, что

$$(\check{A}^*f)(x) = \alpha(x)f(x) - i\int\limits_x^l f(t)a(t)Jdt,$$

и значит выполняется узловое соотношение

$$\frac{\check{A} - \check{A}^*}{i}f(x) = \int\limits_0^t f(x)a(x)Jdx.$$

Зададим $\varphi_C f = \int\limits_0^l f(x)a(x)dx$, так что $\varphi_C : L_r^2(l, a(x)) \to E^r$.
Итак, мы имеем узел

$$\check{\Delta} = (\check{A}, L_r^2(l, a(x)), \varphi_C, E^r, J). \tag{1.12}$$

**Теорема 1.2.** *Простой локальный узел в том случае, когда спектр оператора $A$ вещественен, унитарно-эквивалентен простой части узла* $\check{\Delta}$ (1.12) *[39], [62].*

## 1.2. Коммутативный локальный узел и ассоциированная с ним открытая система

Перейдем к коммутативной системе линейных ограниченных несамосопряженных операторов. Пусть задана $\{A_1, A_2\}$ коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$, а также линейный ограниченный оператор $\varphi$: $H \to E$.

**Определение 1.7.** *Совокупность*

$$\Delta = \left(\{A_1, A_2\}; H; \varphi; E; \{\sigma_1, \sigma_2\}; \left\{\gamma^-\right\}; \left\{\gamma^+\right\}\right), \qquad (1.13)$$

*где* $\{\sigma_k\}_1^2$, $\{\gamma^{\pm}\}$ *самосопряженные операторы в* $E$, *называется коммутативным узлом, если:*

$$\begin{aligned} &1.\ [A_1, A_2] = 0;\\ &2.\ A_k - A_k^* = i\varphi^*\sigma_k\varphi; \quad \sigma_k = \sigma_k^*; \quad k = 1,\, 2;\\ &3.\ \sigma_1\varphi A_2^* - \sigma_2\varphi A_1^* = \gamma^-\varphi;\\ &4.\ \gamma^+ = \gamma^- + (\sigma_1\varphi\varphi^*\sigma_2 - \sigma_2\varphi\varphi^*\sigma_1) \end{aligned} \qquad (1.14)$$

*[41], [61].*

Нетрудно показать [41], что любая коммутативная система ограниченных линейных операторов $\{A_k\}_1^2$ может быть включена в узел.

**Определение 1.8.** *Открытая система, ассоциированная с коммутативным узлом* $\Delta$ (1.13), *имеет вид*

$$R: \begin{cases} i\partial_k h(t) + A_k h(t) = \varphi^*\sigma_k u(t);\\ \quad 1 \le k \le 2; \quad h(0) = h_0; \end{cases} \qquad (1.15)$$

$$S: \quad v(t) = u(t) + i\varphi h(t); \qquad (1.16)$$

*где дифференциальные операторы* $\{\partial_k\}_1^2$ *имеют вид* $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial t_k}$, $0 = (0,0)$, *а* $h(t)$ *и* $u(t)$, $v(t)$ *вектор-функции из* $H$ *и* $E$ *соответственно,* $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ *[39].*

**Теорема 1.3.** *Система уравнений* (1.15) – (1.16) *будет совместной, если только функция* $u(t)$ *будет удовлетворять системе уравнений:*

$$\left\{\sigma_1 i\partial_2 - \sigma_2 i\partial_1 + \gamma^-\right\} u(x) = 0 \qquad (1.17)$$

*[39], ([41], [61].*

**Теорема 1.4.** *Если* $h(t)$ *является решением системы* (1.15)– (1.16), *а* $u(t)$ *удовлетворяет* (1.17), *то вектор-функция* $v(t)$ *удовлетворяет системе уравнений:*

$$\left\{\sigma_1 i\partial_2 - \sigma_2 i\partial_1 + \gamma^+\right\} v(x) = 0 \qquad (1.18)$$

*[39], ([41], [61].*

Рассмотрим коммутативный узел (1.13) когда $\dim E = r < \infty$, причем $\sigma_1$ обратим.

Характеристическая матрица-функция $S(\lambda)$ [40] оператора $A_1$ в ортонормированном базисе $\{e_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1, r}$ из в случае вещественного спектра оператора $A_1$ и $\sigma_1 = J$ $(J = J^* = J^{-1})$ имеет вид:

$$S(\lambda) = S_l(\lambda); \quad S(x, \lambda) = \int\limits_0^{\widehat{x}} \exp\left\{\frac{iJa(t)dt}{\lambda - \alpha(t)}\right\}, \tag{1.19}$$

где $\alpha(t)$ - вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0, l]$ $(0 < l < \infty)$, а матрица $a(t) \geq 0$ размера $[r \times r]$ такая, что $tr\ a(t) \equiv 1$.

Из коммутативности $[A_1, A_2] = 0$ следует, что характеристическая функция $S(\lambda)$ удовлетворяет условию сплетаемости [39]:

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-\right) JS(\lambda) = S(\lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J. \tag{1.20}$$

Задача продолжения условия сплетаемости (1.20) вдоль цепочки инвариантных подпространств оператора $A_1$, которой отвечает мультипликативное представление $S(x, \lambda)$ (1.19), приводит к соотношению:

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-(x)\right) JS(x, \lambda) = S(x, \lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J \quad (\forall x \in [0, l]). \tag{1.21}$$

Существование общей цепочки инвариантных подпространств для коммутативной системы операторов следует из известной теоремы В. И. Ломоносова [63]. Нетрудно заметить, что, продифференцировав (1.21), получим

$$((\sigma_2\lambda + \gamma(x))J)' = i\left[\frac{Ja(x)}{\lambda - \alpha(x)}, (\sigma_2\lambda + \gamma(x))J\right] = 0.$$

В работе [39] показано, что для того, чтобы выполнялось условие сплетаемости (1.21), необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_2\alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, \quad x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{1.22}$$

## 1.3. Треугольная модель коммутативной системы несамосопряженных операторов

Решение этой системы $\gamma(x)$ используется при построении треугольных моделей коммутативных систем операторов [39]. Рассмотрим гильбертово пространство (1.11), считая, что факторизация по ядру метрики проведена. Зададим в нем коммутативную систему операторов

$$\begin{cases} (\check{A}_1 f)(x) = \alpha(x)f(x) + i\int\limits_x^l f(t)a(t)Jdt, \\ (\check{A}_2 f)(x) = f(x)J(\sigma_2\alpha(x) + \gamma(x)) + i\int\limits_x^l f(t)a(t)\sigma_2 dt. \end{cases} \tag{1.23}$$

где $\gamma(x)$ удовлетворяет системе уравнений (1.22).

**Определение 1.9.** *Подпространство*

$$\check{H} = span\{A_1^{n_1}A_2^{n_2}\varphi^* f;\ f \in \mathbb{E},\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+\}$$

*называется главной компонентой узла* $\Delta$ (1.13)*, если* $\check{H} = H$*, то узел* $\Delta$ *будем называть простым узлом [61], [62].*

Сужение [62] операторного узла на подпространство $\check{H}$ называется простой частью операторного узла $\Delta$ (1.13).

Рассмотрим узел

$$\check{\Delta} = (\{\check{A}_1, \check{A}_2\}; \check{H}; \check{\varphi}; \check{E}; \{J, \check{\sigma}_2\}; \{\check{\gamma}^-\}; \{\check{\gamma}^+\}).$$

**Теорема 1.5.** *Пусть задан простой коммутативный узел* $\Delta$ (1.13)*, причем* $dimE = r < \infty$*,* $\sigma_2 = J(= J^{-1})$ *и спектр оператора* $A_1$ *вещественный. Пусть далее матрица* $a(x) \geq 0$ *и* $\alpha(x)$ *в представлении характеристической функции* $S(x, \lambda)$ (1.19) *оператора* $A_1$ *таковы, что разрешима система нелинейных уравнений* (1.22)*. Тогда узел* $\Delta$ (1.13) *унитарно-эквивалентен простой части узла* $\check{\Delta}$ *[39], [41].*

Таким образом, решение систем уравнений типа Лакса (1.22) является актуальной и важной задачей в данном круге вопросов. В работах [25], [39], [41], [60] было показано, что спектральный анализ коммутативной модельной системы операторов(1.23) следует проводить на соответствующей римановой поверхности. Однако, полное изучение этой системы уравнений до сих пор не проводилось. В случае $r = 2$ получается не только решить данную систему (1.22), но и описать класс всех ее решений. При $r > 2$ система уравнений имеет более сложный характер и изучить ее в общем виде не удается. Поэтому в диссертации (см. 2.3) в случае $J = I$ и $\alpha(x) = 0$ предложен новый метод исследования и указана пошаговая процедура решения системы (1.22), которая в частных случаях (раздел 3) приводит к эллиптическим функциям.

## 1.4. Выводы к разделу 1

Приведены определения, утверждения, теоремы из теории несамосопряженных операторов, а именно:

1. локальный узел и ассоциированная с ним открытая система;
2. треугольная модель несамосопряженного оператора;
3. коммутативный локальный узел и ассоциированная с ним открытая система;
4. изучены условия совместности открытой системы, отвечающей коммутативной системе операторов;
5. построена треугольная модель коммутативной системы несамосопряженных операторов и показано, что конструкция этой модели базируется на изучении нелинейной системы уравнений типа Лакса.

# РАЗДЕЛ 2. АНАЛИЗ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТИПА ЛАКСА

Раздел состоит из 4 подразделов, в подразделе 2.1 изучается система нелинейных дифференциальных уравнений типа Лакса в случае, когда $r = 2$, $J = I$. Подраздел 2.2 посвящен исследованию данной системы в случае, когда $r = 2$, $J \neq I$. В подразделе 2.3 описаны общие свойства решений системы типа Лакса при $J = I$ и $\alpha(x) = 0$. В частности, для любого решения системы матрица $\gamma(x)$ унитарно эквивалентна $\gamma^+$ (предложение 2.1), то есть $\gamma(x)$ образует изоспектральное семейство самосопряженных матриц. При доказательстве используется техника пар Лакса, возникшая для интегрировании уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния. А также указан пошаговый процесс нахождения всех решений системы (2.26) В подразделе 2.4 с помощью результатов подраздела 2.3 в случае $r = 2$, и если $a(x)$ является полиномом первой степени от $\gamma(x)$, описан общий вид решений и некоторые общие свойства системы типа Лакса. Так же исследован случай квадратичной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$ (предложение 2.4).

## 2.1. Решение системы уравнений (1.22) при $J = I$, $r = 2$

Изучим вопрос о разрешимости системы уравнений (1.22) в случае когда

$$\dim E = 2, \text{ а } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha(x) \neq 0$, причем $\sigma_2$, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и $\gamma^+$ имеют вид

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad a(x) = \begin{pmatrix} b(x) & c(x) \\ \bar{c}(x) & 1 - b(x) \end{pmatrix},$$
$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x) & \gamma_{12}(x) \\ \overline{\gamma_{12}}(x) & \gamma_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \gamma^+ = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^+ & \gamma_{12}^+ \\ \overline{\gamma_{12}^+} & \gamma_{22}^+ \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\xi$, $\eta \in \mathbb{R}$; $b(x) \in \mathbb{R}$ $(0 \le b(x) \le 1)$, $c(x) \in \mathbb{C}$, $\gamma_{11}(x)$, $\gamma_{22}(x) \in \mathbb{R}$, $\gamma_{12}(x) \in \mathbb{C}$ для всех $x \in [0, l]$;

**Замечание 1.** Выбор $\sigma_2$ (2.1) в диагональной форме не ограничивает общности, так как $J = I$.

Пусть $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$ — вещественная неубывающая ограниченная функция на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, $J = I$, причем $\sigma_2$, $a(x) \ge 0$, $\gamma(x)$, $\gamma^+$ заданы формулами (2.1). В этом случае система (1.22) имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i\left[a(x), \sigma_2\right]; \\ \left[a(x), (\sigma_2 \alpha(x) + \gamma(x))\right] = 0, \quad \gamma(x) = \gamma^+. \end{cases} \tag{2.2}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $\sigma_2$, $a(x) \ge 0$, $\gamma(x)$ и $\gamma^+$ имеют вид* (2.1) *тогда*

1. *если $b(x) \neq \dfrac{1}{2}$ $(\forall x \in [0, l])$ и*
$$\left|\frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha(x)(\eta - \xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}\right|^2 \le \frac{b(x)(1 - b(x))}{(1 - 2b(x))^2},$$
*то всегда существует единственное решение системы* (2.2), *причем*
$$\gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+, \quad \gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^+ e^{i(\eta - \xi)\int\limits_0^x \frac{(1 - 2b(t))}{\left(\alpha(t)(\eta - \xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)} dt},$$
*а*
$$c(x) = (1 - 2b(x)) \frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha(x)(\eta - \xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)} e^{i(\eta - \xi)\int\limits_0^x \frac{(1 - 2b(t))}{\left(\alpha(t)(\eta - \xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)} dt};$$
2. *если $b(x) = \dfrac{1}{2}$ $(\forall x \in [0, l])$, то $c(x) = 0$, $\gamma(x) = \gamma^+$.*

*Доказательство.* Из первого соотношения системы (2.2) получим

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}'(x) & \gamma_{12}'(x) \\ \overline{\gamma_{12}'}(x) & \gamma_{22}'(x) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & (\eta - \xi)c(x) \\ (\xi - \eta)\overline{c}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, приходим к тому, что

$$\begin{aligned} &1.\ \gamma_{11}'(x) = \gamma_{22}'(x) = 0, \text{ значит}, \gamma_{11}, \gamma_{22} \text{ — константы}, \\ &\quad \text{а именно}, \gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+,\ \gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+; \\ &2.\ \gamma_{12}'(x) = i(\eta - \xi)c(x)\ \left(\gamma_{21}'(x) = i(\xi - \eta)\overline{c}(x)\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Перейдем ко второму соотношению системы (2.2), которое примет вид:

$$\begin{pmatrix} c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) & \begin{array}{r}(2b(x)-1)\gamma_{12}(x) + (\eta-\xi)\times \\ \times\alpha(x)c(x) + c(x)\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)\end{array} \\ \begin{array}{l}(1-2b(x))\overline{\gamma_{12}}(x) + (\xi-\eta)\times \\ \times\alpha(x)\overline{c}(x) + \overline{c}(x)\left(\gamma_{11}^{+} - \gamma_{22}^{+}\right)\end{array} & \overline{c}(x)\gamma_{12}(x) - \overline{\gamma_{12}}(x)c(x) \end{pmatrix} = 0.$$

То есть:

$$\begin{array}{l} 1.\ c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) = 0; \\ 2.\ (2b(x)-1)\gamma_{12}(x) + c(x)\left((\eta-\xi)\alpha(x) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right) = 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Из первого уравнения в (2.3) следует, что $c(x)\overline{\gamma_{12}}$ — вещественная функция $\forall x \in [0,l]$. Предположим, что $b(x) \neq \dfrac{1}{2}$. Если $\gamma_{22}^{+} = \gamma_{11}^{+}$, то $\gamma_{12}(x) = 0$. Исключая этот тривиальный случай, выразим $\gamma_{12}(x)$ из второго уравнения (2.4)

$$\gamma_{12}(x) = \frac{c(x)\left(\alpha(x)(\eta-\xi) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)}{(1-2b(x))},$$

$$c(x) = \frac{\gamma_{12}(x)(1-2b(x))}{\left(\alpha(x)(\eta-\xi) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)}. \tag{2.5}$$

Пусть

$$y(x) = \frac{(1-2b(x))}{\left(\alpha(x)(\eta-\xi) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)}(\eta-\xi). \tag{2.6}$$

Тогда второе уравнение в (2.3) примет вид:

$$\gamma_{12}'(x) = iy(x)\gamma_{12}(x),$$

значит

$$\gamma_{12}(x) = Ae^{i\int\limits_0^x y(t)dt},$$

или, учитывая (2.6)

$$\gamma_{12}(x) = Ae^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha(t)(\eta-\xi)+\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}\right)}dt},$$

где $A$ — $const$. Принимая во внимание начальные условия $\gamma(0) = \gamma^{+}$, находим, что $A = \gamma_{12}^{+}$, таким образом, получим

$$\gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^{+}e^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha(t)(\eta-\xi)+\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}\right)}dt}. \tag{2.7}$$

Функция $c(x)$ в (2.5) примет вид:

$$c(x) = (1-2b(x))\frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha(x)(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}e^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha(t)(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}dt}.$$

Первое условие в (2.4) выполняется автоматически. Из неотрицательности матрицы $a(x)$ ($a(x) \geq 0$) следует, что

$$b(x)(1-b(x)) - |c(x)|^2 \geq 0, \tag{2.8}$$

тогда

$$\left|\frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha(x)(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}\right|^2 \leq \frac{b(x)(1-b(x))}{(1-2b(x))^2},$$

что и утверждается в теореме. □

В случае $b(x) = \dfrac{1}{2}$ получим, что $c(x) = 0$, $\gamma_{12}$ — *const* и поэтому $\gamma(x) = \gamma^+$ из (2.1).

**Замечание 2.** Если $\alpha(x) = 0$, то система уравнений (1.22) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i\,[a(x), \sigma_2]\,; \\ [a(x), \gamma(x)] = 0, \quad \gamma(x) = \gamma^+. \end{cases} \tag{2.9}$$

Тогда при $b(x) \neq \dfrac{1}{2}$, для $\forall x \in [0,l]$ и $\left|\dfrac{\gamma_{12}^+}{\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+}\right|^2 \leq \dfrac{b(x)(1-b(x))}{(1-2b(x))^2}$ всегда существует единственное решение системы (2.9), причем

$$\gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+, \quad \gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^+ e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt},$$

а

$$c(x) = (1-2b(x))\frac{\gamma_{12}^+}{\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+}e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt};$$

если $b(x) = \dfrac{1}{2}$ ($\forall x \in [0,l]$), то $c(x) = 0$, $\gamma(x) = \gamma^+$.

## 2.2. Решение системы уравнений (1.22) при $J \neq I$, $r = 2$

Исследуем систему уравнений (1.22) в случае, когда

$$\dim E = 2, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Пусть $\alpha(x) \neq 0$, $\alpha(x)$ — вещественная неубывающая ограниченная функция на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, причем , $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$, $\gamma^+$ имеют вид (2.1), а $\sigma_2$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ \overline{\zeta} & \eta \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где $\xi$, $\eta \in \mathbb{R}$; $b(x) \in \mathbb{R}$ $(0 \leq b(x) \leq 1)$, $c(x) \in \mathbb{C}$, $\gamma_{11}(x)$, $\gamma_{22}(x) \in \mathbb{R}$, $\gamma_{12}(x) \in \mathbb{C}$ для всех $x \in [0, l]$. Напомним вид системы (1.22):

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_2\alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, \quad x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{2.12}$$

**Теорема 2.2.** *Пусть $\sigma_2$ имеет вид (2.11), а $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и $\gamma^+$ (2.1), а $J$, соответственно, — (2.10). Если для $\forall x \in [0, l]$ имеет место*

$$\frac{|w(x)|^2 + |v(x)|^2}{|\zeta|^2} \leq b(x)\left(1 - b(x)\right),$$

*где $v(x)$ произвольная вещественная функция, а*

$$w(x) = \frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^+ - \overline{\gamma_{12}^+}\zeta - 2i(\xi + \eta)\int\limits_0^x v(t)dt - 2|\zeta|^2\alpha(x)}{8i\int\limits_0^x v(t)dt + 2\left(\alpha(x)(\xi + \eta) + \gamma_{22}^+ + \gamma_{11}^+\right)},$$

*то всегда существует единственное решение системы (2.12)*

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{22}^+,$$

$$\gamma_{12}(x) = -c(x)\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + 4i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+ + \gamma_{22}^+\right) - \zeta\alpha(x),$$

*при этом* $c(x) = \dfrac{w(x)+iv(x)}{\overline{\zeta}}$.

*Доказательство.* Из второго соотношения системы (2.12):

$$\gamma'(x)J = \begin{pmatrix} \gamma_{11}'(x) & -\gamma_{12}'(x) \\ \overline{\gamma_{12}'}(x) & -\gamma_{22}'(x) \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} c(x)\overline{\zeta} - \zeta\overline{c}(x) & -c(x)(\eta+\xi) - \zeta \\ -\overline{c}(x)(\xi+\eta) - \overline{\zeta} & \overline{c}(x)\zeta - \overline{\zeta}c(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к уравнениям:

$$\gamma_{11}'(x) = \gamma_{22}'(x) = i\left(c(x)\overline{\zeta} - \zeta\overline{c}(x)\right); \tag{2.13}$$

$$\gamma_{12}'(x) = i(c(x)(\eta+\xi)+\zeta). \tag{2.14}$$

Из условия (2.13) следует, что $\gamma_{11}(x)$ и $\gamma_{22}(x)$ отличаются на константу, которую можно определить из начальных условий, а именно:

$$\gamma_{22}(x) = \gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+.$$

Из первого условия системы (2.12) имеем:

$$[Ja(x), (\sigma_2\alpha(x) + \gamma(x))\,J] =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} c(x)\overline{\zeta}\alpha(x) + c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \\ -\gamma_{12}(x)\overline{c}(x) - \overline{c}(x)\zeta\alpha(x) \end{matrix} & \begin{matrix} -c(x)\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + \gamma_{11}(x) + \right. \\ \left. +\gamma_{22}(x)\right) - \zeta\alpha(x) - \gamma_{12}(x) \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\overline{c}(x)\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + \gamma_{11}(x) + \right. \\ \left. +\gamma_{22}(x)\right) - \overline{\zeta}\alpha(x) - \overline{\gamma_{12}}(x) \end{matrix} & \begin{matrix} -c(x)\overline{\zeta}\alpha(x) - c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) + \\ +\gamma_{12}(x)\overline{c}(x) + \overline{c}(x)\zeta\alpha(x) \end{matrix} \end{pmatrix} = 0.$$

Получим соотношения:

$$c(x)\left(\overline{\zeta}\alpha(x) + \overline{\gamma_{12}}(x)\right) = \overline{c}(x)\left(\gamma_{12}(x) + \zeta\alpha(x)\right), \tag{2.15}$$

то есть $c(x)\left(\overline{\zeta}\alpha(x) + \overline{\gamma_{12}}(x)\right)$ — вещественная функция, что легко проверить; и

$$\overline{\gamma_{12}}(x) = -\overline{c}(x)\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + 2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) - \overline{\zeta}\alpha(x). \tag{2.16}$$

Запишем сопряженное для (2.14) уравнение

$$\overline{\gamma_{12}'}(x) = -i\left(\overline{c}(x)(\xi+\eta) + \overline{\zeta}\right). \tag{2.17}$$

Умножим (2.14) на $\overline{\zeta}$, а (2.17) на $\zeta$ и сложим полученные уравнения,

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}'(x) + \overline{\gamma_{12}'}(x)\zeta = i(\xi+\eta)\left(c(x)\overline{\zeta} - \overline{c}(x)\zeta\right).$$

В соответствии с (2.13), получим, что

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}'(x) + \overline{\gamma_{12}'}(x)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}'(x).$$

Проинтегрировав это равенство, приходим к соотношению

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}(x) + \overline{\gamma_{12}}(x)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + A_1, \tag{2.18}$$

где $A_1$ — постоянная, причем $A_1 = \overline{\zeta}\gamma_{12}^+ + \overline{\gamma_{12}^+}\zeta - (\xi+\eta)\gamma_{11}^+$. Воспользуемся равенствами (2.16) и (2.18):

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}(x) + \overline{\gamma_{12}}(x)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + A_1,$$

получим

$$\begin{gathered}
-\overline{\zeta}\left(c(x)\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + 2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) - \zeta\alpha(x)\right) + \\
+\left(-\overline{c}(x)\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + 2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) - \overline{\zeta}\alpha(x)\right)\zeta = \\
(\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + A_1;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A_1 + \alpha(x)(\xi+\eta)\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + \gamma_{11}(x)\left(2\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + \xi + \eta\right) + \\
+\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + 2|\zeta|^2\alpha(x) = 0.
\end{gathered}$$

Заметим, что $2Re\left(c(x)\overline{\zeta}\right) = c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta$, а $2Im\left(c(x)\overline{\zeta}\right) = c(x)\overline{\zeta} - \overline{c}(x)\zeta$, тогда

$$\left\{\begin{gathered}
\gamma_{11}'(x) = 2iIm\left(c(x)\overline{\zeta}\right); \\
2\alpha(x)(\xi+\eta)Re\left(c(x)\overline{\zeta}\right) + \gamma_{11}(x)\left(4Re\left(c(x)\overline{\zeta}\right) + \xi + \eta\right) + \\
+2\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)Re\left(c(x)\overline{\zeta}\right) + 2|\zeta|^2\alpha(x) + A_1 = 0.
\end{gathered}\right.$$

Введем обозначение

$$c(x)\overline{\zeta} = w(x) + iv(x), \tag{2.19}$$

получим

$$\begin{cases} \gamma_{11}'(x) = 2iv(x); \\ 2\alpha(x)(\xi+\eta)w(x) + \gamma_{11}(x)(4w(x)+\xi+\eta)+ \\ +2\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right) w(x) + 2|\zeta|^2\alpha(x) + A_1 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Из первого условия в (2.20) находим

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + A_2,$$

где $A_2$ — постоянная, причем $A_2 = \gamma_{11}^{+}$, то есть

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^{+}. \tag{2.21}$$

Из второго условия в (2.20) определим

$$w(x) = \frac{-A_1 - \gamma_{11}(x)(\xi+\eta) - 2|\zeta|^2\alpha(x)}{2\left(2\gamma_{11}(x) + \alpha(x)(\xi+\eta) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)},$$

подставим (2.21), получим

$$w(x) = \frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^{+} - \overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta - 2i(\xi+\eta)\int\limits_0^x v(t)dt - 2|\zeta|^2\alpha(x)}{8i\int\limits_0^x v(t)dt + 2\left(\alpha(x)(\xi+\eta) + \gamma_{22}^{+} + \gamma_{11}^{+}\right)}. \tag{2.22}$$

Согласно (2.19), имеем

$$c(x) = \frac{w(x) + iv(x)}{\overline{\zeta}}. \tag{2.23}$$

Из неотрицательности матрицы $a(x)$ ($a(x) \geq 0$) следует (2.8), тогда

$$\left|\frac{w(x) + iv(x)}{\overline{\zeta}}\right|^2 \leq b(x)\left(1 - b(x)\right),$$

$$\frac{|w(x)|^2 + |v(x)|^2}{|\zeta|^2} \leq b(x)\left(1 - b(x)\right). \tag{2.24}$$

Таким образом, условие неотрицательности (2.8) матрицы $a(x)$ имеет вид (2.24). $\square$

**Замечание 2.1.** В случае, когда $\alpha(x) = 0$, система (2.12) приобретает вид

$$\begin{cases} [Ja(x), \gamma(x)J] = 0, \quad x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{2.25}$$

Пусть $\sigma_2$ представлена (2.11), $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и $\gamma^+$ — (2.1), а $J$, соответственно, — (2.10). Если для $\forall x \in [0, l]$ выполняется (2.24), где $v(x)$ произвольная вещественная функция, а $w(x)$ имеет вид (2.22), то всегда существует единственное решение системы (2.25):

$$\gamma_{11}(x) = 2i \int_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+, \; \gamma_{22}(x) = 2i \int_0^x v(t)dt + \gamma_{22}^+,$$

$$\gamma_{12}(x) = -c(x) \left( 4i \int_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+ + \gamma_{22}^+ \right),$$

при этом $c(x)$ определяется соотношением (2.23).

Итак, в случае $\dim E = 2$ описаны все решения системы уравнений

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_2\alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, \quad x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases}$$

и предъявлен их вид.

## 2.3. Общие свойства решений системы типа Лакса

Рассмотрим подробнее систему типа Лакса вида

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, \quad x \in [0, l], \\ \gamma'(x) = i[a(x), \sigma_2], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{2.26}$$

где $a(x), \gamma(x), \sigma_2, \gamma^+$ – самосопряженные $[r \times r]$ матрицы, и

$$a(x) \geqslant 0, \qquad tr\; a(x) = 1, \qquad x \in [0, l]; \tag{2.27}$$

Это соответствует случаю, когда оператор $A_1$ - диссипативный, вольтерров и имеет $r$ - мерную мнимую компоненту. В этом подразделе для заданных самосопряженных $[r \times r]$ матриц $\gamma^+$ и $\sigma_2$ опишем все пары самосопряженных матриц-функций $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ таких, что

$$\gamma \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r}), \qquad a \in L^1([0,l];\mathbb{C}^{r\times r}), \tag{2.28}$$

и выполнены условия (2.26)–(2.27).

**Лемма 2.1.** *Пусть матрица* $U \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ *такова, что все ее элементы абсолютно непрерывны и* $U(0)$ *– унитарна. Тогда* $U(x)$ *унитарна при каждом* $x \in [0,l]$ *тогда и только тогда, когда существует самосопряженная матрица-функция* $A \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{r\times r})$ *такая, что*

$$U'(x) = iU(x)A(x), \quad x \in [0,l]. \tag{2.29}$$

*Доказательство.* Пусть $U(x)$ унитарна при каждом $x \in [0,l]$ и $A(x) := -iU^{-1}(x)U'(x) = -iU^*(x)U'(x)$. Тогда $A \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{r\times r})$ и $A^*(x) = i(U'(x))^*U(x)$. Дифференцируя равенство $U^*(x)U(x) = I_r$, $x \in [0,l]$, получим

$$0 = (U'(x))^*U(x) + U^*(x)U'(x) = -iA^*(x) + iA(x), \quad x \in [0,l].$$

Отсюда следует, что $A(\cdot) = A^*(\cdot)$.

Пусть теперь $U'(\cdot) = iU(\cdot)A(\cdot)$, где $A(\cdot) = A^*(\cdot)$. Тогда по теореме Лиувилля

$$\det(U(x)) = \exp\left(\int_0^x i \cdot tr\ A(t)dt\right)\det(U(0)) \neq 0, \quad x \in [0,l].$$

Значит, $U(x)$ невырожденная матрица при каждом $x \in [0,l]$, причем $U^{-1} \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$. Поэтому

$$A(x) = -iU^{-1}(x)U'(x) \quad \text{и} \quad A^*(x) = i(U'(x))^*(U^{-1}(x))^*.$$

Далее, для $V(\cdot) := (U^{-1}(\cdot))^*$ имеем

$$V'(x) = -V(x)(U'(x))^*V(x) = iV(x)A^*(x), \quad x \in [0,l],$$

и $V(0) = (U^{-1}(0))^* = U(0)$, так как $U(0)$ унитарна. Так как $A(\cdot) = A^*(\cdot)$, то матрицы-функции $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ являются решениями одной и той же задачи Коши. Поэтому по теореме единственности $V(\cdot) = U(\cdot)$, что и означает унитарность $U(\cdot)$ в силу определения $V(\cdot)$. □

Нам также понадобится следующее классическое свойство пары Лакса [55].

**Лемма 2.2.** *Пусть матрицы-функции* $L \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ *и* $A = A^* \in L^1([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ *образуют пару Лакса, то есть*

$$L'(x) = i[L(x), A(x)], \quad x \in [0,l]. \tag{2.30}$$

*Пусть далее* $U \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ *– решение следующей задачи Коши*

$$U'(x) = iU(x)A(x), \quad x \in [0,l], \qquad U(0) = I_r. \tag{2.31}$$

*Тогда* $U(x)$ *унитарна при каждом* $x \in [0,l]$ *и*

$$L(x) = U^*(x)L(0)U(x). \tag{2.32}$$

*Доказательство.* Положим $W(x) := L(0)U(x) - U(x)L(x)$, $x \in [0,l]$. Ясно, что $W \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$. В силу (2.30) и (2.31) имеем

$$\begin{aligned} W'(x) &= L(0)U'(x) - U'(x)L(x) - U(x)L'(x) \\ &= i\big(L(0)U(x)A(x) - U(x)A(x)L(x) - U(x)[L(x), A(x)]\big) \\ &= i\big(L(0)U(x)A(x) - U(x)L(x)A(x)\big) \\ &= iW(x)A(x), \quad x \in [0,l]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Так как $W(0) = L(0)U(0) - U(0)L(0) = 0$, то из (2.33) по теореме единственности Коши следует, что $W(x) = 0$, $x \in [0,l]$. Так как $A(\cdot) = A^*(\cdot)$ и $U(0) = I_r$, то из (2.31) и леммы 2.1 следует, что матрица $U(\cdot)$ – унитарна. Поэтому из $W(\cdot) = 0$ следует (2.32). □

**Предложение 2.1.** *Пусть пара* $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ *удовлетворяет системе* (2.26). *Тогда матрица* $\gamma(x)$ *унитарно эквивалентна* $\gamma^+$ *при каждом* $x \in [0,l]$.

*Доказательство.* Из уравнений системы вытекает, что

$$\frac{d}{dx}\left(\mu^{-1}\sigma_2+\gamma(x)\right)=i\left[\mu a(x),\mu^{-1}\sigma_2+\gamma(x)\right],\quad x\in[0,l],\quad \mu>0.$$

Поэтому самосопряженные матрицы-функции $L(\cdot,\mu):=\mu^{-1}\sigma_2+\gamma(\cdot)$ и $A(\cdot,\mu):=-\mu a(\cdot)$ образуют пару Лакса. По лемме 2.2

$$L(x,\mu)=U^*(x,\mu)L(0,\mu)U(x,\mu),\quad x\in[0,l],\quad \mu>0, \tag{2.34}$$

где $U(\cdot,\mu)$ – некоторая унитарная матрица-функция. Зафиксируем $x\in[0,l]$. Так как элементы унитарной матрицы по модулю не превосходят 1, то найдется возрастающая неограниченная последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}U(x,\mu_k)=:U(x)$, который, очевидно, является унитарной матрицей. Подставляя в (2.34) $\mu=\mu_k$, переходя к пределу при $k\to\infty$ и учитывая определение $L(x,\mu)$, получим $\gamma(x)=U^*(x)\gamma^+U(x)$, то есть $\gamma(x)$ унитарно эквивалентна $\gamma^+$. Отметим, что матрица $U(x)$ не единственна и зависит от выбора последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. □

Нам понадобится следующее каноническое представление изоспектрального ( с одинаковыми собственными значениями) абсолютно непрерывного семейства самосопряжённых матриц.

**Лемма 2.3.** *Пусть* $\gamma\in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$,

$$\gamma(0)=diag(\lambda_1I_{r_1},\ldots,\lambda_sI_{r_s}),\quad r_1+\ldots+r_s=r, \tag{2.35}$$

*где* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ *– различные вещественные числа, и матрица* $\gamma(x)$ *унитарно эквивалентна* $\gamma(0)$ *при каждом* $x\in[0,l]$.

*Тогда существует единственная унитарная матрица-функция* $U\in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ *такая, что*

$$\gamma(x)=U(x)\gamma(0)U^*(x),\quad x\in[0,l],\qquad U(0)=I_r, \tag{2.36}$$

*и матрица-функция* $U^{-1}(\cdot)U'(\cdot)$ *имеет нулевую блочную диагональ относительно разложения*

$$\mathbb{C}^r=\mathbb{C}^{r_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^{r_s}. \tag{2.37}$$

*Доказательство.* Докажем существование матрицы-функции $U(\cdot)$. Пусть $\{e_1(x), \dots, e_r(x)\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов матрицы $\gamma(x)$, где $e_k(x) = col(e_{1k}(x), \dots, e_{rk}(x))$, $x \in [0, l]$. Так как $\gamma \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r})$ и ее спектр не зависит от $x$, то эти вектора можно выбрать абсолютно непрерывными по $x$. Схематично, доказательство этого факта состоит в следующем: сначала [47], устанавливается абсолютная непрерывность проектора Рисса на соответствующее собственное подпространство; затем, следуя [47] легко показать существование абсолютно-непрерывной трансформирующей функции, по которой будет строиться искомый базис из собственных векторов указанным способом. Далее положим $W(\cdot) := (e_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^{r}$. Тогда матрица-функция $W(\cdot)$ унитарна, $\gamma(x) = W(x)\gamma(0)W^*(x)$, $x \in [0, l]$, и $W \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r})$. Так как $W(0)$ коммутирует с $\gamma(0)$, то $U(\cdot) = W(\cdot)W^{-1}(0)$ – абсолютно непрерывная унитарная матрица-функция, удовлетворяющая (2.36).

Далее положим $C(x) := -iU^{-1}(x)U'(x)$, то есть $U'(x) = iU(x)C(x)$, $x \in [0, l]$. По лемме (2.1) $C(\cdot) = C^*(\cdot)$. Пусть

$$C(\cdot) = (C_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^{s}, \quad C_{jk} \in L^1([0, l]; \mathbb{C}^{r_j \times r_k}), \quad j, k \in \{1, \dots, s\},$$

и $V \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r})$ решение начальной задачи

$$V'(x) = iV(x)C_d(x), \quad x \in [0, l], \qquad V(0) = I_r,$$

где $C_d(\cdot) = diag(C_{11}(\cdot), \dots, C_{ss}(\cdot))$ – блочная диагональ матрицы $C(\cdot)$. По лемме (2.1) матрица $V(x)$ – унитарна при каждом $x \in [0, l]$. Положим $\widetilde{U}(\cdot) = U(\cdot)V^*(\cdot)$. Легко проверить, что

$$\widetilde{U}'(x) = i\widetilde{U}(x)\widetilde{C}(x), \quad x \in [0, l], \qquad \widetilde{U}(0) = I_r,$$

где $\widetilde{C}(x) := V(x)(C(x) - C_d(x))V^*(x)$, $x \in [0, l]$. Кроме того, $\widetilde{U}(\cdot)$ унитарна как произведение унитарных матриц. Из блочно-диагонального вида $C_d$ вытекает, что $V$ – также блочно-диагональна:

$$V = diag(V_1, \dots, V_s), \quad V_j \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r_j \times r_j}), \quad j \in \{1, \dots, s\}. \tag{2.38}$$

Поэтому $V(\cdot)$ коммутирует с $\gamma(0)$, и, значит, $\widetilde{U}(x)\gamma(0)\widetilde{U}^*(x) = U(x)\gamma(0)U^*(x) = \gamma(x)$, $x \in [0,l]$. Из (2.38) также вытекает, что матрица $\widetilde{C}(x)$ имеет нулевую блочную диагональ относительно разложения (2.37). Поэтому $\widetilde{U}(\cdot)$ искомая унитарная матрица-функция.

Теперь покажем, что такая матрица-функция $U(\cdot)$ единственная. Пусть две унитарные матрицы-функции $U_1, U_2 \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ удовлетворяют (2.36) и матрица-функция $C_j(\cdot) := -iU_j^{-1}(\cdot)U_j'(\cdot)$ имеет нулевую блочную диагональ относительно разложения (2.37), $j \in \{1,2\}$. Тогда

$$\gamma(x) = U_1(x)\gamma(0)U_1^*(x) = U_2(x)\gamma(0)U_2^*(x), \quad x \in [0,l].$$

Поэтому матрица $V(x) := U_2^*(x)U_1(x)$ коммутирует с $\gamma(0)$. Так как числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ различны, то из этого вытекает, что для $V(\cdot)$ выполнено (2.38). Из определения матриц $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $V(x)$ следует, что

$$V'(x) = i(V(x)C_1(x) - C_2(x)V(x)), \quad x \in [0,l]. \tag{2.39}$$

Так как $V(\cdot)$ блочно диагональна и матрицы $C_1(x), C_2(x)$ имеют нулевые блочные диагонали, то матрица-функция $i(VC_1 - C_2V)$ также имеет нулевую блочную диагональ относительно разложения (2.37). Поэтому из (2.38) и (2.39) вытекает, что

$$V_j'(x) = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{2.40}$$

Так как $V(0) = U_2^*(0)U_1(0) = I_r$, то из (2.40) и (2.38) следует, что $V(x) = I_r$, $x \in [0,l]$. Поэтому $U_1(x) = U_2(x)$, $x \in [0,l]$, и единственность доказана. $\square$

**Теорема 2.3.** *Пусть*

$$\gamma^+ = diag(\lambda_1 I_{r_1}, \ldots, \lambda_s I_{r_s}), \quad r_1 + \ldots + r_s = r, \tag{2.41}$$

*где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – различные вещественные числа.*

*Тогда для любого решения $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ системы (2.26) существует единственная унитарная матрица-функция $U \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$ такая, что*

$$\gamma(x) = U(x)\gamma^+U^*(x), \quad x \in [0,l], \qquad U(0) = I_r, \tag{2.42}$$

*а матрица-функция* $C(\cdot) := -iU^{-1}(\cdot)U'(\cdot)$ *является самосопряженной и имеет нулевую блочную диагональ относительно разложения* (2.37). *При этом,*

$$a(x) = U(x)A(x)U^*(x), \qquad x \in [0, l], \tag{2.43}$$

*где*

$$A(\cdot) = diag(A_1(\cdot), \dots, A_s(\cdot)) = A^*(\cdot), \tag{2.44}$$

$$A_j \in L^1([0, l]; \mathbb{C}^{r_j \times r_j}), \quad j \in \{1, \dots, s\}. \tag{2.45}$$

*Кроме того, для* $B(x) := U^*(x)\sigma_2 U(x)$ *выполнено*

$$[C(x), \gamma^+] = [A(x), B(x)], \quad x \in [0, l], \tag{2.46}$$

$$B'(x) = i[B(x), C(x)], \quad x \in [0, l], \quad B(0) = \sigma_2. \tag{2.47}$$

*Обратно, если для самосопряженных матриц-функций*

$$A, C \in L^1([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r}), \quad B \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r}), \tag{2.48}$$

*выполнено* (2.44), (2.45), (2.46), (2.47), *и* $U \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r})$ *– решение начальной задачи*

$$U'(x) = iU(x)C(x), \quad x \in [0, l], \qquad U(0) = I_r, \tag{2.49}$$

*то* $U(x)$ *унитарна при каждом* $x \in [0, l]$,

$$B(x) = U^*(x)\sigma_2 U(x), \quad x \in [0, l], \tag{2.50}$$

*и пара* $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, *заданная формулами* (2.42), (2.43), *является решением системы* (2.26).

*Доказательство.* Пусть пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ является решением системы (2.26). Тогда по предложению 2.1 матрица $\gamma(x)$ унитарно эквивалентна $\gamma^+ = \gamma(0)$ при каждом $x \in [0, l]$. По лемме 2.3 существует единственная унитарная матрица-функция $U \in AC([0, l]; \mathbb{C}^{r \times r})$ такая, что выполнено (2.42) и матрица $C(x) = -iU^{-1}(x)U'(x)$ имеет нулевую блочную диагональ относительно разложения (2.37). По лемме 2.1 $C(\cdot) = C^*(\cdot)$.

Положим $A(x) := U^*(x)a(x)U(x)$, $x \in [0,l]$. Тогда из первого уравнения системы (2.26) вытекает, что $A(\cdot)$ коммутирует с $\gamma^+$. Так как $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различные числа, то из вида $\gamma^+$ следует, что $A(\cdot)$ блочно диагональна, то есть выполнено (2.44)–(2.45).

Из равенств (2.42), (2.43), определения матриц $C(x)$, $B(x)$ и унитарности матрицы $U(x)$ вытекает, что

$$a(x)U(x) = U(x)A(x), \quad \gamma(x)U(x) = U(x)\gamma^+, \quad x \in [0,l], \tag{2.51}$$
$$U'(x) = iU(x)C(x), \quad \sigma_2 U(x) = U(x)B(x), \quad x \in [0,l]. \tag{2.52}$$

Проверим равенства (2.46)–(2.47). Так как $U \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$, то $B \in AC([0,l];\mathbb{C}^{r\times r})$. Поэтому, дифференцируя второе равенство в (2.52) с учетом (2.51)–(2.52), получим

$$\begin{aligned} iU(x)B(x)C(x) = i\sigma_2 U(x)C(x) = \sigma_2 U'(x) = U'(x)B(x) \\ + U(x)B'(x) = iU(x)C(x)B(x) + U(x)B'(x), \quad x \in [0,l]. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Так как $U(0) = I_r$, то $B(0) = \sigma_2$. С учётом этого из (2.53) вытекает (2.47) в силу обратимости матрицы $U(x)$. Далее из второго равенства в (2.26) и равенств (2.51)–(2.52) следует, что

$$\begin{aligned} iU(x)[A(x), B(x)] &= i[a(x), \sigma_2]U(x) = \gamma'(x)U(x) \\ &= U'(x)\gamma^+ - \gamma(x)U'(x) = iU(x)C(x)\gamma^+ - \gamma(x)iU(x)C(x) \\ &= iU(x)(C(x)\gamma^+ - \gamma^+ C(x)), \quad x \in [0,l], \end{aligned} \tag{2.54}$$

откуда следует (2.46).

Теперь проверим обратное утверждение. Пусть для матриц-функций $A$, $B$, $C$ и $U$ выполнено (2.44)–(2.49). По лемме 2.2 из (2.47) и (2.49) следует, что матрица-функция $U(\cdot)$ – унитарна, и выполнено равенство (2.50). Проверим, что пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ удовлетворяет системе (2.26). Равенство $[a(x), \gamma(x)] = 0$ следует из блочно-диагонального вида матриц $A(x)$ и $\gamma^+$. Так как $U(0) = I_r$, то $\gamma(0) = \gamma^+$. Проверим второе равенство в (2.26). Так как равенства (2.51)–(2.52) выполнены в нашем случае, то для $x \in [0,l]$

имеем

$$\gamma'(x)U(x) = U'(x)\gamma^+ - \gamma(x)U'(x) = i(U(x)C(x)\gamma^+ - \gamma(x)U(x)C(x))$$
$$= iU(x)[C(x),\gamma^+] = iU(x)[A(x),B(x)] = i[a(x),\sigma_2]U(x).$$

Так как $U(x)$ обратима, то второе равенство в (2.26) выполнено, что и завершает доказательство. □

**Замечание 2.2.** **(i)** Условие (2.41) является лишь условием нормировки. Выбирая соответствующий ортонормированный базис в $\mathbb{C}^r$, мы всегда можем привести матрицу $\gamma^+$ к такому виду.

**(ii)** В уравнениях (2.46)–(2.47) можно избавится от $C(x)$. А именно, если $B(\cdot) = (B_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^s$ и $C(\cdot) = (C_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^s$ – блочные представления матриц-функций $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ относительно разложения (2.37), то уравнение (2.46) с учетом блочно-диагонального вида матриц $\gamma^+$ и $A(x)$ примет вид

$$C_{jk}(x) = (\lambda_k - \lambda_j)^{-1} \cdot (A_j(x)B_{jk}(x) - B_{jk}(x)A_k(x)),$$
$$x \in [0,l], \quad j,k \in \{1,\ldots,s\} \quad j \neq k. \quad (2.55)$$

Подставляя (2.55) в (2.47) получим некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений на $B(\cdot)$ с правой частью зависящей квадратично от элементов матрицы $B(x)$.

**(iii)** С учетом предыдущих замечаний, теорема 2.3 дает следующую пошаговую процедуру для нахождения всех решений системы (2.26):

1. Выбираем ортонормированный базис в $\mathbb{C}^r$, в котором матрица $\gamma^+$ имеет диагональный вид (2.41).
2. Выбираем произвольную матрицу-функцию $A(\cdot)$, удовлетворяющую условиям (2.44)–(2.45).
3. Решаем задачу Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на матрицу $B$ полученную из (2.46)–(2.47) в предыдущем замечании.

4. Если она имеет глобальное решение на отрезке $[0, l]$, то вычисляем матрицу $C(x)$ по формуле (2.55), полагая её диагональные блоки равными нулю.
5. Находим $U(\cdot)$ как единственное решение задачи Коши (2.49) для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
6. Наконец, получаем решение $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ системы (2.26) по формулам (2.42)–(2.43).

**Замечание 2.3.** Ясно, что если $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ какое-либо решение системы (2.26), то $\{\widetilde{a}(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $\widetilde{a}(x) = a(x) + \frac{1}{r}(1 - tr\ a(x))$, $x \in [0, l]$, также является решением системы (2.26), причем $tr\widetilde{a}(\cdot) \equiv 1$. Условие $\widetilde{a}(\cdot) \geqslant 0$ равносильно

$$a(x) \geqslant \frac{tr\ a(x) - 1}{r}, \quad x \in [0, l]. \tag{2.56}$$

Таким образом, если $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ – решение системы (2.26), удовлетворяющее условию (2.56), то пара $\{\widetilde{a}(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ удовлетворяет и системе (2.26), и условию (2.27).

Чтобы обеспечить условие (2.56) в рамках процедуры указанной в замечании 2.2(iii), необходимо выбирать удовлетворяющую условиям (2.44)–(2.45) матрицу-функцию $A(\cdot)$ так, чтобы было выполнено следующее условие

$$A_k(x) \geqslant \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s} trA_j(x) - \frac{1}{r}, \quad x \in [0, l], \quad k \in \{1, \ldots, s\}. \tag{2.57}$$

**Замечание 2.4.** Пусть $a(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1}^{r}$. Легко видеть, что из условия (2.27) следует, что

$$|a_{jk}(x)| \leqslant 1, \quad x \in [0, l], \quad j, k \in \{1, \ldots, r\}. \tag{2.58}$$

Поэтому для любого решения системы (2.26), удовлетворяющего условию (2.27), выполнено

$$\gamma \in Lip_1([0, l]; \mathbb{C}^{r\times r}), \qquad a \in L^\infty([0, l]; \mathbb{C}^{r\times r}). \tag{2.59}$$

Но нам удобней решать систему (2.26) в рамках более общего условия (2.28).

**Предложение 2.2.** *Пусть $G$ – общее инвариантное подпространство для матриц $\sigma_2$ и $\gamma^+$ и спектры сужений $\gamma^+\restriction_G$, $\gamma^+\restriction_{G^\perp}$ не пересекаются. Тогда для любого решения $\{a(\cdot),\gamma(\cdot)\}$ системы (2.26) подпространство $G$ является инвариантным для $a(x)$ и для $\gamma(x)$ при каждом $x\in[0,l]$.*

*Доказательство.* Пусть $dim(G)=: m_1\in\{1,\ldots,r-1\}$ и $m_2:=r-m_1$. Так как $G$ инвариантно для $\gamma^+$ и для $\sigma_2$, то выбирая соответствующий ортонормированный базис в $\mathbb{C}^r$ мы можем считать, что для $\gamma^+$ выполнено (2.41) и

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}\sigma_{21} & 0\\ 0 & \sigma_{22}\end{pmatrix},\qquad \sigma_{2j}\in\mathbb{C}^{m_j\times m_j},\quad j\in\{1,2\}. \tag{2.60}$$

При этом, так как спектры сужений $\gamma^+\restriction_G$ и $\gamma^+\restriction_{G^\perp}$ не пересекаются, то для некоторого $p\in\{1,\ldots,s-1\}$ выполнено

$$m_1=r_1+\ldots+r_p,\quad m_2=r_{p+1}+\ldots+r_s. \tag{2.61}$$

Пусть $\{a(\cdot),\gamma(\cdot)\}$ – решение системы (2.26). Так как для $\gamma^+$ выполнено (2.41), то по теореме 2.3 найдутся самосопряженные матрицы-функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ и унитарная матрица-функция $U(\cdot)$ такие, что выполнено (2.42)–(2.50). Пусть

$$B(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{B}_{11}(x) & \widetilde{B}_{12}(x)\\ \widetilde{B}_{21}(x) & \widetilde{B}_{22}(x)\end{pmatrix},\quad C(x)=\begin{pmatrix}\widetilde{C}_{11}(x) & \widetilde{C}_{12}(x)\\ \widetilde{C}_{21}(x) & \widetilde{C}_{22}(x)\end{pmatrix},$$

блочное представление матриц $B(x)$ и $C(x)$ относительно разложения $\mathbb{C}^r=\mathbb{C}^{m_1}\oplus\mathbb{C}^{m_2}$. Тогда из (2.47) и (2.60) следует, что

$$\begin{cases}\widetilde{B}_{12}'(x)=i[\widetilde{B}_{11}(x),\widetilde{C}_{12}(x)]+i[\widetilde{B}_{12}(x),\widetilde{C}_{22}(x)], & x\in[0,l],\\ \widetilde{B}_{12}(0)=0.\end{cases} \tag{2.62}$$

В силу (2.55) матрица $\widetilde{C}_{jk}(\cdot)$ линейно выражается через $\widetilde{B}_{jk}(\cdot)$, $j,k\in\{1,2\}$. Поэтому (2.62) представляет собой задачу Коши с нулевыми начальными данными для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на матрицу $\widetilde{B}_{12}(\cdot)$. Поэтому по теореме единственности $\widetilde{B}_{12}(\cdot)=0$. В силу (2.55) $\widetilde{C}_{12}(\cdot)=0$. А так как матрицы $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ самосопряженные, то $\widetilde{B}_{21}(\cdot)=\widetilde{C}_{21}(\cdot)=0$. Тогда по теореме единственности из (2.49) следует, то $U(\cdot)$ имеет блочно-диагональный вид относительно разложения $\mathbb{C}^r = \mathbb{C}^{m_1} \oplus \mathbb{C}^{m_2}$. В силу (2.61) матрица $A(\cdot)$ также имеет блочно-диагональный вид относительно разложения $\mathbb{C}^r = \mathbb{C}^{m_1} \oplus \mathbb{C}^{m_2}$. Поэтому из (2.42)–(2.43) следует, что то же верно для матриц $\gamma(\cdot)$ и $a(\cdot)$, что и означает, что $G$ является инвариантным подпространством и для $\gamma(\cdot)$, и для $a(\cdot)$. $\square$

**Лемма 2.4.** *Пусть $\gamma^+$ имеет простой спектр и $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ – решение системы* (2.26). *Тогда найдутся такие вещественные функции $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_{r-1} \in L^1[0,1]$, что выполнено равенство*

$$a(x) = \kappa_{r-1}(x)\gamma(x)^{r-1} + \ldots + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x), \quad x \in [0,l]. \tag{2.63}$$

*Доказательство.* В силу предложения 2.1, матрица $\gamma(x)$ унитарно эквивалентна $\gamma^+$ при каждом $x \in [0,l]$. Поэтому $\gamma(x)$ является самосопряженной матрицей с простым спектром,

$$\sigma(\gamma(x)) = \sigma(\gamma^+) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}, \qquad \lambda_1 < \ldots < \lambda_r.$$

Коммутант такой матрицы совпадает с алгеброй всех функций от нее. Поэтому $a(x)$ – функция от $\gamma(x)$. Так как $\gamma(x)$ – матрица $r \times r$, то любая функция от нее является полиномом степени не выше $r-1$. Значит, (2.63) выполнено для некоторых функций $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_{r-1}$. Покажем, что эти функции можно выбрать вещественными и суммируемыми. Как известно, собственные значения $\mu_1(x), \ldots, \mu_r(x)$ матрицы $a(x)$ можно выбрать суммируемыми по $x$. По теореме об отображении спектра мы можем считать, что

$$\mu_k(\cdot) = \kappa_{r-1}(\cdot)\lambda_k^{r-1} + \ldots + \kappa_1(\cdot)\lambda_k + \kappa_0(\cdot), \quad k \in \{1, \ldots, r\}. \tag{2.64}$$

Так как числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ различны и вещественны, то из (2.64) вытекает, что

$$\kappa_k(\cdot) = \alpha_{k1}\mu_1(\cdot) + \ldots + \alpha_{kr}\mu_r(\cdot), \quad k \in \{0, 1, \ldots, r-1\},$$

для некоторых вещественных чисел $\alpha_{kj}$. Поэтому $\kappa_k \in L^1[0,l]$ и вещественно, $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. $\square$

**Замечание 2.5.** Далее мы будем описывать решения системы (2.26) в случае полиномиальной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$, то есть при выполнении равенства (2.63). С учетом (2.64) неравенство (2.56), обеспечивающее выход на условие (2.27), в этом случае равносильно следующему

$$r\mu_k(x) \geqslant \mu_1(x) + \ldots + \mu_r(x) - 1, \quad x \in [0, l], \quad k \in \{1, \ldots, r\}.$$

**Лемма 2.5.** *Пусть*

$$\sigma_2 = diag(b_1 I_{r_1}, \ldots, b_s I_{r_s}), \quad r_1 + \ldots + r_s = r,$$
$$\gamma^+ = (\gamma^+_{jk})^s_{j,k=1}, \qquad \gamma^+_{jk} \in \mathbb{C}^{r_j \times r_k}, \quad j, k \in \{1, \ldots, s\}.$$

*Пусть далее пара* $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$ *удовлетворяет системе* (2.26)*, причем*

$$\gamma(x) = (\gamma_{jk}(x))^s_{j,k=1}, \qquad \gamma_{jk}(x) \in \mathbb{C}^{r_j \times r_k}, \quad j, k \in \{1, \ldots, s\}.$$

*Тогда*

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma^+_{jj}, \qquad x \in [0, l], \quad j \in \{1, \ldots, s\}. \tag{2.65}$$

*Доказательство.* Из вида $\sigma_2$ следует, что

$$i[a(x), \sigma_2] = (y_{jk}(x))^s_{j,k=1}, \qquad y_{jk}(x) \in \mathbb{C}^{r_j \times r_k}, \quad j, k \in \{1, \ldots, s\},$$

причем

$$y_{jj}(x) = 0, \qquad x \in [0, l], \quad j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Но тогда из второго уравнения системы следует, что

$$\gamma'_{jj}(x) = 0, \qquad x \in [0, l], \quad j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Поэтому из начального условия $\gamma(0) = \gamma^+$ следует (2.65). □

**Лемма 2.6.** *Пусть или* $\sigma_2$*, или* $\gamma_+$ *является скалярной матрицей. Тогда общее решение системы* (2.26) *имеет вид* $\{a(\cdot), \gamma^+\}$*, где* $a(\cdot)$ *– произвольная самосопряженная суммируемая матрица-функция, коммутирующая и с* $\sigma_2$*, и с* $\gamma^+$*.*

*Доказательство.* Если $\gamma^+$ – скалярная матрица, то в силу предложения 2.1, $\gamma(x) = \gamma^+$, $x \in [0, l]$. Поэтому условие $[a(x), \gamma(x)] = 0$ выполнено для любой матрицы-функции $a(x)$, а так как $\gamma(x)$ – постоянная матрица, то первое уравнение системы (2.26) примет вид $[a(x), \sigma_2] = 0$. Поэтому общее решение системы имеет требуемый вид.

Если же $\sigma_2$ – скалярная матрица, то первое уравнений примет вид $\gamma'(x) = 0$. Поэтому опять $\gamma(x) = \gamma^+$, $x \in [0, l]$, и второе уравнений примет вид $[a(x), \gamma^+] = 0$. Поэтому и в этом случае общее решение системы имеет требуемый вид. □

## 2.4. Описание решений системы типа Лакса в случае линейной и квадратичной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$.

**Предложение 2.3.** *Пусть $\kappa_0, \kappa_1 \in L^1[0, l]$ – вещественные функции. Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, является решением системы* (2.26) *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma(x) = e^{-iK(x)\sigma_2} \cdot \gamma^+ \cdot e^{iK(x)\sigma_2}, \quad K(x) := \int_0^x \kappa_1(t)dt, \quad x \in [0, l]. \quad (2.66)$$

*Доказательство.* Если $a(x) = \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, то $[a(x), \gamma(x)] = 0$ для любого $\gamma(x)$. Поэтому система (2.26) примет вид

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i[\kappa_1(x)\gamma(x), \sigma_2], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \quad (2.67)$$

Это задача Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, и она имеет единственное решение на отрезке $[0, l]$. Проверим, что $\gamma(x)$, заданное формулой (2.66), является решением системы (2.67). Так как $K(0) = 0$, то начальное условие $\gamma(0) = \gamma^+$ выполнено.

Далее имеем

$$\begin{aligned}\gamma'(x) &= -i\kappa_1(x)\sigma_2 \cdot \left(e^{-iK(x)\sigma_2}\gamma^+ e^{iK(x)\sigma_2}\right) \\ &\quad + \left(e^{-iK(x)\sigma_2}\gamma^+ e^{iK(x)\sigma_2}\right) \cdot i\kappa_1(x)\sigma_2 \\ &= i[\kappa_1(x)\gamma(x), \sigma_2] = i[a(x), \sigma_2]. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Поэтому первое уравнение в (2.67) также выполнено. Факт единственности решения завершает доказательство. □

**Следствие 2.1.** *Пусть $r = 2$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то общее решение системы* (2.26) *имеет вид $\{a(x), \gamma^+\}$, где $a(x)$ – произвольная самосопряженная суммируемая матрица-функция, коммутирующая с $\sigma_2$ при каждом $x$.*

*Если же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение системы* (2.26) *имеет вид $\{a(x), \gamma(x)\}$, где $a(x) = \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $\kappa_0, \kappa_1 \in L^1[0, l]$ – произвольные суммируемые вещественные функции, а $\gamma(x)$ задано формулой* (2.66).

*Доказательство.* Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $\gamma^+$ – скалярная матрица и утверждение следует из леммы 2.6. Пусть теперь $\lambda_1 \neq \lambda_2$. По предложению 2.3 указанная в формулировке пара $\{a(x), \gamma(x)\}$ является решением системы (2.26). Рассмотрим теперь произвольное решение $\{a(x), \gamma(x)\}$ системы (2.26). Так как $\gamma^+$ – самосопряженная матрица с простым спектром то по лемме 2.4 выполнено $a(x) = \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, для некоторых вещественных $\kappa_0, \kappa_1 \in L^1[0, l]$. В силу предложения 2.3 для $\gamma(x)$ выполнено (2.66), что и завершает доказательство. □

Так как $\sigma_2$ – самосопряженная матрица, то осуществляя замену ортонормированного базиса, мы можем считать, что $\sigma_2$ – диагональна, $\sigma_2 = diag(b_1, \ldots, b_r)$.

**Предложение 2.4.** *Пусть $\sigma_2 = diag(b_1 I_{r_1}, b_2 I_{r_2})$, $r_1 + r_2 = r$, и*

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^+ & \gamma_{12}^+ \\ \gamma_{21}^+ & \gamma_{22}^+ \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{jk}^+ \in \mathbb{C}^{r_j \times r_k}, \quad j, k \in \{1, 2\}.$$

*Пусть далее $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ – вещественные функции. Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, является* *решением системы* (2.26) *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{+} & \gamma_{12}(x) \\ \gamma_{12}(x)^{*} & \gamma_{22}^{+} \end{pmatrix}, \quad x \in [0, l], \tag{2.69}$$

*где*

$$\gamma_{12}(x) = e^{i(b_1 - b_2)(K_1(x) + K_2(x)\gamma_{11}^{+})} \cdot \gamma_{12}^{+} \cdot e^{i(b_1 - b_2)K_2(x)\gamma_{22}^{+}}, \tag{2.70}$$

$$K_j(x) := \int_0^x \kappa_j(t)dt, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{2.71}$$

*Доказательство.* Так как $a(x)$ коммутирует с $\gamma(x)$, то система (2.26) примет вид

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i[\kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x), \sigma_2], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^{+}, \end{cases} \tag{2.72}$$

По лемме 2.5 для любого решения системы выполнено

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{+} & \gamma_{12}(x) \\ \gamma_{12}(x)^{*} & \gamma_{22}^{+} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{jk}(x) \in \mathbb{C}^{r_j \times r_k}, \quad j, k \in \{1, 2\}.$$

Тогда с учетом блочной структуры $\sigma_2$, $\gamma^{+}$ и $\gamma(x)$, система (2.72) примет вид

$$\begin{cases} \gamma_{12}'(x) = i(b_1 - b_2)\big(\kappa_2(x)(\gamma_{11}^{+}\gamma_{12}(x) + \gamma_{12}(x)\gamma_{22}^{+}) + \kappa_1(x)\gamma_{12}(x)\big), \\ \gamma_{12}(0) = \gamma_{12}^{+}. \end{cases} \tag{2.73}$$

Таким образом, на $\gamma_{12}(\cdot)$ мы имеем задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференцируя формулу (2.70) для $\gamma_{12}(x)$, легко проверить, что такая матрица-функция $\gamma_{12}(\cdot)$ удовлетворяет системе (2.73) (сравните с (2.68)). Так как решение этой системы единственно, то все доказано. □

## 2.5. Выводы к разделу 2

1. Получены явные формулы, выражающие решение системы типа Лакса (2.2) в случае $r = 2$ и $J = I$ (теорема 2.1).

2. Предъявлено решение более общей задачи (2.12) в случае $r = 2$ и произвольном $J$ (теорема 2.2).
3. Получено описание общих изоспектральных свойств решений системы (2.2).
4. Установлено, что система (2.26) специальной заменой сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью (теорема 2.3, замечание 2.2).
5. Указан пошаговый процесс с помощью теоремы 2.3 нахождения всех решений системы (2.26).
6. Описаны решения системы (2.26) в случае линейной и квадратичной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$ и $r = 2$ (предложение 2.3, следствие 2.1).

# РАЗДЕЛ 3. РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТИПА ЛАКСА

Данный раздел посвящен описанию изучаемой системы нелинейных уравнений (2.26) в том случае, когда матрица-функция $a(x)$ имеет простой спектр и является полиномом $k$ степени ($k \leq r-1$) от $\gamma(x)$ со скалярными коэффициентами зависящими от $x$. В подразделе 3.1 при $r=3$ и подразделе 3.2 при $r=4$ мы исследуем случай квадратичной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$. Находим вид всех решений системы (2.26) при $r=3$, когда матрица $\sigma_2$ имеет кратный спектр, а матрица $\gamma^+$ имеет простой спектр. А в подразделе 3.3 при $r=4$ изучена кубическая зависимость матрицы-функции $a(x)$ от $\gamma(x)$. Полученные результаты дают явные решения нелинейной системы уравнений типа Лакса в терминах специальных функций (эллиптических).

## 3.1. Описание решений системы типа Лакса при $r = 3$

Из леммы 2.4 и предложения 2.4 теперь вытекает описание всех решений системы (2.26) в случае $r=3$, простого спектра матрицы $\gamma^+$ и кратного спектра матрицы $\sigma_2$.

**Следствие 3.1.** *Пусть $r=3$, $\sigma_2 = diag(b_1, b_1, b_2)$ и $\gamma^+$ имеет простой спектр. Тогда общее решение системы* (2.26) *имеет вид $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0,l]$, $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0,l]$ – произвольные суммируемые вещественные функции, а $\gamma(x)$ задано формулами* (2.69)–(2.71).

**Теорема 3.1.** *Пусть $r=3$, $\sigma_2 = diag(b_1, b_2, b_3)$, где $b_1, b_2, b_3$ – различные действительные числа, и $\gamma^+ = (\gamma^+_{jk})^3_{j,k=1}$, причем*

$$\gamma^+_{jk} = ic_{jk}, \quad c_{jk} \in \mathbb{R}, \quad j \neq k, \tag{3.1}$$

$$c_{13} > 0, \quad c_{23} > 0, \tag{3.2}$$

$$(b_2 - b_3)\gamma^+_{11} + (b_3 - b_1)\gamma^+_{22} + (b_1 - b_2)\gamma^+_{33} = 0. \tag{3.3}$$

*Положим*

$$\alpha_1 := \frac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2}, \quad \alpha_2 := \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}, \tag{3.4}$$

$$\psi_j(y) := \sqrt{c_{j3}^2 + \alpha_j(y^2 - c_{12}^2)}, \quad j \in \{1, 2\}, \tag{3.5}$$

$$F(y) := \int\limits_{c_{12}}^{y} \frac{du}{\psi_1(u)\psi_2(u)}. \tag{3.6}$$

*Пусть* $(y_0^-, y_0^+) \subset \mathbb{R}$ *– наибольший по включению интервал, который содержит число* $c_{12}$ *и на котором корректно определены функции* $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), F(\cdot)$*, то есть выполнено неравенство*

$$c_{j3}^2 + \alpha_j(y^2 - c_{12}^2) > 0, \quad y_0^- < y < y_0^+, \quad j \in \{1, 2\}.$$

*В силу* (3.2) *и* $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ *такой интервал непустой и конечный.*

*Пусть далее* $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ *– вещественные функции, и функции* $K_1(\cdot), K_2(\cdot)$ *определены формулой* (2.71)*, причем*

$$F(y_0^-) < (b_1 - b_2)K_2(x) < F(y_0^+), \quad x \in [0, l), \tag{3.7}$$

*Тогда пара* $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$*, где* $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$*,* $x \in [0, l]$*, и* $\gamma(\cdot) = (\gamma_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^3$*, является решением системы* (2.26) *тогда и только тогда, когда при* $x \in [0, l]$ *выполнены равенства*

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{3.8}$$

$$\gamma_{jk}(x) = ie^{i(b_j - b_k)\left(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x)\right)} y_{jk}(x), \quad j \neq k, \tag{3.9}$$

*где функции* $y_{jk}(\cdot)$*,* $j \neq k$*, определены равенствами*

$$y_{12}(x) = F^{-1}\big((b_1 - b_2)K_2(x)\big), \tag{3.10}$$

$$y_{j3}(x) = \psi_j(y_{12}(x)), \quad j \in \{1, 2\}, \tag{3.11}$$

$$y_{kj}(x) = -y_{jk}(x), \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 3. \tag{3.12}$$

*Здесь* $F^{-1}(\cdot)$ *– функция обратная к функции* $F(\cdot)$*. (если* $F(y_0^\pm) = \pm\infty$*, то* $F^{-1}(\pm\infty) := y_0^\pm$*).*

*Доказательство.* Как и при доказательстве предложения 2.4 система (2.26) примет вид (2.72), причем по лемме 2.5 для любого решения этой системы выполнено (3.8). С учетом этого, первое уравнение системы (2.72) примет вид

$$\gamma'_{jk}(x) = i(b_j - b_k)\big(\kappa_1(x) + (\gamma^+_{jj} + \gamma^+_{kk})\kappa_2(x)\big)\gamma_{jk}(x) \\ + i(b_j - b_k)\kappa_2(x)\gamma_{js}(x)\gamma_{sk}(x), \quad x \in [0,l], \quad j \neq k, \tag{3.13}$$

где $s = s(j,k) := 6 - j - k$ – единственное число из множества $\{1,2,3\}$, не равное $j$ и $k$. Будем искать решение этой системы в виде (3.9). Ясно, что при такой подстановке первое слагаемое в правой части (3.13) сократится. После очевидных преобразований получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $y_{jk}(\cdot)$, $j \neq k$:

$$y'_{jk}(x) = e^{iK_2(x)\big((b_j-b_s)(\gamma^+_{jj}+\gamma^+_{ss})+(b_s-b_k)(\gamma^+_{ss}+\gamma^+_{kk})+(b_k-b_j)(\gamma^+_{kk}+\gamma^+_{jj})\big)} \\ \times (b_k - b_j)\kappa_2(x)y_{js}(x)y_{sk}(x), \quad x \in [0,l], \quad s = 6 - j - k. \tag{3.14}$$

Из равенства (3.3) следует, что первый множитель в правой части (3.14) равен единице. Так как, $K_1(0) = K_2(0) = 0$, то $\gamma_{jk}(0) = iy_{jk}(0)$. Поэтому с учетом (3.1), начальное условие $\gamma(0) = \gamma^+$ эквивалентно равенствам $y_{jk}(0) = c_{jk}$, $j \neq k$. Так как $\gamma_{kj}(\cdot) = \overline{\gamma_{jk}(\cdot)}$, $j \neq k$, то из (3.9) следует, что

$$y_{kj}(\cdot) = -\overline{y_{jk}(\cdot)}, \quad j \neq k. \tag{3.15}$$

С учетом замечания о трансформации начального условия и равенства (3.15), система (2.72) сводится к следующей начальной задаче на функции $y_{12}$, $y_{13}$, $y_{23}$:

$$\begin{cases} y'_{12} = (b_1 - b_2)\kappa_2(x) \cdot y_{13} \cdot \overline{y_{23}}, & x \in [0,l], \\ y'_{13} = (b_3 - b_1)\kappa_2(x) \cdot y_{12} \cdot y_{23}, & x \in [0,l], \\ y'_{23} = (b_2 - b_3)\kappa_2(x) \cdot \overline{y_{12}} \cdot y_{13}, & x \in [0,l], \\ y_{jk}(0) = c_{jk}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 3, \end{cases} \tag{3.16}$$

Докажем, что любое решение этой системы является вещественным. Пусть $\{y_{12}(\cdot),\, y_{13}(\cdot),\, y_{23}(\cdot)\}$ – какое-либо (комплексно-значное) решение системы (3.16). Положим

$$u_{jk}(\cdot) := Re\, y_{jk}(\cdot), \quad v_{jk}(\cdot) := Im\, y_{jk}(\cdot), \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 3.$$

Отделяя мнимую часть в уравнениях задачи (3.16) и учитывая, что $c_{jk} \in \mathbb{R}$, $j \neq k$, получим следующую систему на функции $v_{jk}(\cdot)$:

$$\begin{cases} v_{12}' = (b_1 - b_2)\kappa_2(x)(u_{23}v_{13} - u_{13}v_{23}), & x \in [0,l], \\ v_{13}' = (b_3 - b_1)\kappa_2(x)(u_{23}v_{12} + u_{12}v_{23}), & x \in [0,l], \\ v_{23}' = (b_2 - b_3)\kappa_2(x)(u_{12}v_{13} - u_{13}v_{12}), & x \in [0,l], \\ v_{jk}(0) = 0, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 3. \end{cases} \tag{3.17}$$

Система (3.17) является задачей Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными данными. Поэтому по теореме единственности $v_{jk}(\cdot) = 0$, $1 \leqslant j < k \leqslant 3$, что и означает вещественность решения $\{y_{12}(\cdot),\, y_{13}(\cdot),\, y_{23}(\cdot)\}$.

Таким образом, нам надо доказать, что следующая вещественная задача

$$\begin{cases} y_{12}' = (b_1 - b_2)\kappa_2(x)\cdot y_{13}\cdot y_{23}, & x \in [0,l], \\ y_{13}' = (b_3 - b_1)\kappa_2(x)\cdot y_{12}\cdot y_{23}, & x \in [0,l], \\ y_{23}' = (b_2 - b_3)\kappa_2(x)\cdot y_{12}\cdot y_{13}, & x \in [0,l], \\ y_{jk}(0) = c_{jk}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 3, \end{cases} \tag{3.18}$$

имеет единственное глобальное решение на отрезке $[0,l]$ и оно задается формулами (3.11).

Проверим, сначала, что указанный набор $\{y_{12}(\cdot),\, y_{13}(\cdot),\, y_{23}(\cdot)\}$ является решением. Дифференцируя функции $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$, $F(\cdot)$, заданные равенствами (3.5), (3.6), получим

$$\psi_j'(y) = \frac{\alpha_j y}{\psi_j(y)},\ j \in \{1,2\}, \quad F'(y) = \frac{1}{\psi_1(y)\psi_2(y)}, \quad y \in (y_0^-, y_0^+). \tag{3.19}$$

Из неравенства (3.7) следует, что функция $y_{12}(\cdot)$, заданная формулой (3.56), корректно определена на отрезке $[0,l]$, причем $y_{12}(x) \in$

$(y_0^-, y_0^+)$, $x \in [0, l)$. Поэтому справедливо равенство

$$F(y_{12}(x)) = (b_1 - b_2)K_2(x), \quad x \in [0, l],$$

дифференцируя которое, получим

$$F'(y_{12}(x))y_{12}'(x) = (b_1 - b_2)\kappa_2(x), \quad x \in [0, l].$$

Отсюда с учетом (3.19) и (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} y_{12}'(x) &= (b_1 - b_2)\kappa_2(x)\psi_1(y_{12}(x))\psi_2(y_{12}(x)) \\ &= (b_2 - b_1)\kappa_2(x)y_{13}(x)y_{23}(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Тем самым первое уравнение в (3.18) выполнено. Далее в силу (3.11), (3.19), (3.20) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} y_{13}'(x) &= y_{12}'(x)\psi_1'(y_{12}(x)) = (b_1 - b_2)\kappa_2(x)y_{13}(x)y_{23}(x) \\ &\times \frac{\alpha_1 y_{12}(x)}{\psi_1(y_{12}(x))} = (b_3 - b_1)\kappa_2(x)y_{12}(x)y_{23}(x), \quad x \in [0, l], \end{aligned}$$

что доказывает справедливость второго уравнения в (3.18). Аналогично проверяется, что третье уравнение выполнено. Далее имеем

$$\begin{aligned} &y_{12}(0) = F^{-1}((b_1 - b_2)K_2(0)) = F^{-1}(0) = c_{12}, \\ &y_{j3}(0) = \psi_j(y_{12}(0)) = \psi_j(c_{12}) = c_{j3}, \quad j \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$, $y_{23}(\cdot)$, заданные равенствами (3.11), удовлетворяют задаче (3.18).

Пусть теперь функции $y_{12}, y_{13}, y_{23} \in AC[0, l]$ удовлетворяют (3.18). Проверим справедливость равенств (3.11). Умножая первое уравнение системы на $(b_3 - b_1)y_{12}(x)$, второе уравнение на $(b_1 - b_2)y_{13}(x)$, и вычитая полученные уравнения, получим

$$(b_3 - b_1) \cdot y_{12} \cdot y_{12}' = (b_1 - b_2) \cdot y_{13} \cdot y_{13}'.$$

Интегрируя это равенство от 0 до $x$, с учетом начального условия получим

$$(b_3 - b_1)(y_{12}^2(x) - c_{12}^2) = (b_1 - b_2)(y_{13}^2(x) - c_{13}^2), \quad x \in [0, l],$$

или с учетом определения $\alpha_1$ (см. (3.4))

$$y_{13}^2(x) = c_{13}^2 + \alpha_1(y_{12}^2(x) - c_{12}^2), \quad x \in [0, l]. \tag{3.21}$$

Аналогично из первого и третьего уравнений системы (3.18) выводится, что

$$y_{23}^2(x) = c_{23}^2 + \alpha_2(y_{12}^2(x) - c_{12}^2), \quad x \in [0, l]. \tag{3.22}$$

Из равенств (3.21)–(3.22) и определения чисел $y_0^\pm$ следует, что

$$y_0^- \leqslant y_{12}(x) \leqslant y_0^+, \quad x \in [0, l].$$

Пусть $x_0 \in [0, l]$ – минимальное число, для которого $y_{13}(x_0)y_{23}(x_0) = 0$. Если $y_{13}(x)y_{23}(x) \neq 0$, $x \in [0, l]$, то полагаем $x_0 := l$. Так как $y_{j3}(0) = c_{j3} > 0$, $j \in \{1, 2\}$, то $x_0 > 0$, и по непрерывности $y_{j3}(x) > 0$, $x \in [0, x_0)$. Поэтому из (3.21)–(3.22) с учетом определения функций $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$ (см. (3.5)) вытекает, что

$$y_{j3}(x) = \psi_j(y_{12}(x)), \quad x \in [0, x_0], \quad j \in \{1, 2\}. \tag{3.23}$$

Подставляя эти выражения для $y_{13}(\cdot)$ и $y_{23}(\cdot)$ в первое уравнение системы (3.18), получим

$$\frac{y_{12}'(x)}{\psi_1(y_{12}(x)) \cdot \psi_2(y_{12}(x))} = (b_1 - b_2)\kappa_2(x), \quad \text{для п.в. } x \in [0, x_0].$$

Интегрируя полученное равенство, получим с учетом определения функции $F(\cdot)$ и начального условия $y_{12}(0) = c_{12}$

$$F(y_{12}(x)) = (b_1 - b_2)K_2(x), \quad x \in [0, x_0]. \tag{3.24}$$

Если $x_0 < l$, то $y_{13}(x_0)y_{23}(x_0) = 0$. Поэтому из равенств (3.21)–(3.22) и определения чисел $y_0^\pm$ следует, что либо $y_{12}(x_0) = y_0^-$, либо $y_{12}(x_0) = y_0^+$. Но тогда равенство (3.24) при $x = x_0$ противоречит неравенству (3.7). Поэтому $x_0 = l$, и равенства (3.24), (3.23) влекут требуемые равенства (3.11). $\square$

**Замечание 3.1.** Теорема 3.1 позволяет описывать все решения задачи (2.26) если $r = 3$, $\sigma_2 = diag(b_1, b_2, b_3)$, матрицы $\sigma_2$ и $\gamma^+$ имеют простой спектр и выполнены равенства (3.3) и

$$Re(\gamma_{12}^+\gamma_{23}^+\gamma_{31}^+) = 0. \tag{3.25}$$

А именно, если хотя бы два числа из набора $\gamma_{12}^+, \gamma_{13}^+, \gamma_{23}^+$ равны нулю, то матрицы $\sigma_2$ и $\gamma^+$ имеют нетривиальное общее инвариантное подпространство. В силу предложения 2.2 любое решение системы (2.26) в этом случае будет распадающимся. Поэтому описание всех решений можно получить с помощью следствия 2.1.

В противном случае, меняя местами базисные вектора если нужно, мы можем считать, что $\gamma_{12}^+\gamma_{13}^+ \neq 0$. Тогда условие (3.25) позволяет привести матрицу $\gamma^+$ унитарным диагональным преобразованием к виду, для которого выполнено (3.1)–(3.2). При этом матрица $\sigma_2$ останется диагональной после этого преобразования.

Далее, так как матрица $\gamma^+$ имеет простой спектр, то в силу леммы 2.4 любое решение системы (2.26) имеет вид $\{a(x), \gamma(x)\}$, $a(x) = \kappa_2(x)\gamma^2(x) + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, где $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ – вещественные функции. Если неравенство (3.7) выполнено, то формулы (3.8)–(3.12) описывают все решения системы (2.26). В противном случае найдем максимальное $l_1 < l$, для которого выполнено неравенство (3.7) при $x \in [0, l_1)$. Тогда теорема 3.1 дает описание всех решений системы (2.26) на меньшем отрезке $[0, l_1]$. Из формул (3.9), (3.25) вытекает, что

$$Re(\gamma_{12}(l_1)\gamma_{23}(l_1)\gamma_{31}(l_1)) = 0. \tag{3.26}$$

Поэтому, рассматривая систему (2.26) на отрезке $[l_1, l]$ с начальным данным $\gamma(l_1)$ вместо $\gamma^+$ мы можем применить те же рассуждения. Отметим также, что так как $l_1$ максимально возможное число, для которого выполнено неравенство (3.7), то $\psi_1(l_1)\psi_2(l_1) = 0$. Поэтому $\gamma_{13}(l_1)\gamma_{23}(l_1) = 0$, и, значит, решение на отрезке $[l_1, l]$ существенно перестроится по сравнению с отрезком $[0, l_1]$.

Таким образом, либо за конечное число шагов мы получим решение системы (2.26) на всем отрезке $[0, l]$, либо мы получим бесконечную возрастающую последовательность чисел $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторому числу $l_0 \leqslant l$. Решение системы в точке $l_0$ существует тогда и только тогда, когда существует матричный предел $\widetilde{\gamma}(l_0) := \lim_{k\to\infty} \gamma(l_k)$. Если предел не существует, то решение системы для заданных функций $\kappa_0(\cdot), \kappa_1(\cdot), \kappa_2(\cdot)$ не существует в точке $l_0$. Иначе мы полагаем $\gamma(l_0) = \widetilde{\gamma}(l_0)$ и применяем те же рассуждения, что и выше для отрезка $[l_0, l]$, так как равенство (3.26) в точке $l_0$ выполнено. Используя лемму Цорна, можно показать, что по описанной выше схеме мы построим решение системы (2.26) на максимально возможном отрезке, на котором оно существует.

Теорема 3.1 хоть и позволяет описывать все решения задачи (2.26) при достаточно общих предположениях на матрицы $\sigma_2$ и $\gamma^+$, является громоздкой. Следующее следствие показывает явную связь решений задачи (2.26) с основными эллиптическими функциями Якоби в случае, когда $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$.

**Следствие 3.2.** *Пусть в условиях теоремы 3.1 $c_{12} = 0$ и $b_1 < b_3 < b_2$. Тогда для функций $y_{12}(\cdot), y_{13}(\cdot), y_{23}(\cdot)$ справедливы следующие формулы*

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}} sn(z(x); k), \tag{3.27}$$

$$y_{13}(x) = c_{13} cn(z(x); k), \tag{3.28}$$

$$y_{23}(x) = c_{23} dn(z(x); k), \tag{3.29}$$

*где*

$$z(x) = c_{23}\sqrt{(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)} K_2(x), \quad k = \frac{c_{13}}{c_{23}} \cdot \sqrt{\frac{b_2 - b_3}{b_3 - b_1}}, \tag{3.30}$$

$$K_2(x) = \int_0^x \kappa_2(t) dt, \quad a(\cdot) = \kappa_2(\cdot)\gamma(\cdot)^2 + \kappa_1(x)\gamma(\cdot) + \kappa_0(\cdot).$$

*Доказательство.* Из определения функции $F(\cdot)$ и формулы (3.10) следует, что

$$(b_1 - b_2)K_2(x) = F(y_{12}(x)) = \int\limits_0^{y_{12}(x)} \frac{du}{\sqrt{c_{13}^2 + \alpha_1 u^2}\sqrt{c_{23}^2 + \alpha_2 u^2}}. \tag{3.31}$$

Так как $b_1 < b_3 < b_2$, то $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$. Положим $\beta_j = \sqrt{-\alpha_j}$, $j \in \{1, 2\}$. Тогда формула (3.31) примет вид

$$(b_1 - b_2)K_2(x) = \int\limits_0^{y_{12}(x)} \frac{du}{\sqrt{c_{13}^2 - (\beta_1 u)^2}\sqrt{c_{23}^2 - (\beta_2 u)^2}}.$$

Делая замену $u = \dfrac{c_{13}}{\beta_1}v$, с учётом определения чисел $k, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, получим

$$(b_1 - b_2)K_2(x) = \frac{1}{c_{23}\beta_1} \int\limits_0^{\beta_1 y_{12}(x)/c_{13}} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - k^2 v^2}}. \tag{3.32}$$

Учитывая, что [5]

$$sn\left(\int_0^z \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - k^2 v^2}}; k\right) = z,$$

получим из (3.32)

$$y_{12}(x) = \frac{c_{13}}{\beta_1} sn\left(c_{23}(b_1 - b_2)\beta_1 K_2(x); k\right),$$

откуда следует формула (3.27). Подставляя (3.27) в (3.11) при $j = 1$ получим с учетом формулы $cnz = \sqrt{1 - sn^2 z}$

$$y_{13}(x) = \sqrt{c_{13}^2 - (\beta_1 y_{12}(x))^2} = \sqrt{c_{13}^2 - (c_{13} snz(x))^2} = c_{13} cnz(x).$$

Наконец, подставляя (3.27) в (3.11) при $j = 2$, получим с учетом формулы $dnz = \sqrt{1 - k^2 sn^2 z}$

$$y_{23}(x) = \sqrt{c_{23}^2 - (\beta_2 y_{12}(x))^2} = c_{23}\sqrt{1 - k^2 sn^2 z(x)} = c_{23} dnz(x),$$

что и завершает доказательство. $\square$

В завершение проиллюстрируем данное следствие на следующем наглядном примере.

**Пример 3.2.** Пусть

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix}, \quad b > 1. \tag{3.33}$$

Тогда пара $\{a(x),\gamma(x)\}$, где $a(x)=\gamma(x)^2$, является решением системы (2.26) тогда и только тогда, когда

$$\gamma(x)=\begin{pmatrix} 0 & ibsnx & icnx \\ -ibsnx & 0 & idnx \\ -icnx & -idnx & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

где $snx=sn(x;k)$, $cnx=cn(x;k)$, $dnx=dn(x;k)$ и $k=\sqrt{b^2-1}$.

## 3.2. Исследование решений системы (2.26) при $r=4$

Справедливо следующее утверждение

**Предложение 3.1.** *Пусть*

$$\sigma_2=diag(b_1,\ldots,b_r),\quad \gamma^+=\alpha_1\sigma_2+\alpha_0 I+iC, \tag{3.35}$$

*где* $\alpha_1,\alpha_0\in\mathbb{R}$, *матрица* $C=(c_{jk})_{j,k=1}^r=-C^*$ *и* $c_{jj}=0$, *при* $j\in\{1,\ldots,r\}$.

*Пусть далее* $\kappa_0,\ \kappa_1,\ \kappa_2\in L^1[0,l]$ *– вещественные функции. Тогда пара* $\{a(\cdot),\gamma(\cdot)\}$, *где* $a(x)=\kappa_2(x)\gamma(x)^2+\kappa_1(x)\gamma(x)+\kappa_0(x)$, $x\in[0,l]$, *и* $\gamma(\cdot)=(\gamma_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^r$, *является решением системы* (2.26) *тогда и только тогда, когда при* $x\in[0,l]$ *выполнены равенства*

$$\gamma_{jj}(x)=\gamma_{jj}^+,\quad j\in\{1,\ldots,r\}, \tag{3.36}$$

$$\gamma_{jk}(x)=ie^{i(b_j-b_k)\left(K_1(x)+(\gamma_{jj}^++\gamma_{kk}^+)K_2(x)\right)}y_{jk}(x),\quad j\neq k, \tag{3.37}$$

*где*

$$K_j(x):=\int_0^x\kappa_j(t)dt,\quad j\in\{1,2\}, \tag{3.38}$$

*а функции* $y_{jk}(\cdot)$, $j\neq k$, *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} y_{jk}'(x) &= (b_k-b_j)\kappa_2(x)\sum\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j,k}}^{n} y_{js}(x)y_{sk}(x),\quad x\in[0,l],\quad j\neq k,\\ y_{kj}(x) &= \overline{-y_{jk}(x)},\quad x\in[0,l],\quad j\neq k,\\ y_{jk}(0) &= c_{jk},\quad j\neq k. \end{cases} \tag{3.39}$$

*При этом, если $c_{jk} \in \mathbb{R}$, $j \neq k$, то любое решение системы* (3.39) *является вещественным.*

*Доказательство.* Так как $a(x)$ коммутирует с $\gamma(x)$, то система (2.26) примет вид

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i[\kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x), \sigma_2], \quad x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{3.40}$$

По лемме 3.12 из [62] в силу диагонального вида $\sigma_2$ для любого решения системы (3.40) выполнено (3.36). С учетом этого система (3.40) примет вид

$$\begin{cases} \gamma'_{jk}(x) & = i(b_j - b_k)(\kappa_1(x) + \kappa_2(x)(\gamma_{jj} + \gamma_{kk})) \\ & \quad + i(b_j - b_k)\kappa_2(x) \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq j,k}}^{r} \gamma_{js}(x)\gamma_{sk}(x), \quad x \in [0, l], \quad j \neq k, \\ \gamma_{kj}(x) & = \overline{\gamma_{jk}(x)}, \quad x \in [0, l], \quad j \neq k, \\ \gamma_{jk}(0) & = \gamma_{jk}, \quad j \neq k. \end{cases} \tag{3.41}$$

Будем искать решение этой системы в виде (3.37). В силу (3.35) выполнено $\gamma_{jj} = \alpha_1 b_j + \alpha_0$, $j \in \{1, \ldots, r\}$. Поэтому формула (3.37) примет вид

$$\gamma_{jk}(x) = iE_j(x)/E_k(x) \cdot y_{jk}(x), \quad E_j(x) := e^{ib_j(K_1(x) + (\alpha_1 b_j + 2\alpha_0)K_2(x))}. \tag{3.42}$$

Теперь, подставляя формулу (3.42) в систему (3.41) легко проверить, что она эквивалентна (3.39).

В случае, если матрица $C$ вещественная, то любое решение системы (3.39) является вещественным. Пусть $\{y_{jk}(\cdot)\}_{j \neq k}$ – какое-либо (комплексно-значное) решение системы (3.39). Положим

$$u_{jk}(\cdot) := Re\, y_{jk}(\cdot), \quad v_{jk}(\cdot) := Im\, y_{jk}(\cdot), \quad j \neq k.$$

Отделяя мнимую часть в уравнениях задачи (3.39) и учитывая, что

$c_{jk} \in \mathbb{R}$, $j \neq k$, получим следующую систему на функции $v_{jk}(\cdot)$:

$$\begin{cases} v'_{jk} = (b_k - b_j)\kappa_2(x) \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s\neq j,k}}^{r} (u_{sk}v_{js} + u_{js}v_{sk}), \quad x \in [0, l], \quad j \neq k \\ v_{jk}(0) = 0, \quad j \neq k. \end{cases} \tag{3.43}$$

Система (3.43) является задачей Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевыми начальными данными. Поэтому по теореме единственности $v_{jk}(\cdot) = 0$, $j \neq k$, что и означает вещественность решения $\{y_{jk}(\cdot)\}_{j\neq k}$. $\square$

**Теорема 3.3.** *Пусть $r = 4$,*

$$b_4 < b_1 < b_2 < b_3, \quad b_1 + b_2 = b_3 + b_4, \tag{3.44}$$

$$\alpha_3 = \frac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1}, \quad \alpha_4 = \frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_1}. \tag{3.45}$$

*Пусть далее*

$$c_{jk} \in \mathbb{R}, \quad c_{jk} = -c_{kj}, \quad j, k \in \{1, \ldots, 4\}, , \tag{3.46}$$

$$c_{1k} > 0, \quad k \in \{2, 3, 4\}, \tag{3.47}$$

$$c_{23} = \sqrt{\alpha_3} \cdot c_{13}, \quad c_{24} = -\sqrt{\alpha_4} \cdot c_{14}, \quad c_{34} = 0. \tag{3.48}$$

*Далее, положим*

$$\beta_3 = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}, \quad \beta_4 = \frac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1}, \tag{3.49}$$

$$\alpha = \frac{c_{14}}{c_{13}}, \quad \beta = \beta_3 + \beta_4\alpha^2, \tag{3.50}$$

$$F(y) = \int_{c_{13}}^{y} \frac{du}{u\sqrt{c_{12}^2 + \beta \cdot (u^2 - c_{13}^2)}}, \tag{3.51}$$

$$\rho = \sqrt{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)}, \tag{3.52}$$

$$v(x) = F^{-1}\left(\rho \cdot K_2(x)\right), \tag{3.53}$$

*где $F^{-1}(\cdot)$ – функция обратная к функции $F(\cdot)$. Пусть $(y_0^-, y_0^+) \subset \overline{\mathbb{R}}$ – наибольший по включению интервал, который содержит число $c_{13}$ и выполнено неравенство*

$$c_{12}^2 + \beta \cdot (y^2 - c_{13}^2) > 0, \quad y_0^- < y < y_0^+. \tag{3.54}$$

*Пусть далее* $\kappa_0, \kappa_1 \kappa_2 \in L^1[0,l]$ *– вещественные функции, и функции* $K_1(x)$, $K_2(x)$ *определены равенствами* $K_j(x) = \int_0^x \kappa_j(t)dt$, $j = 1, 2$ *и*

$$F(y_0^-) < \rho \cdot K_2(x) < F(y_0^+), \quad x \in [0,l), \tag{3.55}$$

*Тогда пара* $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, *где* $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0,l]$ *является решением системы* (2.26) *тогда и только тогда, когда при* $x \in [0,l]$ *выполнены равенства*

$$\begin{aligned} &\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}, \\ &\gamma_{jk}(x) = ie^{i(b_j - b_k)\left(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x)\right)} y_{jk}(x), \quad j \neq k, \end{aligned}$$

*где функции* $y_{jk}$, $j \neq k$ *имеют вид*

$$y_{12}(x) = \sqrt{c_{12}^2 + \beta \cdot (v^2(x) - c_{13}^2)}, \tag{3.56}$$

$$y_{13}(x) = v(x), \tag{3.57}$$

$$y_{14}(x) = \alpha \cdot v(x), \tag{3.58}$$

$$y_{23}(x) = \sqrt{\alpha_3} \cdot v(x), \tag{3.59}$$

$$y_{24}(x) = -\sqrt{\alpha_4} \cdot \alpha \cdot v(x), \tag{3.60}$$

$$y_{34}(x) = 0, \tag{3.61}$$

$$y_{kj}(x) = y_{jk}(x), \quad 1 \leqslant j < k \leqslant 4. \tag{3.62}$$

*Доказательство.* Проверим, сначала, что указанный набор $\{y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$, $y_{14}(\cdot)$, $y_{23}(\cdot)$, $y_{24}(\cdot)$, $y_{34}(\cdot)\}$ является решением системы (3.39). Из неравенства (3.55) следует, что функция $v(\cdot)$, заданная формулой (3.53), корректно определена на отрезке $[0,l]$, причем $v(x) \in (y_0^-, y_0^+)$, $x \in [0,l)$. Поэтому справедливо равенство

$$F(v(x)) = \rho \cdot K_2(x), \quad x \in [0,l],$$

дифференцируя которое, получим

$$v'(x)F'(v(x)) = \rho \cdot \kappa_2(x), \quad x \in [0,l].$$

Отсюда с учетом (3.51), (3.56), (3.57), (3.59) следует, что

$$\begin{aligned} y_{13}'(x) = v'(x) &= \rho \cdot \kappa_2(x) \cdot v(x) \cdot \sqrt{c_{12}^2 + \beta \cdot (v^2(x) - c_{13}^2)} \\ &= \rho \cdot \kappa_2(x) \cdot v(x) \cdot y_{12}(x) && (3.63) \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_3}} \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{23}(x) \\ &= (b_3 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{23}(x), \quad x \in [0, l]. && (3.64) \end{aligned}$$

Заметим, что согласно (3.44) выполнено равенство $\alpha_3\alpha_4 = 1$. Поэтому

$$\frac{\sqrt{\alpha_3}(b_1 - b_3)}{\sqrt{\alpha_4}} = \alpha_3 \cdot (b_1 - b_3) = b_2 - b_3 = b_4 - b_1,$$

и, в силу (3.57), (3.58), (3.64),(3.59), (3.60) имеем

$$\begin{aligned} y_{14}'(x) = \alpha \cdot y_{13}'(x) &= \alpha \cdot (b_3 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{23}(x) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha_3}(b_1 - b_3)}{\sqrt{\alpha_4}} \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{24}(x) \\ &= (b_4 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{24}(x), \quad x \in [0, l]. && (3.65) \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} y_{23}'(x) = \sqrt{\alpha_3} \cdot y_{13}'(x) &= \sqrt{\alpha_3} \cdot (b_3 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{23}(x) \\ &= \alpha_3 \cdot (b_3 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{13}(x) \\ &= (b_3 - b_2) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{13}(x), \quad x \in [0, l], && (3.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{24}'(x) = -\sqrt{\alpha_4} \cdot y_{14}'(x) &= -\sqrt{\alpha_4} \cdot (b_4 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{24}(x) \\ &= \alpha_4 \cdot (b_4 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{14}(x) \\ &= (b_4 - b_2) \cdot \kappa_2(x) \cdot y_{12}(x) \cdot y_{14}(x), \quad x \in [0, l], && (3.67) \end{aligned}$$

Исходя из (3.56) и (3.63) получим

$$y_{12}'(x) = \frac{\beta \cdot v(x) \cdot v'(x)}{y_{12}(x)} = \rho \cdot \beta \cdot \kappa_2(x) \cdot v^2(x), \quad x \in [0, l]. \qquad (3.68)$$

Далее, учитывая (3.57)–(3.60) имеем

$$y_{13}(x)y_{23}(x) + y_{14}(x)y_{24}(x) = (\sqrt{\alpha_3} - \sqrt{\alpha_4} \cdot \alpha^2) \cdot v^2(x), \quad x \in [0, l]. \quad (3.69)$$

Заметим, что в силу (3.44) выполнено равенство

$$\rho = \sqrt{(b_3 - b_2)(b_3 - b_1)} = \sqrt{(b_4 - b_2)(b_4 - b_1)}. \tag{3.70}$$

Поэтому, так как $b_4 < b_1 < b_3$, то

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \beta &= \rho \cdot (\beta_3 + \beta_4 \alpha^2) \\
&= \sqrt{(b_3 - b_2)(b_3 - b_1)} \cdot \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} + \sqrt{(b_4 - b_2)(b_4 - b_1)} \cdot \frac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1} \cdot \alpha^2 \\
&= (b_2 - b_1) \left( \sqrt{\frac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1}} - \sqrt{\frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_1}} \alpha^2 \right) && (3.71) \\
&= (b_2 - b_1) \left( \sqrt{\alpha_3} - \sqrt{\alpha_4} \cdot \alpha^2 \right). && (3.72)
\end{aligned}$$

Теперь из соотношений (3.68)–(3.71) следует, что

$$y_{12}'(x) = (b_2 - b_1) \cdot \kappa_2(x) \cdot (y_{13}(x) y_{23}(x) + y_{14}(x) y_{24}(x)), \quad x \in [0, l]. \tag{3.73}$$

Так как $\alpha_3 \alpha_4 = 1$, то в силу (3.57)–(3.61)

$$\begin{aligned}
&(b_4 - b_3) \cdot \kappa_2(x) \cdot (y_{13}(x) y_{14}(x) + y_{23}(x) y_{24}(x)) \\
&\quad = (b_4 - b_3) \cdot \kappa_2(x) \cdot (y_{13}(x) y_{14}(x) - \sqrt{\alpha_3} \cdot y_{13}(x) \cdot \sqrt{\alpha_4} \cdot y_{14}(x)) \\
&\quad = 0 = y_{34}'(x). && (3.74)
\end{aligned}$$

Теперь из равенств (3.73), (3.64), (3.65), (3.66), (3.67), (3.74) следует, что функции $y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}, y_{34}$ удовлетворяют уравнениям системы (3.39). Далее, так как $c_{12} > 0$, то

$$\begin{aligned}
y_{13}(0) &= v(0) = F^{-1}(\rho \cdot K_2(0)) = F^{-1}(0) = c_{13}, && (3.75) \\
y_{12}(0) &= \sqrt{c_{12}^2 + \beta \cdot (v^2(0) - c_{13}^2)} = c_{12}, && (3.76) \\
y_{14}(0) &= \alpha \cdot v(0) = \frac{c_{14}}{c_{13}} \cdot c_{13} = c_{14}, && (3.77) \\
y_{23}(0) &= \sqrt{\alpha_3} \cdot y_{13}(0) = \sqrt{\alpha_3} \cdot c_{13} = c_{23}, && (3.78) \\
y_{24}(0) &= -\sqrt{\alpha_4} \cdot y_{14}(0) = -\sqrt{\alpha_4} \cdot c_{14} = c_{24}, && (3.79) \\
y_{34}(0) &= 0 = c_{34}. && (3.80)
\end{aligned}$$

Таким образом, функции $y_{12}(\cdot), y_{13}(\cdot), y_{14}(\cdot), y_{23}(\cdot), y_{24}(\cdot), y_{34}(\cdot)$ удовлетворяют также и начальным данным системы (3.39).

Из общих теорем единственности для начальной задачи вытекает, что эта система имеет единственное решение на $[0, l]$.

Покажем способ нахождения выражений для $y_{ks}(\cdot)$, $k, s \in \{1, \ldots, 4\}$, (3.56) – (3.62) как решений соответствующей системы дифференциальных уравнений (3.39). Пусть теперь функции $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$, $y_{14}(\cdot)$ $y_{23}(\cdot)$, $y_{24}(\cdot)$, $y_{34}(\cdot) \in AC[0, l]$ удовлетворяют задаче (3.39). Умножим уравнение (3.64) на $(b_3 - b_2)y_{13}(x)$, а (3.66) на $(b_3 - b_1)y_{23}(x)$ и сложим. В результате придем к соотношению $y'_{23}(x)y_{23}(x) - \alpha_3 \cdot y'_{13}(x)y_{13}(x) = 0$, интегрируя которое, находим что

$$y_{23}(x) = \sqrt{c_{23}^2 + \alpha_3(y_{13}^2(x) - c_{13}^2)}, \tag{3.81}$$

с учетом (3.48), получим (3.59). Аналогично поступим с (3.65) и (3.67), значит $y_{24}(x) = \sqrt{c_{24}^2 + \alpha_4(y_{14}^2(x) - c_{14}^2)}$, при этом, используя (3.48), приходим к

$$y_{24}(x) = -\sqrt{\alpha_4} \cdot y_{14}(x). \tag{3.82}$$

Воспользуемся соотношениями (3.81) и (3.82) для уравнений (3.64) и (3.65)

$$y'_{13}(x) = \kappa_2(x) \cdot (b_3 - b_1) \cdot y_{12}(x) \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot y_{13}(x); \tag{3.83}$$

$$y'_{14}(x) = \kappa_2(x) \cdot (b_4 - b_1) \cdot y_{12}(x) \cdot \sqrt{\alpha_4} \cdot y_{14}(x). \tag{3.84}$$

Выразим из (3.83) $\kappa_2(x) \cdot y_{12}(x)$ и, учитывая (3.70) приравняем полученные соотношения

$$\frac{y'_{13}(x)}{y_{13}(x)} = \frac{y'_{14}(x)}{y_{14}(x)}. \tag{3.85}$$

Из (3.85) получим

$$y_{14}(x) = \frac{c_{14}}{c_{13}} \cdot y_{13}(x) = \alpha \cdot y_{13}(x). \tag{3.86}$$

Тем самым подтверждена справедливость равенства (3.58) и, после его подстановки в (3.82), соответственно (3.60). Воспользуемся полученными результатами и преобразуем уравнения (3.73) и (3.64) с учетом (3.71)

$$\begin{aligned} y'_{12}(x) &= \kappa_2(x)(b_2 - b_1)\cdot y_{13}^2(x)\cdot\left(\sqrt{\alpha_3} - \alpha^2\cdot\sqrt{\alpha_4}\right) \\ &= \kappa_2(x)\cdot\rho\cdot\beta\cdot y_{13}^2(x); \quad (3.87) \\ y'_{13}(x) &= \kappa_2(x)\cdot\rho\cdot y_{12}(x)\cdot y_{13}. \quad (3.88) \end{aligned}$$

Откуда получим, что

$$\frac{y'_{12}(x)}{y_{13}(x)\cdot\beta} = \frac{y'_{13}(x)}{y_{12}(x)} \tag{3.89}$$

или

$$y_{12}(x) = \sqrt{c_{12}^2 + \beta\cdot(y_{13}^2(x) - c_{13}^2)}. \tag{3.90}$$

Таким образом имеет место (3.56). Подставим найденные выражения для $y_{12}(x)$ (3.56) и $y_{23}(x)$ (3.59) в уравнение для $y'_{13}(x)$ (3.64) получим

$$y'_{13}(x) = \kappa_2(x)\cdot\rho\cdot y_{13}(x)\cdot\sqrt{c_{12}^2 + \beta\cdot(y_{13}^2(x) - c_{13}^2)}, \tag{3.91}$$

или, используя обозначение (3.52)

$$\frac{y'_{13}(x)}{y_{13}(x)\cdot\sqrt{c_{12}^2 + \beta\cdot(y_{13}^2(x) - c_{13}^2)}} = \rho\cdot\kappa_2(x). \tag{3.92}$$

Нетрудно заметить, что (3.92) с учетом обозначений (3.51) и (3.53) принимает вид (3.57). □

**Следствие 3.3.** *В условиях теоремы 3.3 положим* $c_{12} = 0$*, что определяет вид матрицы* $C$ *в* (3.35) *таким образом*

$$iC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ \overline{c_{13}} & \overline{c_{23}} & 0 & 0 \\ \overline{c_{14}} & \overline{c_{24}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Тогда для функций* $y_{12}(\cdot), y_{13}(\cdot)$ *справедливы представления:*

$$y_{12}(x) = c_{13}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\tan(z(x)),\ \beta > 0; \tag{3.93}$$

$$y_{13}(x) = \frac{c_{13}}{\cos(z(x))};\ \beta > 0; \tag{3.94}$$

*или*

$$y_{12}(x) = c_{13} \cdot \sqrt{\beta},\ \beta < 0; \tag{3.95}$$

$$y_{13}(x) = 0; \tag{3.96}$$

*или*

$$y_{12}(x) = c_{13} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \mathrm{th}(z(x)),\ \beta < 0; \tag{3.97}$$

$$y_{13}(x) = \frac{c_{13}}{\mathrm{ch}(z(x))},\ \beta < 0; \tag{3.98}$$

*где*

$$z(x) = c_{13} \cdot \rho \cdot \sqrt{\beta} \cdot K_2(x). \tag{3.99}$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай $\beta > 0$. Из определения функции $F(\cdot)$ и формулы (3.57) следует, что

$$\rho \cdot K_2(x) = F(y_{13}(x)) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int\limits_{c_{13}}^{y_{13}(x)} \frac{du}{u \cdot \sqrt{u^2 - c_{13}^2}}. \tag{3.100}$$

Тогда формула (3.100) примет вид

$$-c_{13}\sqrt{\beta} \cdot \rho \cdot K_2(x) = \arcsin\left|\frac{c_{13}}{y_{13}(x)}\right| - \frac{\pi}{2}.$$

Используя обозначение (3.99), получим

$$-\sin(z(x)) = \sin\left(\arcsin\left|\frac{c_{13}}{y_{13}(x)}\right| - \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$\sin\left(\arcsin\left|\frac{c_{13}}{y_{13}(x)}\right|\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(\arcsin\left|\frac{c_{13}}{y_{13}(x)}\right|\right) \cdot \sin\frac{\pi}{2} =$$
$$-\sqrt{1 - \frac{c_{13}^2}{y_{13}^2(x)}}.$$

Считаем $z(x)$ таким, что $\sin(z(x))$ и $cos(z(x))$ положительны, тогда получим (3.94) Подставляя (3.94) в (3.56) – (3.61) придем к виду (3.93) для $y_{12}(\cdot)$ и соответствующим выражениям для функций $y_{14}(\cdot), y_{23}(\cdot), y_{24}(\cdot), y_{34}(\cdot)$.

В случае $\beta < 0$ в силу неравенства (3.54) получим, что $y_{13}^2(x) - c_{13}^2 < 0$. Таким образом,

$$\rho \cdot K_2(x) = F(y_{13}(x)) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int\limits_{c_{13}}^{y_{13}(x)} \frac{du}{u \cdot \sqrt{c_{13}^2 - u^2}}. \tag{3.101}$$

Откуда следует, что

$$-z(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{c_{13}^2 - u^2} + c_{13}}{y_{13}(x)}\right)$$

или

$$\sqrt{c_{13}^2 - y_{13}^2(x)} = y_{13}(x) \cdot \exp^{-z(x)} - c_{13}.$$

В результате преобразований имеем

$$y_{13}(x)\left(y_{13}(x) \cdot (\exp^{-2z(x)} + 1) - 2 \cdot \exp^{-z(x)} \cdot c_{13}\right) = 0,$$

то есть, либо $y_{13}(x) = 0$, что приведет к решениям (3.95) – (3.96), либо $y_{13}(x) = \dfrac{2c_{13}}{\exp^{z(x)} + \exp^{-z(x)}}$, что соответствует решениям в виде (3.97) и (3.98) $\square$

**Пример 3.4.** Пусть

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i & i \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ -2i & -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ -i & \sqrt{2}i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad b > 0. \tag{3.102}$$

Тогда пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, где $a(x) = \gamma^2(x)$ является решением системы (2.26) тогда и только тогда, когда

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\, tg(2bx) & \dfrac{2}{\cos(2bx)} & \dfrac{1}{\cos(2bx)} \\ -\sqrt{2}\, tg(2bx) & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} \\ -\dfrac{2}{\cos(2bx)} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\cos(2bx)} & \dfrac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.103}$$

## 3.3. Случай кубической зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$

С помощью теоремы 2.3, доказанной в первом разделе, покажем, как найти явный вид матрицы $B(x)$ в случае, когда $r = 4$ и $a(x)$ является полиномом третьей степени от $\gamma(x)$.

**Теорема 3.5.** *Пусть $r = 4$, $\lambda_1, ..., \lambda_4$ – различные действительные числа, такие что $\lambda_3$ и $\lambda_4$ находятся между $\lambda_1$ и $\lambda_2$,*

$$\begin{aligned} \gamma^+ &= diag(\lambda_1, ..., \lambda_4), \\ \sigma_2 &= (b_{jk}^{(0)})_{j,k=1}^4 = i\beta_{jk},\ \beta_{jk} > 0,\ \beta_{jk} \in \mathbb{R}\ \textit{при}\quad j \neq k, \\ b_{jj}^{(0)} &= \beta_1 \lambda_j + \beta_0,\ j \in \{1, \ldots, 4\}, \\ C(x) &= (c_{jk}(x))_{j,k=1}^4,\ \textit{причем}\quad c_{jj} = 0, \\ a(x) &= \kappa(x) \cdot \gamma^3(x), \end{aligned}$$

*где $a(x)$ матрица-функция, а $\kappa(x) \in L^1[0, l]$ –вещественная функция, $x \in [0, l]$, а матрица $B$ такова, что при $j \neq k$,*

$$B(x) = (b_{jk}(x))_{j,k=1}^4 = B^*(x).$$

*Пусть далее*

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_1}},\ \beta_j = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_j - \lambda_1},\ \ j = 3, 4; \tag{3.104}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_4)} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)}{\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}; \tag{3.105}$$

$$\psi(y) = \sqrt{\beta_{12}^2 - \beta_3 \cdot (y^2 - \beta_{13}^2) - \beta_4 \cdot \beta_{14}^2 \cdot \left(\left(\frac{y}{\beta_{13}}\right)^{2\alpha} - 1\right)}; \tag{3.106}$$

$$F(y) = \int\limits_{\beta_{13}}^{y} \frac{dt}{t \cdot \psi(t)} \tag{3.107}$$

*Тогда элементы матрицы $B(x)$ из (2.50) имеют вид*

$$b_{jk}(x) = i \cdot exp^{-i\beta_1 \cdot (\lambda_j^3 - \lambda_k^3) \int\limits_0^x \kappa(t)dt} y_{jk}(x),\ j \neq k, \tag{3.108}$$

*где вещественные функции $y_{jk}(\cdot)$, $j \neq k$, определены равенствами*

$$y_{12}(x) = \psi(y_{13}(x)), \tag{3.109}$$

$$y_{13}(x) = F^{-1}\left(\sqrt{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\int\limits_0^x \kappa(t)dt\right), \tag{3.110}$$

$$y_{14}(x) = \beta_{14}\left(\frac{y_{13}(x)}{\beta_{13}}\right)^{\alpha}, \tag{3.111}$$

$$y_{2j}(x) = \alpha_j \cdot y_{1j}(x), \quad j = 3, 4, \tag{3.112}$$

$$y_{34}(x) = 0, \tag{3.113}$$

$$y_{kj}(\cdot) = y_{jk}(\cdot), \quad j \neq k. \tag{3.114}$$

*Здесь $F^{-1}(\cdot)$ – функция обратная к монотонно возрастающей функции $F(\cdot)$.*

*Доказательство.* Из (2.46) следует соотношение

$$c_{jk}(x) = -\kappa(x) \cdot d_{jk} \cdot b_{jk}(x), \tag{3.115}$$

где $d_{jk} = \dfrac{\lambda_j^3 - \lambda_k^3}{\lambda_j - \lambda_k} = \lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_k + \lambda_k^2$. Подставим выражения (3.115) в (2.47), тогда

$$b'_{jk}(x) = -i\kappa(x) \cdot d_{jk}(b_{jj}^{(0)} - b_{kk}^{(0)}) \cdot b_{jk}(x) -$$
$$i\kappa(x) \cdot \sum_{l=1, l\neq k}^{4} (d_{kl} - d_{jl}) \cdot b_{jl}(x) \cdot b_{lk}(x),$$

где $j \neq k$, а $d_{jk} \cdot (b_{jj}^{(0)} - b_{kk}^{(0)}) = \beta_1 \cdot (\lambda_j^3 - \lambda_k^3)$. Легко видеть, что

$$d_{kl} - d_{jl} = \lambda_k^2 + \lambda_k\lambda_l + \lambda_l^2 - \lambda_j^2 - \lambda_j\lambda_l - \lambda_l^2 = (\lambda_k - \lambda_j)(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l).$$

пусть $b_{jk}(x)$ имеют вид (3.108) тогда

$$\begin{cases} y'_{jk}(x) = \kappa(x) \cdot \displaystyle\sum_{l=1, l\neq j,k}^{4} (d_{kl} - d_{jl}) \cdot y_{jl}(x) \cdot y_{lk}(x), \\ y_{jk}(0) = \beta_{jk}, \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $y_{jk}(x)$ - вещественные и $y_{34}(x) = 0$. Тогда $\beta_{34} = 0$, $y_{jk}(x) = y_{kj}(x)$, при $1 \le j < k \le 4$ и система примет вид

$$y'_{12} = \kappa(x)\cdot(d_{13}-d_{23})\cdot y_{13}\cdot y_{23} + \kappa(x)\cdot(d_{14}-d_{24})\cdot y_{14}\cdot y_{24}; \tag{3.116}$$

$$y'_{13} = \kappa(x)\cdot(d_{23}-d_{12})\cdot y_{12}\cdot y_{23}; \tag{3.117}$$

$$y'_{23} = \kappa(x)\cdot(d_{12}-d_{13})\cdot y_{12}\cdot y_{13}; \tag{3.118}$$

$$y'_{14} = \kappa(x)\cdot(d_{24}-d_{12})\cdot y_{12}\cdot y_{24}; \tag{3.119}$$

$$y'_{24} = \kappa(x)\cdot(d_{12}-d_{14})\cdot y_{12}\cdot y_{14}. \tag{3.120}$$

Из условия $y_{34}(x) = 0$ получим

$$0 = \kappa(x)\cdot(d_{13}-d_{14})\cdot y_{13}\cdot y_{14} + (d_{23}-d_{24})\cdot y_{23}\cdot y_{24}. \tag{3.121}$$

Из (3.117) и (3.118) следует, что

$$(d_{23}-d_{12})(y_{23}^2(x)-\beta_{23}^2) = (d_{12}-d_{13})(y_{13}^2(x)-\beta_{13}^2)$$

или

$$(\lambda_3-\lambda_1)(y_{23}^2(x)-\beta_{23}^2) = (\lambda_2-\lambda_3)(y_{13}^2(x)-\beta_{13}^2).$$

Ограничение на $\lambda_j$, где $j \in \{1,\dots,4\}$, следует из соотношения

$$(\lambda_3-\lambda_1)\cdot\beta_{23}^2 = (\lambda_2-\lambda_3)\cdot\beta_{13}^2,$$

то есть $(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) > 0$, значит $\lambda_3$ находится между $\lambda_1$ и $\lambda_2$, поэтому

$$y_{23}(x) = \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1}}\cdot y_{13}(x)$$

Из (3.119) и (3.120) аналогично следует, что

$$y_{24}(x) = \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}\cdot y_{14}(x)$$

если $(\lambda_4-\lambda_1)\cdot\beta_{24}^2 = (\lambda_2-\lambda_4)\cdot\beta_{14}^2$, значит $\lambda_4$ находится между $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Учитывая (3.104), запишем равенство (3.121) в виде

$$(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\alpha_3\alpha_4(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4))\, y_{13}(x)\cdot y_{14}(x) = 0,$$

причем $\beta_{23} = \alpha_3 \cdot \beta_{13}$, $\beta_{24} = \alpha_4 \cdot \beta_{14}$.
Значит $y_{2j}(x) = \alpha_j \cdot y_{1j}(x)$, где $j = 3, 4$. Из (3.116), (3.117), (3.119) находим

$$y_{12}^2(x) - \beta_{12}^2 = -\beta_3 \cdot (y_{13}^2(x) - \beta_{13}^2) - \beta_4 \cdot (y_{14}^2(x) - \beta_{14}^2) \tag{3.122}$$

Итак, уравнения (3.117) и (3.119) запишутся в форме

$$y'_{13} = \kappa(x) \cdot (d_{23} - d_{12}) \cdot \alpha_3 \cdot y_{12} \cdot y_{13}; \tag{3.123}$$

$$y'_{14} = \kappa(x) \cdot (d_{24} - d_{12}) \cdot \alpha_4 \cdot y_{12} \cdot y_{14}. \tag{3.124}$$

Так как $\dfrac{y'_{14}}{y_{14}} = \dfrac{\alpha_4}{\alpha_3} \cdot \dfrac{(d_{24} - d_{12})}{(d_{23} - d_{12})} \cdot \dfrac{y'_{13}}{y_{13}}$, то обозначив $\alpha = \dfrac{(d_{24} - d_{12}) \cdot \alpha_4}{(d_{23} - d_{12}) \cdot \alpha_3}$, (что эквивалентно (3.105)), будем искать $y_{14}(x)$ (с учетом начальных условий) в виде $y_{14}(x) = \beta_{14} \cdot \left(\dfrac{y_{13}(x)}{\beta_{13}}\right)^{\alpha}$. Подставим в (3.122), получим

$$y_{12}(x) = \psi(y_{13}(x)),$$

где

$$\psi(y_{13}(x)) = \sqrt{\beta_{12}^2 - \beta_3(y_{13}^2(x) - \beta_{13}^2) - \beta_4\beta_{14}^2\left(\left(\frac{y_{13}(x)}{\beta_{13}}\right)^{2\alpha} - 1\right)}$$

Используя (3.123), находим

$$y'_{13}(x) = \kappa(x) \cdot \psi(y_{13}(x)) \cdot y_{13}(x)$$

Так как $F(y)$ представлен в виде (3.107), то

$$y_{13}(x) = F^{-1}\left(\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \int\limits_0^x \kappa(t)dt\right)$$

Таким образом в случае $r = 4$ и кубической зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$ элементы матрицы $B(x)$ выражаются в терминах эллиптических функций. □

**Следствие 3.4.** *В условиях теоремы 3.5 положим* $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = -b$, $\lambda_4 = b$, *где* $a, b \in R$, *и выполняется условие*

$0 < a < 3b$, *кроме того* $\beta_{13}^2 = \dfrac{1}{2}$, $\beta_{14}^2 = 2$, $\beta_{12}^2 = \dfrac{3ab - a^2}{a^2 - b^2}$, *тогда решения* $y_{jk}(x)$, *при* $j \neq k$ (3.109)— (3.112) *имеют вид,*

$$y_{12}(x) = -i\sqrt{\frac{2a}{a+b}} \cdot \frac{cn(z(x)+N,k) \cdot dn(z(x)+N,k)}{sn(z(x)+N)}, \qquad (3.125)$$

$$y_{13}(x) = sn(z(x)+N,k), \qquad (3.126)$$

$$y_{14}(x) = \frac{1}{sn(z(x)+N,k)}, \qquad (3.127)$$

$$y_{23}(x) = k \cdot sn(z(x)+N,k), \qquad (3.128)$$

$$y_{24}(x) = \frac{1}{k \cdot sn(z(x)+N,k)}, \qquad (3.129)$$

*где*

$$k^2 = \frac{a+b}{a-b}, \quad z(x) = -i\sqrt{2a \cdot (a-b)} \cdot \int\limits_0^x \kappa(t)dt, \qquad (3.130)$$

$$N = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}}. \qquad (3.131)$$

*Доказательство.* Из (3.110) получим, что

$$\sqrt{(a-b)(a+b)} \int\limits_0^x \kappa(t)dt = F(y_{13}(x)), \qquad (3.132)$$

применив (3.106) и (3.107), учитывая, что при заданном выборе $\lambda_j$, где $j \in \{1, \ldots, 4\}$,, значение $\alpha = -1$ (это видно из (3.105)) придем к

$$F(y_{13}(x)) = \int\limits_{\beta_{13}}^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2a}{b-a} \cdot t^4 + \frac{4a^2}{a^2-b^2} \cdot t^2 - \frac{2a}{b+a}}} =$$

$$i\sqrt{\frac{a+b}{2a}} \cdot \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b} \cdot t^4 + \frac{2a}{a-b} \cdot t^2 + 1}} =$$

$$i\sqrt{\frac{a+b}{2a}} \cdot \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1 - \frac{a+b}{a-b} \cdot t^2\right)}}.$$

Теперь соотношение (3.132) можно представить в виде

$$-i\sqrt{2a\cdot(a-b)}\cdot\int\limits_0^x \varkappa(t)dt = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\dfrac{a+b}{a-b}\cdot t^2\right)}},$$

то есть, учитывая обозначения (3.130)

$$z(x) = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2\cdot t^2)}}$$

или

$$z(x) + \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2\cdot t^2)}} = \int\limits_0^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2\cdot t^2)}}.$$

В силу обозначения и определения эллиптических функций, получим

$$z(x) + N = \int\limits_0^{y_{13}(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2\cdot t^2)}},$$

а именно,

$$y_{13}(x) = sn(z(x)+N,k).$$

Из (3.109) и (3.106) получим

$$y_{12}(x) = \frac{1}{sn(z(x)+N)}\cdot$$
$$-\,i\sqrt{\frac{2a}{a+b}}\sqrt{(1-sn^2(z(x)+N)(1-k^2\cdot sn^2(z(x)+N))}$$
$$= -i\sqrt{\frac{2a}{a+b}}\cdot\frac{cn(z(x)+N,k)\cdot dn(z(x)+N,k)}{sn(z(x)+N)}.$$

Подставляя значения $\lambda_j$, при $j=1,...,4$, получим, что $\alpha_3 = k$, а $\alpha_4 = \frac{1}{k}$, тогда из (3.112) получим, что $y_{23}(x) = \alpha_3\cdot y_{13}(x) = k\cdot sn(z(x)+N,k)$, а $y_{24}(x) = \alpha_4\cdot y_{14}(x) = \dfrac{1}{k\cdot sn(z(x)+N,k)}$. □

## 3.4. Выводы к разделу 3

1. Дано описание всех решений системы типа Лакса при условии, что $r = 3$ и матрицы $\sigma_2$, $\gamma^+$ имеют простой спектр. Получен явный вид решения в терминах обратного эллиптического интеграла (теорема 3.1 и замечание 3.1), которое в частном случае явно выражается через эллиптические функции Якоби (следствие 3.2 и пример 3.2).
2. При квадратичной зависимости матрицы $a(x)$ от $\gamma(x)$ ($r = 4$) получены решения системы (2.26) (теорема 3.3) В частном случае решения допускают представления в терминах тригонометрических и гиперболических функций (следствие 3.3 и пример 3.4).
3. В случае кубической зависимости матрицы $a(x)$ от $\gamma(x)$ и $r = 4$ найдены решения (2.26) (теорема 3.5), которые при специальном выборе $\gamma^+ = diag(\lambda_1, ..., \lambda_4)$ допускают представления с помощью эллиптических функций Якоби(следствие 3.4).

# РАЗДЕЛ 4. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

В данном разделе предлагается иной подход изучения системы (2.26), который основан на описании поведения собственных вектор-функций $\{h_k(x)\}_1^r$ матрицы $a(x)$, причем спектр $a(x)$ - простой. В случае $\alpha(x) = 0$ и $J = I$ для $\{h_k(x)\}_1^r$ получена система уравнений (4.9) подраздел 4.1. Весь этот раздел посвящен анализу системы (4.9) в случае $r = 3$. В подразделе 4.2 найдены решения системы уравнений (4.10) в том случае, когда матрица $\sigma_2$ действует на базис $\{h_k(x)\}_1^r$ и задана формулами (4.11). Дано описание всех таких решений (теоремы 4.1, 4.2) в терминах тригонометрических и гиперболических функций, аргументы которых выражаются через параметры матрицы $\sigma_2$. Подраздел 4.3 посвящен анализу системы уравнений (4.9) в предположении, что $\sigma_2$ на $\{h_k(x)\}_1^r$ действует по правилу (4.27). Основным результатом здесь являются теоремы 4.3 и 4.4, в которых получен явный вид собственных вектор-функций $\{h_k(x)\}_1^r$. В подразделе 4.4 исследуется основная система уравнений (4.10) когда $r = 3$ и матрица $a(x)$ имеет одно кратное собственное значение. В подразделе 4.5 найдены специальные решения системы.

## 4.1. Собственные значения и собственные векторы матрицы $a(x)$ в случае простого спектра.

Исследуем разрешимость системы условий сплетаемости в общем случае, когда $\dim E = r < \infty$ , для $a(x) \geq 0$, причем $a(x)$ гладкая матрица, имеет простой спектр, где $J = J^* = J^{-1}$, а $\alpha(x)$ - вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0, l]$ $(0 < l < \infty)$. Система условий сплетаемости (1.22) в случае $\alpha(x) = 0$, и $J = I$ примет вид (4.1):

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i\,[a(x), \sigma_2]\,; \\ [a(x), \gamma(x)] = 0, \quad \gamma(x) = \gamma^+. \end{cases} \tag{4.1}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (4.1), получим

$$\begin{cases} \gamma(x) = i\,[A(x), \sigma_2] + \gamma_0; \\ [A'(x), \gamma(x)] = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $A(x) = \int\limits_0^x a(t)dt$. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (4.1) сводится к нахождению матрицы-функции $A(x)$ из нелинейного уравнения

$$[A'(x), i\,[A(x), \sigma_2] + \gamma_0] = 0. \tag{4.3}$$

То есть необходимо найти матрицу $A(x)$ как решение нелинейного уравнения (4.3), а затем определить $\gamma(x)$ из (4.2). Пусть $a(x)$ гладкая матрица с простым спектром. Выберем ортонормированный базис $\{h_k(x)\}_1^r$ ( $h_k(x) \perp h_s(x)$, $(k \neq s)\,, \|h_k(x)\| = 1$, $(1 \leq k, s \leq n)$) так, чтобы $a(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x)$, где $\mu_k(x)$ - собственные значения матрицы $a(x)$ и $\mu_k(x) \neq \mu_s(x)(k \neq s)$. Описание матрицы-функции $a(x)$ эквивалентно характеризации двух наборов: набора собственных функций $\{h_k(x)\}_1^r$ и набора собственных чисел $\mu_k(x)$.

Введем обозначение

$$\langle \sigma_2 h_k(x), h_s(x) \rangle = \beta_{sk}(x), \quad (1 \leq k, s \leq n) \tag{4.4}$$

тогда

$$\sigma_2 h_k(x) = \sum_{s=1}^{n} \beta_{sk}(x) h_k(x).$$

Нетрудно заметить, что

$$\gamma'(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\mu_k(x)\sigma_2 h_k(x) =$$

$$= i\left(a(x) - \mu_k(x)\right)\sigma_2 h_k(x) = i\sum_{s=1}^{n} \beta_{sk}(x)\left(a(x) - \mu_k(x)\right) h_s(x) =$$

$$i\sum_{s\neq k} \beta_{sk}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right) h_s(x). \tag{4.5}$$

**Лемма 4.1.** *Если матрица $a(x)$ имеет простой спектр, то векторы $\gamma(x)h_k(x)$ являются ее собственными векторами, а собственные значения оператора $\gamma(x)$, не зависят от $x$.*

*Доказательство.* В виду того что $\gamma(x)$ коммутирует с $a(x)$, $\gamma(x)$ является функцией от $a(x)$, то есть $\gamma(x) = \varphi(a(x))$, значит, имеет место равенство

$$\gamma(x)h_k(x) = \varphi(\mu_k(x))h_k(x),$$

Учитывая второе уравнение (4.1), имеем:

$$a(x)\gamma(x)h_k(x) = \gamma(x)a(x)h_k(x) = \gamma(x)\mu_k(x)h_k(x) = \mu_k(x)\gamma(x)h_k(x).$$

Итак, в случае простого спектра матрицы $a(x)$ векторы $\gamma(x)h_k(x)$ являются собственными векторами этой матрицы, пусть

$$\gamma(x)h_k(x) = \xi_k(x)h_k(x). \tag{4.6}$$

Предположим, что собственные значения $\xi_k$ оператора $\gamma(x)$ зависят от $x$, продифференцируем соотношение (4.6),

$$\gamma'(x)h_k(x) + \gamma(x)h_k'(x) = \xi_k(x)h_k'(x) + \xi_k'(x)h_k(x). \tag{4.7}$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $h_k(x)$, учитывая ортонормированность базиса и (4.5), получим:

$$\left\langle i\sum_{s\neq k}\beta_{sk}(x)\left(\mu_s(x)-\mu_k(x)\right)h_s(x), h_k(x)\right\rangle =$$
$$= \left\langle(\xi_k(x)-\gamma(x)\right)\left(h_k'(x), h_k(x)\right\rangle + \xi_k'(x)\left\langle h_k(x), h_k(x)\right\rangle.$$

$$0 = \left\langle(h_k'(x), \left(\xi_k(x)-\gamma(x)\right)h_k(x)\right\rangle + \xi_k'(x)\left\|h_k(x)\right\|^2;$$

В силу самосопряженности $\gamma(x)$, вещественности $\xi_k(x)$ и (4.6) так как $\|h_k(x)\| \neq 0$, значит $\xi_k'(x) = 0$, следовательно, $\xi_k$ не зависят от $x$. □

В условиях леммы (4.1), продифференцируем соотношение (4.6)

$$\gamma'(x)h_k(x) = (\xi_k - \gamma(x))\, h'_k(x),$$

Воспользуемся (4.4), получим:

$$i\sum_{s\neq k}\beta_{sk}(x)\,(\mu_s(x)-\mu_k(x))\,h_s(x) = (\xi_k - \gamma(x))\,h'_k(x). \tag{4.8}$$

Упростим выражение

$$(\xi_k - \gamma(x))\,h_s(x) = \xi_k h_s(x) - \gamma(x)h_s(x) = (\xi_k - \xi_s)\,h_s(x).$$

$$h'_k(x) = i\sum_{s\neq k}\beta_{sk}(x)\frac{\mu_s(x)-\mu_k(x)}{\xi_k-\xi_s}h_s(x). \tag{4.9}$$

**Теорема 4.1.** *Пусть матрица-функция $a(x)$ размера $[r\times r]$ имеет простой спектр $\sigma(a(x)) = \{\mu_k(x), 1\leq k\leq r\}$, а соответствующие собственные вектора $h_k(x)$ ($a(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x)$). Если $\gamma(x)$ является решением системы уравнений* (4.1), *а $\xi_k$ ее собственные числа ( независящие от $x$, лемма* (4.1)*), то собственные функции $\{h_k(x)\}_1^r$ являются решениями системы уравнений* (4.9), *где $\beta_{sk}(x)$ имеют вид* (4.4).

**Лемма 4.2.** *Вектор-функции $h'_k(x)$ из* (4.9) *не имеют особенностей при $\xi_k = \xi_s$.*

*Доказательство.* Умножим скалярно обе части равенства (4.8) на $h_s(x)$:

$$\left\langle i\sum_{p\neq k}\beta_{pk}(x)(\mu_p(x)-\mu_k(x))h_p(x), h_s(x)\right\rangle = \left\langle(\xi_k-\gamma(x))\,h'_k(x), h_s(x)\right\rangle.$$

$$\begin{aligned} i\beta_{sk}(x)(\mu_s(x)-\mu_k(x))\,\|h_s(x)\|^2 &= \langle h'_k(x), (\xi_k-\gamma(x))h_s(x)\rangle = \\ &= \langle h'_k(x), (\xi_k-\xi_s)h_s(x)\rangle = (\xi_k-\xi_s)\,\langle h'_k(x), h_s(x)\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае $\xi_k = \xi_s$, получим $\beta_{sk}(x) = 0$, поэтому мы вправе писать (4.9) $\square$

В данном разделе мы будем изучать случай $r = 3$. Пусть $dimE = 3$, тогда система (4.1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = i\left(\beta_{21}(x)d(x)h_2(x) + \beta_{31}(x)g(x)h_3(x)\right); \\ h_2'(x) = i\left(\beta_{12}(x)d(x)h_1(x) + \beta_{32}(x)f(x)h_3(x)\right); \\ h_3'(x) = i\left(\beta_{13}(x)g(x)h_1(x) + \beta_{23}(x)f(x)h_2(x)\right); \\ h_i(0) = h_0,\ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.10}$$

где $d(x) = \dfrac{\mu_2(x) - \mu_1(x)}{\xi_1 - \xi_2}$, $g(x) = \dfrac{\mu_3(x) - \mu_2(x)}{\xi_2 - \xi_3}$, $f(x) = \dfrac{\mu_1(x) - \mu_3(x)}{\xi_3 - \xi_1}$.

## 4.2. Решение системы уравнений (4.10), когда $r = 3$ (случай 1).

Предположим, что оператор $\sigma_2$ действует на базисные вектора $\{h_k(x)\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_1(x) = \psi(x)h_1(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \nu(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \overline{\nu}(x)h_2(x), \end{cases} \tag{4.11}$$

где $\psi(x)$- вещественная функция, а $\nu(x)$ - комплексно-значная функция.

В этом случае, в силу ортонормированности базиса и (4.4), имеем: $\beta_{12}(x) = \beta_{21}(x) = \beta_{13}(x) = \beta_{31}(x) = 0$, $\beta_{32}(x) = \nu(x)$, $\beta_{23}(x) = \overline{\nu}(x)$. Обозначим $g(x)\nu(x) = c(x)$. Тогда система (4.10) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = \quad 0, \\ h_2'(x) = \quad ic(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = \quad i\overline{c}(x)h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0,\ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.12}$$

Отсюда следует, что $h_1(x) = h_1^0$.

**Теорема 4.2.** *Если $c(x) = a(x) + ib(x)$ комплекснозначная функция, где $a(x),\ b(x) \in \mathbb{R}$ линейно зависимы, то есть найдутся такие числа $\lambda$ и*

*$\mu$, что $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$ ($\lambda\mu \neq 0$), система уравнений* (4.12) *имеет единственное решение*

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0; \\ h_2(x) = h_2^0 \cos\varphi(x) + h_3^0 \dfrac{-b(x) + ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \sin\varphi(x), \\ h_3(x) = h_3^0 \cos\varphi(x) + h_2^0 \dfrac{b(x) + ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \sin\varphi(x), \end{cases} \tag{4.13}$$

*где* $\varphi(x) = \int\limits_0^x \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}dt.$

**Замечание 4.1.** Из условия $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$ ($\lambda\mu \neq 0$) следует, что выражение $h_2^0 \dfrac{b(x) + ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}$ не зависит от x, так как может быть выражено через $\lambda$ и $\mu$ формулой $h_2^0 \dfrac{-\lambda + i\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$.

Кроме того, $\varphi(x) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \displaystyle\int_0^x \frac{a(t)}{\mu} dt.$

*Доказательство.* Рассмотрим общий случай, когда $c(x) = a(x) + ib(x)$, где $a(x),\ b(x) \in \mathbb{R}$ линейно зависимы. Исходная система (4.12) примет вид

$$\begin{cases} h_2'(x) = (-b(x) + ia(x))h_3(x),\ h_2(0) = h_2^0; \\ h_3'(x) = \ (b(x) + ia(x))h_2(x), \quad h_3(0) = h_3^0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Из второго уравнения системы (4.14) получим

$$h_2(x) = \frac{1}{b(x) + ia(x)} h_3'(x). \tag{4.15}$$

Продифференцируем полученное соотношение

$$h_3''(x) \frac{1}{b(x) + ia(x)} - \frac{(b(x) + ia(x))'}{(b(x) + ia(x))^2} h_3'(x) = (-b(x) + ia(x))h_3(x),$$

и запишем его в следующей форме:

$$h_3''(x) - \frac{(b(x) + ia(x))'}{b(x) + ia(x)} h_3'(x) + (b^2(x) + a^2(x))h_3(x) = 0. \tag{4.16}$$

По условию теоремы $a(x),\ b(x) \in \mathbb{R}$ линейно зависимы, то есть найдутся такие ненулевые числа $\lambda$ и $\mu$, что $\lambda a(x) + \mu b(x) \equiv 0$. Обозначим $k = -\dfrac{\lambda}{\mu}$, тогда $b(x) = ka(x)$. Подставим в (4.16), придем к уравнению

$$h_3''(x) - \frac{a'(x)}{a(x)} h_3'(x) + a^2(x)(1+k^2)h_3(x) = 0. \tag{4.17}$$

Сделав замену $h_3(x) = \eta(\zeta)$, где $\zeta = \int\limits_0^x a(t)dt$, получим

$$\eta''(\zeta) + (1+k^2)\eta(\zeta) = 0,$$

решением которого является

$$\eta(\zeta) = C_1 \cos\left(\zeta\sqrt{1+k^2}\right) + C_2 \sin\left(\zeta\sqrt{1+k^2}\right).$$

Соответственно, вернувшись к исходной переменной, находим

$$h_3(x) = C_1 \cos\varphi(x) + C_2 \sin\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \sqrt{1+k^2}\int\limits_0^x\ a(t)dt$.

Тогда решение имеет вид

$$h_3(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x\ \frac{a(t)}{\mu}dt\right) + \\ C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x \frac{a(t)}{\mu}dt\right) \tag{4.18}$$

или

$$h_3(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x -\frac{b(t)}{\lambda}dt\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x\ -\frac{b(t)}{\lambda}dt\right).$$

Учитывая начальные условия, получим, что $C_1 = h_3^0$. Из (4.15) находим представление для $h_2(x)$

$$h_2(x) = \frac{k-i}{\sqrt{1+k^2}}\left(-h_3^0 \sin\varphi(x) + C_2\cos\varphi(x)\right), \tag{4.19}$$

где $\varphi(x)=\sqrt{1+k^2}\int\limits_0^x a(t)dt.$

Из начальных условий найдем выражение для

$$C_2=h_2^0\frac{k+i}{\sqrt{1+k^2}}=h_2^0\frac{-\lambda+i\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}=h_2^0\frac{b(x)+ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}},$$

то есть

$$h_2(x)=h_2^0\cos\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x\frac{a(t)}{\mu}dt\right)+$$
$$+h_3^0\frac{\lambda+i\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin\left(\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\int\limits_0^x\frac{a(t)}{\mu}dt\right)\quad(4.20)$$

Тогда решение системы уравнений (4.12) имеет вид (4.13). □

**Теорема 4.3.** *Если $c(x)=a(x)+ib(x)$ комплекснозначная функция, где $a(x),\ b(x)\in\mathbb{R}$ таковы, что*

$$a'(x)b(x)-a(x)b'(x)=k\sqrt{(a^2(x)+b^2(x))^3},$$

*где $k-const$, то система уравнений (4.12) имеет единственное решение*

$$\begin{cases} h_1(x)=h_1^0;\\ h_2(x)=\dfrac{b(x)-ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}\sqrt{\lambda_1}\left(B_1\exp^{\varphi(x)}-B_2\exp^{-\varphi(x)}\right)+\\ \qquad+\dfrac{b(x)-ia(x)}{\sqrt{a^2(x)+b^2(x)}}\sqrt{\lambda_2}\left(B_3\exp^{\psi(x)}-B_4\exp^{-\psi(x)}\right);\\ h_3(x)=B_1\exp^{\varphi(x)}+B_2\exp^{-\varphi(x)}+B_3\exp^{\psi(x)}+B_4\exp^{-\psi(x)}, \end{cases}\quad(4.21)$$

*где $B_k\in\mathbb{C}$, $(k=\overline{1,4})$, определяются из начальных условий, $\varphi(x)=\sqrt{\lambda_1}\int\limits_0^x\sqrt{a^2(p)+b^2(p)}\,dp$, $\psi(x)=\sqrt{\lambda_2}\int\limits_0^x\sqrt{a^2(p)+b^2(p)}\,dp$, а $\lambda_i$ $(i=\overline{1,2})$, корни уравнения $\lambda^2=\dfrac{-(2+k^2)\pm\sqrt{k^2(k^2+4)}}{2}$.*

**Замечание 4.2.** В случае $B_1=B_2$, а $B_4=-B_3$, решения системы приобретают вид:

$$h_1(x) = h_1^0;$$
$$h_2(x) = h_2^0 \cosh \psi(x) + h_3^0 \frac{b(x) - ia(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \sqrt{\lambda_1} \sinh \varphi(x);$$
$$h_3(x) = h_3^0 \cosh \varphi(x) + h_2^0 \frac{b(x) + ia(x)}{\sqrt{\lambda_2}\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}} \sinh \psi(x).$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда $c(x) = a(x) + ib(x)$. Исходная система (4.12) примет вид (4.14), продифференцировав второе уравнение которой, придем к (4.16).

Пусть $h_3(x)$ представляется в виде $h_3(x) = z(x) + iy(x)$, где $z(x),\ y(x) \in \mathbb{R}$. Приравняв вещественные и мнимые части (4.16), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'' - \dfrac{1}{2}\dfrac{(a^2(x) + b^2(x))'}{a^2(x) + b^2(x)} z' + \dfrac{(a'(x)b(x) - a(x)b'(x))}{a^2(x) + b^2(x)} y' + \\ +(a^2(x) + b^2(x))z = 0; \\ y'' - \dfrac{1}{2}\dfrac{(a^2(x) + b^2(x))'}{a^2(x) + b^2(x)} y' - \dfrac{(a'(x)b(x) - a(x)b'(x))}{a^2(x) + b^2(x)} z' + \\ +(a^2(x) + b^2(x))y = 0; \end{cases} \tag{4.22}$$

В обозначениях $t(x) = \sqrt{a^2(x) + b^2(x)}$, а $s(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ система (4.22) примет вид

$$\begin{cases} z'' - \dfrac{t'(x)}{t(x)} z' + \dfrac{s'(x)}{1 + s^2(x)} y' + t^2(x) z = 0; \\ y'' - \dfrac{t'(x)}{t(x)} y' - \dfrac{s'(x)}{1 + s^2(x)} z' + t^2(x) y = 0; \end{cases} \tag{4.23}$$

Преобразуем эту систему

$$\begin{cases} \left(\dfrac{z'}{t(x)}\right)' + t^2(x) z = -\dfrac{s'(x)}{1 + s^2(x)} y'; \\ \left(\dfrac{y'}{t(x)}\right)' + t^2(x) y = \dfrac{s'(x)}{1 + s^2(x)} z'. \end{cases}$$

Выполним подстановку $y = \eta(\xi) = \eta\left(\int\limits_0^x t(p)\, dp\right)$, а

$z = \zeta(\xi) = \zeta\left(\int\limits_0^x t(p)\,dp\right)$, которая приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \zeta'' + \zeta = -\dfrac{s'(x)}{(1+s^2(x))t(x)}\eta'; \\ \eta'' + \eta = \dfrac{s'(x)}{(1+s^2(x))t(x)}\zeta'. \end{cases} \tag{4.24}$$

По условию теоремы $\dfrac{s'(x)}{(1+s^2(x))t(x)} = k$, где $k - const$, то есть

$$\begin{cases} \zeta'' + \zeta = -k\eta'; \\ \eta'' + \eta = k\zeta'. \end{cases} \tag{4.25}$$

Введем в рассмотрение взаимно перестановочные операторы: оператор дифференцирования $D$ и линейный оператор $L$, который действует на переменную $\eta$ следующим образом $L\eta = \eta'' + \eta$. Тогда (4.24) запишется так:

$$\begin{cases} L\zeta = -kD\eta; \\ L\eta = kD\zeta. \end{cases}$$

Применив оператор $L$ к каждому из уравнений системы, получим

$$\begin{cases} \left(L^2 + k^2D^2\right)\zeta = 0; \\ \left(L^2 - k^2D^2\right)\eta = 0. \end{cases}$$

Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \zeta^{(4)} + (2+k^2)\zeta'' + \zeta = 0; \\ \eta^{(4)} + (2+k^2)\eta'' + \eta = 0 \end{cases}$$

и решения вида

$$\zeta(\xi) = C_1 \exp^{\sqrt{\lambda_1}\xi} + C_2 \exp^{-\sqrt{\lambda_1}\xi} + C_3 \exp^{\sqrt{\lambda_2}\xi} + C_4 \exp^{-\sqrt{\lambda_2}\xi}, \tag{4.26}$$

где $\lambda^2 = \dfrac{-(2+k^2) \pm \sqrt{k^2(k^2+4)}}{2}$.

Выражение для $\eta(\xi)$ аналогично (4.26). Тогда, возвращаясь к исходным переменным, и в виду представления $h_3(x) = z(x) + iy(x)$, получим

$$h_3(x) = B_1 \exp^{\varphi(x)} + B_2 \exp^{-\varphi(x)} + B_3 \exp^{\psi(x)} + B_4 \exp^{-\psi(x)},$$

где $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,4}$, $\varphi(x) = \sqrt{\lambda_1}\int\limits_0^x t(p)\,dp$, а $\psi(x) = \sqrt{\lambda_2}\int\limits_0^x t(p)\,dp$

Из (4.14) найдем выражение для $h_2(x)$.

$$\begin{aligned}h_2(x) = \frac{(h_3(x))'(b(x)-ia(x))}{b^2(x)+a^2(x)} = \\ = \frac{b(x)-ia(x)}{\sqrt{b^2(x)+a^2(x)}}\sqrt{\lambda_1}\left(B_1\exp^{\varphi(x)} - B_2\exp^{-\varphi(x)}\right) + \\ + \frac{b(x)-ia(x)}{\sqrt{b^2(x)+a^2(x)}}\sqrt{\lambda_2}\left(B_3\exp^{\psi(x)} - B_4\exp^{-\psi(x)}\right)\end{aligned}$$

Подставив начальные условия, можно определить константы $B_k \in \mathbb{C}$, $(k = \overline{1,4})$. □

## 4.3. Решение системы уравнений (4.10), когда $r = 3$ (случай 2).

Предположим, что оператор $\sigma_2$ действует на базисные вектора $\{h_k\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{cases}\sigma_2 h_1(x) = \psi(x)h_1(x) + \rho(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \qquad\qquad \nu(x)h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \overline{\rho}(x)h_1(x) + \overline{\nu}(x)h_2(x),\end{cases} \tag{4.27}$$

где $\psi(x)$ - вещественная функция, а $\nu(x)$, $\mu(x)$ - комплексно-значные функции. В этом случае, в силу ортонормированности базисных векторов и (4.4), получим:

$$\begin{cases}\beta_{12}(x) = 0 \\ \beta_{21}(x) = 0 \\ \beta_{13}(x) = \overline{\rho}(x)\|h_1(x)\|^2, \\ \beta_{31}(x) = \rho(x)\|h_3(x)\|^2, \\ \beta_{23}(x) = \overline{\nu}(x)\|h_2(x)\|^2 \\ \beta_{32}(x) = \nu(x)\|h_3(x)\|^2.\end{cases}$$

Таким образом, система (4.10) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = i\rho(x)f(x)h_3(x), \\ h_2'(x) = i\nu(x)g(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = i\overline{\rho}(x)f(x)h_1(x) + i\overline{\nu}(x)g(x)h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.28}$$

Пусть

$$\nu(x)g(x) = c(x); \ \rho(x)f(x) = k(x), \tag{4.29}$$

тогда система уравнений (4.28) запишется в следующей форме:

$$\begin{cases} h_1'(x) = ik(x)h_3(x), \\ h_2'(x) = ic(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = i\overline{k}(x)h_1(x) + i\overline{c}(x)h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.30}$$

**Лемма 4.3.** *Если $c$, $k$ - константы, то система уравнений* (4.28) *имеет единственное решение:*

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0 + \dfrac{ikh_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + \\ \qquad + \dfrac{k^2h_1^0 + ckh_2^0}{k^2+c^2}\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x - 1), \\ h_2(x) = h_2^0 + \dfrac{ich_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + \\ \qquad + \dfrac{ckh_1^0 + c^2h_2^0}{k^2+c^2}\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x - 1), \\ h_3(x) = h_3^0\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + \dfrac{ikh_1^0 + ich_2^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x). \end{cases} \tag{4.31}$$

*Доказательство.* Если $c$, $k$ - константы, тогда система уравнений (4.30) примет вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = ikh_3(x), \\ h_2'(x) = ich_3(x), \\ h_3'(x) = ikh_1(x) + ich_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.32}$$

Продифференцируем третье уравнение системы (4.32), получим

$$h_3''(x) = ikh_1'(x) + ich_2'(x) = -k^2h_3(x) - c^2h_3(x)$$

$$h_3''(x) + (k^2 + c^2)h_3(x) = 0$$

Решением этого уравнения будет

$$h_3(x) = C_1\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + C_2\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) \tag{4.33}$$

Из начальных условий легко определить $C_1 = h_3^0$. Подставив полученное решение в первые два уравнения системы (4.32), определим решения $h_1(x)$ и $h_2(x)$

$$h_1'(x) = ikh_3^0\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + ikC_2\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x)$$

$$h_1(x) = \frac{ikh_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - \frac{ikC_2}{\sqrt{k^2+c^2}}\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + C_3;$$

$$h_2(x) = \frac{ich_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - \frac{icC_2}{\sqrt{k^2+c^2}}\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + C_4;$$

Используя начальные условия $h_1(x) = h_1^0$, $h_2(x) = h_2^0$, получим, что

$$C_3 = h_1^0 + \frac{ikC_2}{\sqrt{k^2+c^2}}$$

$$C_4 = h_2^0 + \frac{ikC_2}{\sqrt{k^2+c^2}}$$

Соответственно, решения $h_1(x)$ и $h_2(x)$ примут вид

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0 + \dfrac{ikh_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - \\ \qquad - \dfrac{ikC_2}{\sqrt{k^2+c^2}}(\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - 1); \\ h_2(x) = h_2^0 + \dfrac{ich_3^0}{\sqrt{k^2+c^2}}\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - \\ \qquad - \dfrac{icC_2}{\sqrt{k^2+c^2}}(\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - 1); \end{cases} \tag{4.34}$$

Найдем выражение для $C_2$, применив (4.33) к третьему уравнению системы (4.32)

$$h_3'(x) = ikh_1^0 + ich_2^0 - \sqrt{k^2+c^2}h_3^0\sin(\sqrt{k^2+c^2}\,x) + \\ + C_2\sqrt{k^2+c^2}(\cos(\sqrt{k^2+c^2}\,x) - 1),$$

то есть,

$$C_2 = \frac{ikh_1^0 + ich_2^0}{\sqrt{k^2 + c^2}}. \tag{4.35}$$

При подстановке (4.35) в (4.33) и (4.34), получим (4.31) $\square$

Пусть в системе (4.28) $c(x) = a(x) + ib(x)$, а $k(x) = m(x) + in(x)$, где $a(x), b(x), m(x), n(x) \in \mathbb{R}$. Считаем, что $c(x) = a(x)$, $k(x) = m(x)$, тогда система (4.30) примет вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = im(x)h_3(x), \\ h_2'(x) = ia(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = im(x)h_1(x) + ia(x)h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.36}$$

а сопряженная ей система, соответственно:

$$\begin{cases} \overline{h_1'(x)} = -im(x)\overline{h_3(x)}, \\ \overline{h_2'(x)} = -ia(x)\overline{h_3(x)}, \\ \overline{h_3'(x)} = -im(x)\overline{h_1(x)} - ia(x)\overline{h_2(x)}, \\ h_i(0) = h_i^0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.37}$$

Используя системы (4.36) и (4.37), получим следующие выражения для $im(x)$, $ia(x)$.

$$im(x) = \frac{h_1'(x)}{h_3(x)} = -\frac{\overline{h_1'(x)}}{\overline{h_3(x)}}$$

$$ia(x) = \frac{h_2'(x)}{h_3(x)} = -\frac{\overline{h_2'(x)}}{\overline{h_3(x)}}$$

Подставив соответствующие выражения, в третье уравнение системы (4.36) и (4.37) , получим соотношения,

$$h_3'(x) \cdot \overline{h_3(x)} = -\overline{h_1'(x)} \cdot h_1(x) - \overline{h_2'(x)} \cdot h_2(x)$$

$$\overline{h_3'(x)} \cdot h_3(x) = -h_1'(x) \cdot \overline{h_1(x)} - h_2'(x) \cdot \overline{h_2(x)},$$

складывая которые, приходим к

$$h_3'(x) \cdot \overline{h_3(x)} + \overline{h_3'(x)} \cdot h_3(x) =$$

$$- \left( \overline{h_1'(x)} \cdot h_1(x) + h_1'(x) \cdot \overline{h_1(x)} + \overline{h_2'(x)} \cdot h_2(x) + h_2'(x) \cdot \overline{h_2(x)} \right).$$

Таким образом, получим что

$$\left( h_3(x) \cdot \overline{h_3(x)} \right)' + \left( h_1(x) \cdot \overline{h_1(x)} \right)' + \left( h_2(x) \cdot \overline{h_2(x)} \right)' = 0,$$

или

$$\|h_1(x)\|^2 + \|h_2(x)\|^2 + \|h_3(x)\|^2 = const \tag{4.38}$$

итак, доказана

**Лемма 4.4.** *Для решений системы уравнений* (4.36) *выполняется соотношение* (4.38).

Предположим, что $a(x)$, $m(x)$ линейно зависимы, причем $a(x) = k \cdot m(x)$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, тогда система (4.36) примет вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = im(x)h_3(x), \\ h_2'(x) = ikm(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = im(x)(h_1(x) + kh_2(x)), \\ h_i(0) = h_i^0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.39}$$

**Лемма 4.5.** *Если $k \in \mathbb{R}$, то система уравнений* (4.39) *имеет единственное решение:*

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0 \cos\varphi(x) + \dfrac{ih_3^0}{\sqrt{1+k^2}} \sin\varphi(x) \\ h_2(x) = h_2^0 \cos\varphi(x) + \dfrac{ikh_3^0}{\sqrt{1+k^2}} \sin\varphi(x) \\ h_3(x) = h_3^0 \cos\varphi(x) + ih_1^0\sqrt{1+k^2} \sin\varphi(x), \end{cases} \tag{4.40}$$

*где* $\varphi(x) = \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt$

*Доказательство.* Продифференцировав еще раз соотношение $h_3'(x) = im(x)(h_1(x) + kh_2(x))$, получим уравнение

$$h_3''(x) - \frac{m'(x)}{m(x)} h_3'(x) + m^2(x)(1+k^2)h_3(x) = 0,$$

решив которое, придем к

$$h_3(x) = h_3^0 \cos \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt + C_2 \sin \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt$$

Подставив его в выражение для $h_1'(x)$ системы (4.39), получим

$$h_1'(x) = im(x)h_3^0 \cos \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt +$$
$$im(x)C_2 \sin \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt \quad (4.41)$$

Интегрируя, получим

$$h_1(x) = \frac{ih_3^0}{\sqrt{1+k^2}} \sin \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt -$$
$$\frac{iC_2}{\sqrt{1+k^2}} \cos \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x m(t)dt \quad (4.42)$$

Используя начальные условия $h_1(0) = h_1^0$, получим, что

$$h_1^0 = -\frac{iC_2}{\sqrt{1+k^2}},$$

а значит, $C_2 = ih_1^0\sqrt{1+k^2}$.

Итак, пришли к виду для $h_1(x)$, $h_3(x)$ в форме (4.40). Аналогично находим вид для $h_2(x)$. □

**Теорема 4.4.** *Если* $a'(x) = k(x)a(x)$, $m'(x) = k(x)m(x)$, $k(x) \neq 0$ *то система уравнений* (4.36) *имеет единственное решение*

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0 \cos \sqrt{C_2} \int\limits_0^x m(t)dt + \dfrac{ih_3^0}{\sqrt{C_2}} \sin \sqrt{C_2} \int\limits_0^x m(t)dt \\ h_2(x) = h_2^0 \cos \sqrt{C_1} \int\limits_0^x a(t)dt + \dfrac{ih_3^0}{\sqrt{C_1}} \sin \sqrt{C_1} \int\limits_0^x a(t)dt \\ h_3(x) = h_3^0 \cos \sqrt{C_1} \int\limits_0^x a(t)dt + ih_2^0\sqrt{C_1} \sin \sqrt{C_1} \int\limits_0^x a(t)dt, \end{cases} \quad (4.43)$$

*причем $h_3(x)$ допускает еще одно представление:*

$$h_3(x) = h_3^0 \cos\sqrt{C_2}\int\limits_0^x m(t)dt + ih_1^0\sqrt{C_2}\sin\sqrt{C_2}\int\limits_0^x m(t)dt,$$

*где* $C_1 = \dfrac{a^2(x)+m^2(x)}{a^2(x)}$, *а* $C_2 = \dfrac{a^2(x)+m^2(x)}{m^2(x)}$

*Доказательство.* Пусть $a'(x) = k(x)a(x)$, $m'(x) = k(x)m(x)$, $k(x) \neq 0$, тогда $a'(x)a(x) = k(x)a^2(x)$, аналогично $m'(x)m(x) = k(x)m^2(x)$. Складывая, получаем соотношение: $\frac{1}{2}(a^2(x))' + \frac{1}{2}(m^2(x))' = k(x)(a^2(x)+m^2(x))$ или

$$\frac{1}{2}(a^2(x)+m^2(x))' = k(x)(a^2(x)+m^2(x)),$$

решив которое, мы придем к выражениям для констант:
$C_1 = \dfrac{a^2(x)+m^2(x)}{a^2(x)}$ и $C_2 = \dfrac{a^2(x)+m^2(x)}{m^2(x)}$, в зависимости от того, какое из $a'(x) = k(x)a(x)$ или $m'(x) = k(x)m(x)$ мы подставляли. Поэтому и получим два уравнения для нахождения $h_3(x)$:

$$h_3''(x) - \frac{m'(x)}{m(x)}h_3'(x) + C_2m^2(x)h_3(x) = 0,$$

и

$$h_3''(x) - \frac{a'(x)}{a(x)}h_3'(x) + C_1a^2(x)h_3(x) = 0.$$

Решая эти уравнения, воспользовавшись начальными условиями, придем к соотношениям:

$$h_3(x) = h_3^0\cos\sqrt{C_1}\int\limits_0^x a(t)dt + C_3\sin\sqrt{C_1}\int\limits_0^x a(t)dt$$

$$h_3(x) = h_3^0\cos\sqrt{C_2}\int\limits_0^x m(t)dt + C_4\sin\sqrt{C_2}\int\limits_0^x m(t)dt,$$

Первое из них используем для нахождения $h_2(x)$, а второе, аналогично, для нахождения $h_1(x)$:

$$h_1'(x) = im(x)h_3^0\cos\sqrt{C_2}\int\limits_0^x m(t)dt + im(x)C_4\sin\sqrt{C_2}\int\limits_0^x m(t)dt$$

Интегрируя, получим

$$h_1(x) = \frac{ih_3^0}{\sqrt{C_2}} \sin\sqrt{C_2} \int\limits_0^x m(t)dt - \frac{iC_4}{\sqrt{C_2}} \cos\sqrt{C_2} \int\limits_0^x m(t)dt.$$

Используя начальные условия $h_1(0) = h_1^0$, получим, что

$$h_1^0 = \frac{iC_4}{\sqrt{C_2}},$$

$$C_4 = i\sqrt{C_2}h_1^0,$$

аналогично, для $h_2(x)$

$$h_2^0 = \frac{iC_3}{\sqrt{C_1}},$$
$$C_3 = i\sqrt{C_1}h_2^0.$$

Итак, решения системы (4.39) представляются в виде (4.43). □

**Лемма 4.6.** *Если* $a(x)\cos\varphi = m(x)\sin\varphi$ *и* $h_3(x) = h_1(x)\cos\varphi + h_2(x)\sin\varphi$*, то система уравнений* (4.36) *имеет единственное решение*

$$\begin{cases} h_1(x) = h_1^0 + ih_3^0 \int\limits_0^x m(y) exp^{i\int\limits_0^y \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt} dy, \\ h_2(x) = h_2^0 + ih_3^0 \int\limits_0^x a(y) exp^{i\int\limits_0^y \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt} dy, \\ h_3(x) = h_3^0 exp^{\int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt}. \end{cases} \quad (4.44)$$

*Доказательство.* Из первого и второго уравнений системы (4.36) выразим $im(x)$ и $ia(x)$ соответственно. После подстановки в третье, получим

$$h_3'(x)h_3(x) = h_1'(x)h_1(x) + h_2'(x)h_2(x). \quad (4.45)$$

Логично искать $h_3(x)$ в таком виде: $h_3(x) = h_1(x)\cos\varphi + h_2(x)\sin\varphi$. Если $a(x)\cos\varphi = m(x)\sin\varphi$, то

$$\cos\varphi = \frac{m(x)}{\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}},\ \sin\varphi = \frac{a(x)}{\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}}.$$

Тогда система (4.36) примет вид

$$\begin{cases} h_1'(x) = i\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}\cos\varphi h_3(x), \\ h_2'(x) = i\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}\sin\varphi h_3(x), \\ h_3'(x) = i\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}(h_1(x)\cos\varphi + h_2(x)\sin\varphi), \\ h_i(0) = h_0,\ i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.46}$$

Третье уравнение системы (4.46) перепишем в виде

$$h_3'(x) = i\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}h_3(x).$$

Легко видеть, что решением уравнения будет

$$h_3(x) = h_3^0 exp^{\int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt}.$$

Подставив его в первые два уравнения системы (4.46), получим систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} h_1'(x) = im(x)h_3^0 exp^{\int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt}, \\ h_2'(x) = ia(x)h_3^0 exp^{\int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt}, \\ h_i(0) = h_i^0,\ i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.47}$$

Решив каждое из уравнений, получим решение системы (3.30) в виде (4.44). $\square$

**Теорема 4.5.** *Если $a(x)\cos\varphi(x) + m(x)\sin\varphi(x) = 0$ и $\varphi(x)$ - дифференцируемая функция, причем $\varphi'(x) = C\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}$, где $C-const$, то система уравнений (4.36) имеет единственное решение*

$$\begin{cases} h_1(x) &= h_1^0\cos\beta(x) - Ch_2^0\sin\beta(x) - \\ & -i(1-C^2)h_3^0\sin\beta(x)\cos\varphi(x), \\ h_2(x) &= h_2^0\cos\beta(x) + Ch_1^0\sin\beta(x) + \\ & +i(1-C^2)h_3^0\sin\beta(x)\sin\varphi(x), \\ h_3(x) &= \dfrac{h_1^0 - iCh_3^0\sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)}\sin\beta(x) + ih_3^0\cos\beta(x), \end{cases} \tag{4.48}$$

*где* $\beta(x) = \sqrt{C^2+1}\int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt.$

**Замечание 1.** Выражение для $h_3(x)$ допускает следующее представление

$$h_3(x) = \frac{-h_2^0 + iCh_3^0\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin\beta(x) + ih_3^0\cos\beta(x).$$

*Доказательство.* Будем искать решение в виде

$$\begin{cases} h_1(x) = u(x)\cos\varphi(x) + v(x)\sin\varphi(x), \\ h_2(x) = -u(x)\sin\varphi(x) + v(x)\cos\varphi(x), \\ h_3(x) = h_3(x). \end{cases} \tag{4.49}$$

Продифференцировав эти соотношения, придем к

$$\begin{cases} h_1'(x) & = u'(x)\cos\varphi(x) - u(x)\sin\varphi(x)\varphi'(x) + \\ & +v'(x)\sin(x)\varphi(x) + v(x)\cos\varphi(x)\varphi'(x), \\ h_2'(x) & = -u'(x)\sin\varphi(x) - u(x)\cos\varphi(x)\varphi'(x) + \\ & +v'(x)\cos\varphi(x) - v(x)\sin\varphi(x)\varphi'(x), \\ h_3'(x) & = h_3'(x). \end{cases} \tag{4.50}$$

В результате, после подстановки в (4.36) получим

$$\begin{cases} u'(x)\cos\varphi(x) - u(x)\sin\varphi(x)\varphi'(x) + v'(x)\sin\varphi(x) + \\ +v(x)\cos\varphi(x)\varphi'(x) = im(x)h_3(x), \\ -u'(x)\sin\varphi(x) - u\cos\varphi(x)\varphi'(x) + v'(x)\cos\varphi(x) - \\ -v(x)\sin\varphi(x)\varphi'(x) = ia(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = im(x)h_1(x) + ia(x)h_2(x). \end{cases} \tag{4.51}$$

Умножим первое уравнение системы (4.51) на $a(x)$, второе на $m(x)$ и вычтем, а потом умножим первое на $m(x)$, второе на $a(x)$ и сложим. Согласно условию теоремы $a(x)\cos\varphi(x) + m(x)\sin\varphi(x) = 0$, поэтому получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -u(x)\varphi'(x) + v'(x) = 0, \\ (m(x)\cos\varphi(x) - a(x)\sin\varphi(x))(u'(x) + v(x)\varphi'(x)) = \\ = ih_3(x)(m^2(x) + a^2(x)), \\ h_3'(x) = im(x)h_1(x) + ia(x)h_2(x). \end{cases} \tag{4.52}$$

Найдем выражение для $m(x)\cos\varphi(x) - a(x)\sin\varphi(x)$.

$$m(x)\cos\varphi(x) - a(x)\sin\varphi(x) = -\left(\frac{m^2(x) + a^2(x)}{a(x)}\right)\sin\varphi(x). \tag{4.53}$$

После этого, система (4.52) примет вид

$$\begin{cases} -u(x)\varphi'(x) + v'(x) = 0, \\ u'(x) + v\varphi'(x) = -ih_3(x)\dfrac{a(x)}{\sin\varphi(x)}, \\ h_3'(x) = im(x)h_1(x) + ia(x)h_2(x). \end{cases} \tag{4.54}$$

Подставим соответствующие выражения в третье уравнение системы (4.54), а именно

$$h_3'(x) = iu(x)(m(x)\cos\varphi(x) - a(x)\sin\varphi(x)) + \\ iv(x)(a(x)\cos\varphi(x) + m(x)\sin\varphi(x)) \tag{4.55}$$

или

$$h_3'(x) = -iu(x)\left(\frac{m^2(x) + a^2(x)}{a(x)}\right)\sin\varphi(x).$$

Итак, система (4.54) приобретает вид

$$\begin{cases} -u(x)\varphi'(x) + v'(x) = 0, \\ u'(x) + v(x)\varphi'(x) = -ih_3(x)\dfrac{a(x)}{\sin\varphi(x)}, \\ h_3'(x) = -iu(x)\left(\dfrac{m^2(x) + a^2(x)}{a(x)}\right)\sin\varphi(x). \end{cases} \tag{4.56}$$

Выразим из первого уравнения (4.56) $\varphi'(x)$ и подставим во второе

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \dfrac{v'(x)}{u(x)}, \\ u'(x) + v(x)\dfrac{v'(x)}{u(x)} = -ih_3(x)\dfrac{a(x)}{\sin\varphi(x)}, \\ h_3'(x) = -iu(x)\left(\dfrac{m^2(x)+a^2(x)}{a(x)}\right)\sin\varphi(x). \end{cases} \tag{4.57}$$

Преобразуем второе уравнение системы (4.57) $u(x)u'(x) + v(x)v'(x) = -iu(x)h_3(x)\dfrac{a(x)}{\sin\varphi(x)}$. Воспользуемся соотношением

$$u(x)u'(x) + v(x)v'(x) = h_1'(x)h_1(x) + h_2'(x)h_2(x) = h_3'(x)h_3(x).$$

Таким образом, $h_3'(x) = -iu(x)\dfrac{a(x)}{\sin\varphi(x)}$.

Сопоставив это соотношение с третьим уравнением системы (4.57) , придем к

$$\frac{a(x)}{\sin\varphi(x)} = \frac{m^2(x)+a^2(x)}{a(x)}\sin\varphi(x),$$

откуда

$$\sin\varphi(x) = \frac{a(x)}{\sqrt{a^2(x)+m^2(x)}},$$

соответственно

$$\cos\varphi(x) = \frac{m(x)}{\sqrt{a^2(x)+m^2(x)}}.$$

Теперь систему (4.56) можно записать так

$$\begin{cases} v'(x) - u(x)\varphi'(x) = 0, \\ u'(x) + v(x)\varphi'(x) = -ih_3(x)\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}, \\ h_3'(x) = -iu(x)\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}. \end{cases} \tag{4.58}$$

Пусть $u = u(y)$, $v = v(y)$, $h_3(x) = h(y)$, где $y = \int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt$, тогда

$$\begin{cases} v'(y) - u(y)\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}} = 0, \\ u'(y) + v(y)\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}} = -ih(y), \\ h'(y) = -iu(y). \end{cases} \tag{4.59}$$

По условию теоремы $\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}} = C$, где $C - const$, тогда (4.58) примет вид

$$\begin{cases} v'(y) - u(y)C = 0, \\ u'(y) + v(y)C = -ih(y), \\ h'(y) = -iu(y). \end{cases} \tag{4.60}$$

Продифференцируем второе уравнение системы (4.60), получим

$$u''(y) + Cv'(y) = -ih'(y),$$

подставим соответствующие выражения для $v'(y)$ и $h'(y)$, в результате придем к уравнению

$$u''(y) + (C^2+1)u(y) = 0,$$

из которого легко находятся решения

$$u(y) = C_1 \cos\beta(x) + C_2 \sin\beta(x)$$

где $\beta(x) = \sqrt{C^2+1}y(x)$. Тогда из первого уравнения (4.60)

$$v'(y) = u(y)C = CC_1 \cos\beta(x) + CC_2 \sin\beta(x),$$

откуда получаем

$$v(y) = C\left(C_1 \sin\beta(x) - C_2 \cos\beta(x)\right),$$

аналогично для второго уравнения

$$h(y) = i\left(C_1 \sin\beta(x) - C_2 \cos\beta(x).\right)$$

Таким образом, $h_3(x)$ имеет следующее представление

$$h_3(x) = i\left(C_1 \sin\beta(x) - C_2 \cos\beta(x)\right),$$

где $\beta(x) = \sqrt{C^2+1}\int\limits_0^x \sqrt{m^2(t)+a^2(t)}dt$, а $\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{m^2(x)+a^2(x)}} = C$.
Из начальных условий определяем, что $C_2 = -ih_3^0$.

Для $h_1(x)$ и $h_2(x)$ получаем соответственно

$$h_1(x) = \big(C_1\cos\beta(x) - ih_3^0\sin\beta(x)\big)\cos\varphi + \\ + C\left(C_1\sin\beta(x) + ih_3^0\cos\beta(x)\right)\sin\varphi \quad (4.61)$$

$$h_2(x) = -\left(C_1\cos\beta(x) - ih_3^0\sin\beta(x)\right)\sin\varphi + \\ + C\left(C_1\sin\beta(x) + ih_3^0\cos\beta(x)\right)\cos\varphi \quad (4.62)$$

Определим $C_1$ из начальных условий.

$$C_1 = \frac{h_1^0 - iCh_3^0\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-h_2^0 + iCh_3^0\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Подставив соответствующие выражения, придем к решению системы (4.36) в виде (4.48). $\square$

## 4.4. Собственные значения и собственные векторы матрицы $a(x)$ в случае кратного спектра и $r = 3$

Пусть $a(x)$ гладкая матрица с кратным спектром. Выберем ортонормированный базис $h_k(x)$ так, что

$$h_k(x) \perp h_s(x),\ (k \neq s)\,, \|h_k(x)\| = 1,\ (1 \leq k, s \leq 3) \quad (4.63)$$

так, чтобы $a(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x)$, где $\mu_k(x)$ - собственные значения матрицы $a(x)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, $\mu_1(x) \neq \mu_3(x)$. Воспользуемся первым уравнением в (4.1):

$$\gamma'(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\sigma_2 a(x)h_k(x) = ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\sigma_2\mu_k(x)h_k(x).$$

Введем обозначение

$$\langle\sigma_2 h_k(x), h_s(x)\rangle = \beta_{sk}(x), \quad (1 \leq k, s \leq n)$$

Учитывая $\sigma_2 h_k(x) = \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{sk}(x) h_s(x)$, получим, что

$$\begin{aligned}\gamma'(x)h_k(x) &= ia(x)\sigma_2 h_k(x) - i\mu_k(x)\sigma_2 h_k(x) = \\ &= i\left(a(x) - \mu_k(x)\right)\sigma_2 h_k(x) = i\sum_{s=1}^{n} \beta_{sk}(x)\left(a(x) - \mu_k(x)\right) h_s(x) = \\ &= i\sum_{s\neq k} \beta_{sk}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right) h_s(x).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\gamma'(x)h_1(x) &= i\sum_{s=1}^{3} \beta_{s1}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_1(x)\right) h_s(x) = \\ &= i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x) - \mu_1(x)\right) h_3(x); \\ \gamma'(x)h_2(x) &= i\sum_{s=1}^{3} \beta_{s2}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_2(x)\right) h_s(x) = \\ &= i\beta_{32}(x)\left(\mu_3(x) - \mu_2(x)\right) h_3(x); \\ \gamma'(x)h_3(x) &= i\sum_{s=1}^{3} \beta_{s3}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_3(x)\right) h_s(x) = \\ &= i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{13}(x)h_1(x) - \beta_{23}(x)h_2(x)\right).\end{aligned}$$

Из второго уравнения системы (4.1) получим

$$\begin{cases}\gamma(x)h_1(x) = \xi_{11}(x)h_1(x) + \xi_{12}(x)h_2(x); \\ \gamma(x)h_2(x) = \overline{\xi_{12}}(x)h_1(x) + \xi_{22}(x)h_2(x); \\ \gamma(x)h_3(x) = \xi_{33}(x)h_3(x),\end{cases} \tag{4.64}$$

где $\xi_{ks}(x) \in \mathbb{C}, \quad (1 \leq k, s \leq 3)$.

Продифференцируем первое из уравнений системы (4.64)

$$\begin{aligned}&\gamma'(x)h_1(x) + \gamma(x)h_1'(x) = \\ &= \xi_{11}'(x)h_1(x) + \xi_{11}(x)h_1'(x) + \xi_{12}'(x)h_2(x) + \xi_{12}(x)h_2'(x).\end{aligned} \tag{4.65}$$

Умножим (4.65) на $h_3(x)$ скалярно, учитывая (4.63), получим

$$\begin{aligned}
&i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_1(x)\right)\langle h_3(x),h_3(x)\rangle+\langle h_1'(x),\gamma(x)h_3(x)\rangle=\\
&\langle\xi_{11}(x)h_1'(x),h_3(x)\rangle+\langle\xi_{12}(x)h_2'(x),h_3(x)\rangle;\\
&i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_1(x)\right)+\\
&+(\xi_{33}(x)-\xi_{11}(x))\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle=\xi_{12}(x)\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle.
\end{aligned}\tag{4.66}$$

Аналогично, продифференцировав второе уравнение (4.64) и домножив его скалярно на $h_3(x)$, придем к выражению

$$\begin{aligned}
&i\beta_{32}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_2(x)\right)+\\
&+(\xi_{33}(x)-\xi_{22}(x))\langle h_1'(x),h_3(x)\rangle=\overline{\xi_{12}}(x)\langle h_2'(x),h_3(x)\rangle,
\end{aligned}\tag{4.67}$$

и, продифференцировав третье уравнение системы (4.64), получим, что

$$\begin{aligned}
&\gamma'(x)h_3(x)+\gamma(x)h_3'(x)=\xi_{33}'(x)h_3(x)+\xi_{33}(x)h_3'(x);\\
&i(\beta_{13}(x)h_1(x)+\beta_{23}(x)h_2(x))\left(\mu_1(x)-\mu_3(x)\right)+\\
&+\gamma(x)h_3'(x)=\xi_{33}'(x)h_3(x)+\xi_{33}(x)h_3'(x);\\
&\langle h_3'(x),\gamma(x)h_3(x)\rangle=\xi_{33}'(x)+\langle\xi_{33}(x)h_3'(x),h_3(x)\rangle;\\
&\xi_{33}(x)\langle h_3'(x),h_3(x)\rangle-\xi_{33}(x)\langle h_3'(x),h_3(x)\rangle=\xi_{33}'(x).
\end{aligned}\tag{4.68}$$

Таким образом, $\xi_{33}'(x)=0$, то есть $\xi_{33}$ не зависит от $x$. Умножим (4.65) скалярно на $h_1(x)$, получим

$$\begin{aligned}
&i\beta_{31}(x)\left(\mu_3(x)-\mu_1(x)\right)\langle h_3(x),h_1(x)\rangle+\\
&+\langle h_1'(x),\gamma(x)h_1(x)\rangle=\\
&\langle\xi_{11}(x)h_1'(x),h_1(x)\rangle+\langle\xi_{12}(x)h_2'(x),h_1(x)\rangle+\xi_{11}'(x);\\
&\langle h_1'(x),\xi_{11}(x)h_1(x)+\xi_{12}(x)h_2(x)\rangle=\\
&\langle\xi_{11}(x)h_1'(x),h_1(x)\rangle+\langle\xi_{12}(x)h_2'(x),h_1(x)\rangle+\xi_{11}'(x),
\end{aligned}$$

то есть

$$\overline{\xi_{12}}(x)\langle h_1'(x),h_2(x)\rangle=\xi_{12}(x)\langle h_2'(x),h_1(x)\rangle+\xi_{11}'(x).\tag{4.69}$$

При умножении (4.65) скалярно на $h_2(x)$, получим

$$\begin{aligned}
&\xi_{12}(x)\left(\langle h_1'(x),h_1(x)\rangle-\langle h_2'(x),h_2(x)\rangle\right)+\\
&+(\xi_{22}(x)-\xi_{11}(x))\langle h_1'(x),h_2(x)\rangle=\xi_{12}'(x).
\end{aligned}\tag{4.70}$$

Продифференцировав второе уравнение системы (4.64) и умножив его скалярно на $h_1(x)$, а потом на $h_2(x)$, получим следующие соотношения

$$\begin{gathered}\overline{\xi_{12}(x)}\left(\langle h_2'(x), h_2(x)\rangle - \langle h_1'(x), h_1(x)\rangle\right) + \\ +(\xi_{11}(x) - \xi_{22}(x))\langle h_1'(x), h_2(x)\rangle = \overline{\xi_{12}}'(x);\end{gathered} \tag{4.71}$$

$$\xi_{12}(x)\langle h_2'(x), h_1(x)\rangle = \overline{\xi_{12}(x)}\langle h_1'(x), h_2(x)\rangle + \xi_{22}'(x); \tag{4.72}$$

Сложив (4.69) и (4.72), получим, что $\xi_{11}'(x)+\xi_{22}'(x) = 0$. Используя (4.66) и (4.67), запишем систему уравнений

$$\begin{cases}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))\langle h_1'(x), h_3(x)\rangle - \xi_{12}(x)\langle h_2'(x), h_3(x)\rangle = \\ = i\beta_{31}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right); \\ (\xi_{33} - \xi_{22}(x))\langle h_1'(x), h_3(x)\rangle - \overline{\xi_{12}}(x)\langle h_2'(x), h_3(x)\rangle = \\ = i\beta_{32}(x)\left(\mu_2(x) - \mu_3(x)\right).\end{cases} \tag{4.73}$$

Решим ее по правилу Крамера

$$\begin{gathered}\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & -\xi_{12}(x) \\ \xi_{33} - \xi_{22}(x) & -\overline{\xi_{12}(x)}. \end{vmatrix} = \\ = \xi_{12}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)) - \overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x)).\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Delta_1 = \begin{vmatrix} i\beta_{31}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right) & -\xi_{12}(x) \\ i\beta_{32}(x)\left(\mu_2(x) - \mu_3(x)\right) & -\overline{\xi_{12}(x)} \end{vmatrix} = \\ = i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{32}(x)\xi_{12}(x) - \beta_{31}(x)\overline{\xi_{12}(x)}\right.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & i\beta_{31}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right) \\ \xi_{33} - \xi_{22}(x) & i\beta_{32}(x)\left(\mu_2(x) - \mu_3(x)\right) \end{vmatrix} = \\ = i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{32}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \beta_{31}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x))\right)\end{gathered}$$

То есть, с учетом того, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$

$$\begin{gathered}\langle h_1'(x), h_3(x)\rangle = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \\ = \frac{i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{32}(x)\xi_{12}(x) - \beta_{31}(x)\overline{\xi_{12}(x)}\right)}{\xi_{12}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)) - \overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}\end{gathered} \tag{4.74}$$

а

$$\langle h_2'(x), h_3(x)\rangle = \frac{\Delta_2}{\Delta} =$$
$$= \frac{i(\mu_1(x) - \mu_3(x))\,[\beta_{32}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \beta_{31}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x))]}{\xi_{12}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)) - \overline{\xi_{12}(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))} \tag{4.75}$$

Продифференцировав третье уравнение системы (4.64) с учетом того, что $\xi_{33}$ не зависит от $x$, и после, умножив его сначала на $h_1(x)$, а потом на $h_2(x)$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))\langle h_3'(x), h_1(x)\rangle - \overline{\xi_{12}}(x)\langle h_3'(x), h_2(x)\rangle = \\ = i\beta_{13}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right); \\ -\xi_{12}(x)\langle h_3'(x), h_1(x)\rangle + (\xi_{33} - \xi_{22}(x))\langle h_3'(x), h_2(x)\rangle = \\ = i\beta_{23}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right).\end{gathered} \tag{4.76}$$

Также решим ее по правилу Крамера,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & -\overline{\xi_{12}(x)} \\ -\xi_{12}(x) & \xi_{33} - \xi_{22}(x) \end{vmatrix} =$$
$$= (\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} i\beta_{13}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right) & -\overline{\xi_{12}(x)} \\ i\beta_{23}(x)\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right) & \xi_{33} - \xi_{22}(x) \end{vmatrix} =$$
$$= i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{23}(x)\overline{\xi_{12}(x)} + \beta_{13}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)));$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_{33} - \xi_{11}(x) & i\beta_{13}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) \\ -\xi_{12}(x) & i\beta_{23}(x)(\mu_1(x) - \mu_3(x)) \end{vmatrix} =$$
$$= i(\mu_1(x) - \mu_3(x))(\beta_{23}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) + \beta_{13}(x)\xi_{12}(x)).$$

То есть

$$\langle h_3'(x), h_1(x)\rangle = \frac{\Delta_1}{\Delta} =$$
$$= \frac{i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{23}(x)\overline{\xi_{12}(x)} + \beta_{13}(x)(\xi_{33} - \xi_{22}(x)\right)}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}, \tag{4.77}$$

а

$$\langle h_3'(x), h_2(x)\rangle = \frac{\Delta_2}{\Delta} =$$
$$= \frac{i\left(\mu_1(x) - \mu_3(x)\right)\left(\beta_{23}(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) + \beta_{13}(x)\xi_{12}(x)\right)}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}. \tag{4.78}$$

Итак, получены выражения для $\langle h_1'(x), h_3(x)\rangle$, $\langle h_2'(x), h_3(x)\rangle$, $\langle h_3'(x), h_1(x)\rangle$, $\langle h_3'(x), h_2(x)\rangle$ в виде (4.74), (4.75), (4.77), (4.78).

## 4.5. Специальное решение системы уравнений при дополнительных условиях

Пусть $\xi_{12}(x) \in \mathbb{R}$, матрица-функция $a(x)$ имеет одно двукратное собственное значение не ограничивая общности, считаем, как было сказано выше, что $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, и оператор $\sigma_2$ действует на базисные вектора $\{h_k(x)\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_1(x) = \psi(x) h_1(x), \\ \sigma_2 h_2(x) = \nu(x) h_3(x), \\ \sigma_2 h_3(x) = \overline{\nu}(x) h_2(x), \end{cases} \tag{4.79}$$

где $\psi(x)$- вещественная функция, а $\nu(x)$ - комплексно-значная функция, получим, что $\beta_{12}(x) = \beta_{21}(x) = \beta_{13}(x) = \beta_{31}(x) = 0$, $\beta_{32}(x) = \nu(x)$, $\beta_{23}(x) = \overline{\nu}(x)$. Тогда из (4.74), (4.75), (4.77), (4.78) следует

$$\begin{aligned} \langle h_1'(x), h_3(x)\rangle &= \frac{i\,(\mu_3(x) - \mu_1(x))\,\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}; \\ \langle h_2'(x), h_3(x)\rangle &= \frac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))}; \\ \langle h_3'(x), h_1(x)\rangle &= \frac{i\,(\mu_1(x) - \mu_3(x))\,\overline{\varphi(x)}\xi_{12}(x)}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}; \\ \langle h_3'(x), h_2(x)\rangle &= \frac{i\,(\mu_1(x) - \mu_3(x))\,\overline{\varphi(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Так как $\langle h_k(x), h_s(x)\rangle = 0$, нетрудно заметить, что $(\langle h_k(x), h_s(x)\rangle)' =$
$= \langle h_k'(x), h_s(x)\rangle + \langle h_k(x), h_s'(x)\rangle = 0$, или

$$\langle h_k'(x), h_s(x)\rangle = -\overline{\langle h_s'(x), h_k(x)\rangle}. \tag{4.81}$$

В таком случае

$$\frac{i\,(\mu_3(x) - \mu_1(x))\,\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} = -\frac{i\,(\mu_1(x) - \mu_3(x))\,\varphi(x)\xi_{12}(x)}{(\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)},$$

значит, $(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))\xi_{12}(x) = (\xi_{33} - \xi_{22}(x))(\xi_{33} - \xi_{11}(x)) - \xi_{12}^2(x)$.
Предположим, что $\langle h_k(x), h_k'(x)\rangle = i\delta_k(x)$, а $\langle h_1'(x), h_2(x)\rangle = a(x) + ib(x)$,

где

$\delta_k(x),\ a(x),\ b(x) \in \mathbb{R}$. Из (4.69) получим следующее выражение

$$\xi_{12}'(x) = i\xi_{12}(x)(\delta_1(x) - \delta_2(x)) + (\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))(a(x) + ib(x)).$$

Приравняв вещественные и мнимые части, придем к соотношениям: $a(x) = \dfrac{\xi_{12}'(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}$, $b(x) = \dfrac{\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}$.

То есть $\langle h_1'(x), h_2(x)\rangle = \dfrac{\xi_{12}'(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} + i\dfrac{\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}$. Разложив вектора $h_k'(x)$ по базису $h_k(x)$, получим

$$h_k'(x) = \sum_{s=1}^{3} \langle h_s'(x), h_s(x)\rangle h_s(x). \tag{4.82}$$

Подставив полученные выражения, придем к системе

$$\begin{cases} h_1'(x) & = i\delta_1(x)h_1(x) + \\ & + \left(\dfrac{\xi_{12}'(x) + i\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}\right) h_2(x) + \\ & + \dfrac{i\left(\mu_3(x) - \mu_1(x)\right)\varphi(x)}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} h_3(x); \\ h_2'(x) & = \left(\dfrac{-\xi_{12}'(x) + i\xi_{12}(x)(\delta_2(x) - \delta_1(x))}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)}\right) h_1(x) + \\ & + i\delta_2(x)h_2(x) + \\ & + \dfrac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\varphi(x)(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))} h_3(x); \\ h_3'(x) & = -\dfrac{i\left(\mu_3(x) - \mu_1(x)\right)\overline{\varphi(x)}}{\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x)} h_1(x) - \\ & - \dfrac{i(\mu_3(x) - \mu_1(x))\overline{\varphi(x)}(\xi_{33} - \xi_{11}(x))}{\xi_{12}(x)(\xi_{22}(x) - \xi_{11}(x))} h_2(x) + \\ & + i\delta_3(x)h_3(x). \end{cases} \tag{4.83}$$

Введем обозначения, считая, что $\xi_{js} = const$ $(j, s = \overline{1,3})$,

$$m = \frac{\xi_{33} - \xi_{11}}{\xi_{12}(\xi_{22} - \xi_{11})},$$

$$k = \frac{\xi_{12}}{\xi_{22} - \xi_{11}},$$

$$n = \frac{1}{\xi_{22} - \xi_{11}},$$
$$d(x) = (\mu_3(x) - \mu_1(x))\,\varphi(x).$$

Тогда система (4.83) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} h_1'(x) & = i\delta_1(x)h_1(x) + ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))h_2(x) + ind(x)h_3(x); \\ h_2'(x) & = -ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))h_1(x) + \\ & +i\delta_2(x)h_2(x) + imd(x)h_3(x); \\ h_3'(x) & = -in\overline{d(x)}h_1(x) - im\overline{d(x)}h_2(x) + i\delta_3(x)h_3(x). \end{cases} \tag{4.84}$$

Пусть $f_k(x) = exp^{-i\int\limits_0^x \delta_k(t)dt}$. Теперь система (4.84) примет вид

$$\begin{cases} f_1'(x) = ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))exp^{i\int\limits_0^x (\delta_2(t)-\delta_1(t))dt} f_2(x) + \\ \qquad +ind(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_3(x); \\ f_2'(x) = -ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_2(t)-\delta_1(t))dt} f_1(x) + \\ \qquad +imd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_3(x); \\ f_3'(x) = -in\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_1(x) - \\ \qquad -im\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_2(x). \end{cases} \tag{4.85}$$

В случае $\delta_2(t) = \delta_1(t)$ система примет ранее изученный вид, а именно

$$\begin{cases} f_1'(x) = ind(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_3(x); \\ f_2'(x) = imd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_3(x); \\ f_3'(x) = -in\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} f_1(x) - \\ \qquad -im\overline{d(x)}exp^{-i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} f_2(x), \end{cases}$$

Решения которой легко находятся при некоторых дополнительных условиях. Например, если $d(x)$ - вещественная функция, а

$nd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt}, md(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt}$ линейно зависимы, то есть $m \cdot d(x) \cdot exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt} = k \cdot n \cdot d(x) \cdot exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt} = k \cdot v(x)$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, тогда система (4.5.) примет вид:

$$\begin{cases} f_1'(x) = iv(x)f_3(x), \\ f_2'(x) = ikv(x)f_3(x), \\ f_3'(x) = -iv(x)(f_1(x) + kf_2(x)), \\ f_j(0) = f_j^0, \ j = \overline{1,3} \end{cases} \tag{4.86}$$

**Лемма 4.7.** *Если $k \in \mathbb{R}$, то система уравнений* (4.86) *имеет единственное решение:*

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{if_3^0}{\sqrt{1+k^2}} exp^{\varphi(x)}, \\ f_2(x) = \dfrac{ikf_3^0}{\sqrt{1+k^2}} exp^{\varphi(x)}, \\ f_3(x) = f_3^0 \cdot exp^{\varphi(x)}, \end{cases} \tag{4.87}$$

*где* $\varphi(x) = \sqrt{1+k^2} \int\limits_0^x v(t)dt.$

Для системы (4.85) примем обозначения

$$\begin{cases} a(x) = ik(\delta_2(x) - \delta_1(x))exp^{i\int\limits_0^x (\delta_2(t)-\delta_1(t))dt}; \\ b(x) = ind(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_1(t))dt}; \\ c(x) = imd(x)exp^{i\int\limits_0^x (\delta_3(t)-\delta_2(t))dt}, \end{cases}$$

будем считать, что $a(x),\ b(x),\ c(x)$ - вещественнозначные функции, тогда система (4.85) примет вид

$$\begin{cases} f_1'(x) = a(x)f_2(x) + b(x)f_3(x); \\ f_2'(x) = a(x)f_1(x) + c(x)f_3(x); \\ f_3'(x) = b(x)f_1(x) + c(x)f_2(x). \end{cases} \tag{4.88}$$

**Теорема 4.6.** *Пусть* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ *- вещественнозначные функции, положим*

$$\begin{aligned} A(x) &= \qquad exp^{2\int\limits_0^x a(t)dt}, \\ P(x) &= (b(x)+c(x))exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}, \\ Q(x) &= \ (b(x)-c(x))exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

*Кроме того, выполняются следующие условия*

$$Q'(x) := k(x)Q(x), \tag{4.90}$$

$$(P(x)A^2(x))' = k(x)P(x)A^2(x), \tag{4.91}$$

$$P^2(x)A^2(x) + Q^2(x) = \frac{1}{2A(x)}exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt}, \ p > 0, \ p \in \mathbb{R}, \tag{4.92}$$

*где* $k(x)$ *вещественная дифференцируемая функция.*
*Тогда система* (4.88) *имеет единственное решение*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1^0 + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{A}\int\limits_0^x P(t)f_3(t)dt + \tfrac{1}{\sqrt{A}}\int\limits_0^x Q(t)f_3(t)dt\right) \\ f_2(x) &= f_2^0 + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{A}\int\limits_0^x P(t)f_3(t)dt - \tfrac{1}{\sqrt{A}}\int\limits_0^x Q(t)f_3(t)dt\right) \\ f_3(x) &= f_3^0 cos\sqrt{p}\int\limits_0^x g_1(t)dt + \tfrac{2(b(0)f_1^0+c(0)f_2^0)}{\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}\int\limits_0^x g_1(t)dt. \end{aligned} \tag{4.93}$$

*Доказательство.* Складывая и вычитая первые два уравнения этой системы, получим следующий ее вид

$$\begin{cases} (f_1(x)+f_2(x))' &= a(x)(f_1(x)+f_2(x)) + (b(x)+c(x))f_3(x); \\ (f_1(x)-f_2(x))' &= -a(x)(f_1(x)-f_2(x)) + \\ & +(b(x)-c(x))f_3(x); \\ f_3'(x) &= b(x)f_1(x)+c(x)f_2(x). \end{cases} \tag{4.94}$$

Введем в рассмотрение следующие функции

$$\begin{cases} F_+(x) = exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}(f_1(x)+f_2(x)); \\ F_-(x) = exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}(f_1(x)-f_2(x)). \end{cases} \tag{4.95}$$

теперь система (4.88) приобретает вид

$$\begin{cases} F'_+(x) = (b(x)+c(x))f_3(x)exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}; \\ F'_-(x) = (b(x)-c(x))f_3(x)exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}; \\ f'_3(x) = \frac{1}{2}(b(x)+c(x))exp^{\int\limits_0^x a(t)dt} F_+(x)+ \\ \qquad +\frac{1}{2}(b(x)-c(x))exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt} F_-(x). \end{cases} \tag{4.96}$$

Упростим систему (4.96), используя обозначения (4.89)

$$\begin{cases} F'_+(x) = P(x)f_3(x); \\ F'_-(x) = Q(x)f_3(x); \\ f'_3(x) = \frac{1}{2}P(x)A(x)F_+(x) + \frac{1}{2}Q(x)A^{-1}(x)F_-(x). \end{cases} \tag{4.97}$$

Введем условия (4.90) и (4.91), теперь система (4.97) приобретает вид

$$\begin{cases} B'(x) = k(x)B(x) + (P^2(x)A^2(x) + Q^2(x))f_3(x); \\ f'_3(x) = \dfrac{1}{2A(x)}B(x). \end{cases} \tag{4.98}$$

где $B(x) = P(x)A^2(x)F_+(x) + Q(x)F_-(x)$.

Пусть $G(x) = exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt} B(x)$, тогда

$$\begin{cases} G'(x) = (P^2(x)A^2(x) + Q^2(x))f_3(x); \\ f'_3(x) = \dfrac{1}{2A(x)}G(x)exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt}. \end{cases} \tag{4.99}$$

Перепишем систему (4.99), используя (4.92) и, обозначив, $g_1(x) = P^2(x)A^2(x) + Q^2(x) = \frac{1}{2A(x)}exp^{-\int\limits_0^x k(t)dt}$, придем к соотношениям

$$\begin{cases} G'(x) = g_1(x)f_3(x); \\ f'_3(x) = pg_1(x)G(x), \ p \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.100}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (4.100) и подставляя первое, получим соотношение

$$f''_3(x) - \frac{g'_1(x)}{g_1(x)}f'_3(x) - pg_1^2(x)f_3(x) = 0. \tag{4.101}$$

Решая (4.101), получим

$$f_3(x) = f_3^0 cos\sqrt{p}\int\limits_0^x g_1(t)dt + C_2\sin\sqrt{p}\int\limits_0^x g_1(t)dt, \qquad (4.102)$$

Используя (4.95) и (4.97) найдем выражения для $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x)+f_2(x) &= exp^{\int\limits_0^x a(t)dt}\left(\int\limits_0^x P(t)f_3(t)dt + f_1^0 + f_2^0\right), \\ f_1(x)-f_2(x) &= exp^{-\int\limits_0^x a(t)dt}\left(\int\limits_0^x Q(t)f_3(t)dt + f_1^0 - f_2^0\right). \end{aligned} \qquad (4.103)$$

Нетрудно заметить, что выражения (4.103) могут быть записаны в виде (4.93). □

## 4.6. Выводы к разделу 4

1. Получены уравнения для собственных функций матрицы $a(x)$ в терминах собственных значений $a(x)$ и собственных чисел оператора $\gamma(x)$ (теорема 4.1).
2. Найдены решения системы уравнений (4.10) в случае $r = 3$ и простого спектра гладкой матрицы $a(x)$, при заданном операторе $\sigma_2$ (4.11) (теоремы 4.2, 4.3).
3. Получены решения системы уравнений (4.10) в случае в случае простого спектра гладкой матрицы $a(x)$ и $r = 3$ при заданном операторе $\sigma_2$ (4.27) (леммы 4.3, 4.5, 4.6 теоремы 4.4, 4.5).
4. Получены выражения $\langle h_k'(x), h_s(x)\rangle$, $(k \neq s,\ k, s \in \{1, \ldots, 3\})$, где $h_s(x)$ - собственные функции гладкой матрицы $a(x)$, в случае ее кратного спектра и $r = 3$.
5. Описаны решения системы 4.84 в случае кратного спектра $a(x)$ и $r = 3$ при дополнительных условиях (лемма 4.7, теорема 4.6).

# РАЗДЕЛ 5. РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ $J \neq I$ В ТЕРМИНАХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Данный раздел работы посвящен анализу системы нелинейных уравнений (5.1) в предположении, что $J \neq I$. Основным результатом подраздела 4.1 является теорема 5.1, в которой получена основная система уравнений (5.12) для собственных векторов $\{h_k(x)\}_1^r$ матрицы $Ja(x)$. В случае специального вида $\sigma_2 J$ (5.17) и $r = 3$, а также для случая, когда $\sigma_2 J$ на базисные вектора$\{h_k(x)\}_1^r$ действует по формулам (5.19) установлено, что вектора $\{h_k(x)\}_1^r$ выражаются через тригонометрические функции аргумента, зависящего от вида $\sigma_2 J$.

## 5.1. Описание решений системы (5.1) при $r = 3$

В случае, когда $J \neq I$ и $\alpha(x) = 0$ система (1.22) примет вид

$$\begin{cases} [Ja(x), \gamma(x)J] = 0, \quad x \in [0,l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], \quad x \in [0,l], \\ \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пусть $Ja(x)$ матрица-функция с простым спектром. Выберем базис $h_k(x)$ так, чтобы

$$Ja(x)h_k(x) = \mu_k(x)h_k(x), \tag{5.2}$$

где $\mu_k(x)$ - комплекснозначные собственные значения матрицы $Ja(x)$ и $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$ $(k \neq s)$, такие, что при $\forall x \in [0,l]$ матрица $Ja(x)$ в базисе $\{h_k(x)\}_1^r$ приводится к диагональному виду.

**Лемма 5.1.** *Если $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)(k \neq s)$, то вектора $Jh_k(x)$ и $h_s(x)$ ортогональны при $(k \neq s)$ и каждом $x \in [0,l]$.*

*Доказательство.* Принимая во внимание (5.2), имеем

$$a(x)h_k(x) = \mu_k(x)Jh_k(x), \; a(x)h_s(x) = \mu_s(x)Jh_s(x). \tag{5.3}$$

Домножим скалярно первое уравнение (5.3) на $h_s(x)$, а второе на $h_k(x)$, получим

$$\begin{aligned} \langle a(x)h_k(x), h_s(x)\rangle &= \mu_k(x)\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle, \\ \langle a(x)h_s(x), h_k(x)\rangle &= \mu_s(x)\langle Jh_s(x), h_k(x)\rangle. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Вычитая из первого уравнения (5.4) комплексно сопряженное второе, мы будем иметь $(\mu_k(x) - \overline{\mu}_s(x))\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle = 0$. Так как $Ja(x)$ гладкая матрица с простым спектром и $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$ при $k \neq s$, то $\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle = 0$, значит вектора $Jh_k(x)$ и $h_s(x)$ ортогональны. □

В дальнейшем будем считать, что $\langle Jh_k(x), h_k(x)\rangle = 1$.
Введем обозначение

$$\sigma_2 Jh_k(x) = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{sk}(x)h_s(x),\ \langle \sigma_2 Jh_k(x), Jh_s(x)\rangle = \alpha_{sk}(x), \quad (1 \leq k, s \leq r), \tag{5.5}$$

где $\alpha_{sk}(x)$ - вещественные функции. Воспользуемся первым уравнением системы (5.1):

$$\begin{aligned} \gamma'(x)Jh_k(x) &= iJa(x)\sigma_2 Jh_k(x) - i\sigma_2 JJa(x)h_k(x) \\ = i(Ja(x) - \mu_k(x))\sigma_2 Jh_k(x) &= i\sum_{s=1}^{r} \alpha_{sk}(x)\left(Ja(x) - \mu_k(x)\right)h_s(x) \\ &= i\sum_{s\neq k} \alpha_{sk}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right)h_s(x). \end{aligned} \tag{5.6}$$

**Лемма 5.2.** *Пусть при каждом $x \in [0, l]$ матрица-функция $Ja(x)$ имеет простой спектр и $\{h_k(x)\}_1^r$ - базис соответствующих собственных векторов.*
*Тогда вектора $\gamma(x)Jh_k(x)$ также являются ее собственными векторами, причем $\gamma(x)Jh_k(x) = \xi_k(x)h_k(x)$, где $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$.*
*Если $\xi_k(x)$ - вещественные, то они не зависят от $x$.*

*Доказательство.* Учитывая второе уравнение системы (5.1), имеем: $Ja(x)\gamma(x)Jh_k(x) =$
$= \gamma(x)JJa(x)h_k(x) = \gamma(x)J\mu_k(x)h_k(x) = \mu_k(x)\gamma(x)Jh_k(x)$. Таким образом, получили, что в случае простого спектра матрицы $Ja(x)$ векторы

$\gamma(x)Jh_k(x)$ являются собственными векторами этой матрицы

$$\gamma(x)Jh_k(x) = \xi_k(x)h_k(x). \tag{5.7}$$

Предположим, что собственные значения $\xi_k(x)$ оператора $\gamma(x)$ зависят от $x$, продифференцируем соотношение (5.7),

$$\gamma'(x)Jh_k(x) + \gamma(x)Jh'_k(x) = \xi_k(x)h'_k(x) + \xi'_k(x)h_k(x). \tag{5.8}$$

Умножим скалярно обе части равенства (5.8) на $Jh_k(x)$, учитывая $\langle Jh_k(x), h_s(x)\rangle = \delta_k^s$, соотношение (5.5), получим:

$$\begin{gathered}\left\langle i\sum\nolimits_{s\neq k}\alpha_{sk}(x)\left(\mu_s(x)-\mu_k(x)\right)h_s(x), Jh_k(x)\right\rangle = \\ = \langle\xi_k(x)h'_k(x), Jh_k(x)\rangle - \langle\gamma(x)Jh'_k(x), Jh_k(x)\rangle + \xi'_k(x)\left\langle h_k(x), Jh_k(x)\right\rangle.\end{gathered} \tag{5.9}$$

То есть $0 = \langle\xi_k(x)h'_k(x), Jh_k(x)\rangle - \langle Jh'_k(x), \gamma(x)Jh_k(x)\rangle + \xi'_k(x)$.
В силу самосопряженности $\gamma(x)$, вещественности $\xi_k(x)$ и (5.7)
$\langle\xi_k(x)h'_k(x), Jh_k(x)\rangle - \langle\xi_k(x)h'_k(x), Jh_k(x)\rangle + \xi'_k(x) = 0$, значит $\xi'_k(x) = 0$, следовательно, $\xi_k$ не зависят от $x$. □

**Лемма 5.3.** *Пусть $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$ - собственные значения оператора $\gamma(x)J$, тогда $\xi_k(x)$ допускают представления $\xi_k(x) = v_k\left(2\int\limits_0^x n_k(x)dt + i\right)$, где $\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle = in_k(x)$, и $n_k(x), v_k \in \mathbb{R}$, причем $v_k$ от $x$ не зависят.*

*Доказательство.* В случае, когда $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$, из соотношения (5.9) следует

$$\left(\xi_k(x) - \overline{\xi_k(x)}\right)\langle Jh'_k(x), h_k(x)\rangle + \xi'_k(x) = 0. \tag{5.10}$$

Продифференцируем соотношение $\langle Jh_k(x), h_k(x)\rangle = 1$, получим

$$\langle Jh'_k(x), h_k(x)\rangle + \langle Jh_k(x), h'_k(x)\rangle = 0. \tag{5.11}$$

Обозначим $\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle = m_k(x) + in_k(x)$, где $m_k(x), n_k(x) \in \mathbb{R}$.
В силу самосопряженности $J$ и (5.11), получим, что

$$m_k(x) + in_k(x) + m_k(x) - in_k(x) = 0,$$

то есть $Re(\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle) = 0$, или $\langle J(h_k(x))', h_k(x)\rangle = in_k(x)$. Обозначим $\xi_k(x) = c_k(x) + iv_k(x)$, где $c_k(x), v_k(x)$ вещественные функции. Подставим в (5.10), получим

$$2iv_k(x) \cdot in_k(x) + (c_k(x))' + i(v_k(x))' = 0.$$

Приравняем вещественные и мнимые части

$$(c_k(x))' = 2n_k(x)v_k(x),$$

$$(v_k(x))' = 0.$$

Откуда следует, что $v_k(x) = v^k - const$, а $c_k(x) = 2\int\limits_0^x n_k(x)v^k dt$. □

**Теорема 5.1.** *Пусть* $\mu_k(x) \in \mathbb{C}$ *- собственные значения* (5.2) *матрицы* $Ja(x)$, *а* $\{h_k(x)\}_1^r$ *соответствующий базис собственных векторов, причем* $\mu_k(x) \neq \overline{\mu}_s(x)$, $(k \neq s)$. *Если* $\xi_k(x) \in \mathbb{C}$ *- собственные значения* (5.7) *оператора* $\gamma(x)J$, *тогда справедливо соотношение*

$$h_k'(x) = i\sum_{s\neq k} \alpha_{sk}(x)\frac{\mu_s(x) - \mu_k(x)}{\xi_k(x) - \overline{\xi_s(x)}}h_s(x). \tag{5.12}$$

*Доказательство.* Согласно лемме 5.3, $\xi_k(x) = 2\int\limits_0^x n_k(x)v_k dt + iv_k$, где $\langle Jh_k'(x), h_k(x)\rangle = m_k(x) + in_k(x)$, а $m_k(x), n_k(x), v_k \in \mathbb{R}$. Продифференцируем соотношение (5.7), получим (5.8). Применив соотношение (5.6), придем к:

$$i\sum_{p\neq k} \alpha_{pk}(x)\left(\mu_p(x) - \mu_k(x)\right)h_p(x) + \gamma(x)Jh_k'(x) =$$
$$= \xi_k(x)h_k'(x) + 2n_k(x)v_k h_k(x). \tag{5.13}$$

Домножим (5.13) скалярно на $Jh_s(x)$, получим $i\alpha_{sk}(x)\left(\mu_s(x) - \mu_k(x)\right) + $ $+\langle Jh_k'(x), \gamma(x)Jh_s(x)\rangle = \xi_k(x)\langle h_k'(x), Jh_s(x)\rangle + \langle 2n_k(x)v_k h_k(x), Jh_s(x)\rangle$. Разложим $h_k'(x)$ по базисным векторам $h_k(x)$, учитывая лемму 5.1, тогда $h_k'(x) = \sum\limits_{s=1}^r \eta_{ks}(x)h_s(x)$, где $\eta_{ks}(x) = \langle h_k'(x), Jh_s(x)\rangle$. В случае $s \neq k$, получим

$$i\alpha_{sk}(x)\left(\mu_s(x)-\mu_k(x)\right)=\left(\xi_k(x)-\overline{\xi_s(x)}\right)\langle (h_k(x))', Jh_s(x)\rangle = \\ \left(\xi_k(x)-\overline{\xi_s(x)}\right)\eta_{ks}(x). \tag{5.14}$$

В результате получим (5.12). □

**Лемма 5.4.** *Выражение* (5.12) *для* $h'_k(x)$ *имеет устранимую особенность при* $\xi_k(x)=\overline{\xi_s(x)}$.

*Доказательство.* Из соотношения (5.14) видно, что при $\xi_k(x)=\overline{\xi_s(x)}$ получим

$\alpha_{sk}(x)=0$, поэтому мы вправе писать выражение для $h'_k(x)$ в виде (5.12). □

Рассмотрим случай $dimE=3$, тогда система (5.12) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h'_1(x)=i\cdot \\ \left(\alpha_{21}(x)\dfrac{\mu_2(x)-\mu_1(x)}{\xi_1(x)-\overline{\xi_2(x)}}h_2(x)+\alpha_{31}(x)\dfrac{\mu_3(x)-\mu_1(x)}{\xi_1(x)-\overline{\xi_3(x)}}h_3(x)\right); \\ h'_2(x)=i\cdot \\ \left(\alpha_{12}(x)\dfrac{\mu_1(x)-\mu_2(x)}{\xi_2(x)-\overline{\xi_1(x)}}h_1(x)+\alpha_{32}(x)\dfrac{\mu_3(x)-\mu_2(x)}{\xi_2(x)-\overline{\xi_3(x)}}h_3(x)\right); \\ h'_3(x)=i\cdot \\ \left(\alpha_{13}(x)\dfrac{\mu_1(x)-\mu_3(x)}{\xi_3(x)-\overline{\xi_1(x)}}h_1(x)+\alpha_{23}(x)\dfrac{\mu_2(x)-\mu_3(x)}{\xi_3(x)-\overline{\xi_2(x)}}h_2(x)\right); \\ h_i(0)=h_i^0,\ i=1,2,3. \end{cases} \tag{5.15}$$

Обозначим

$$d(x)=\frac{\mu_2(x)-\mu_1(x)}{\xi_1(x)-\overline{\xi_2(x)}},$$

$$g(x)=\frac{\mu_3(x)-\mu_2(x)}{\xi_2(x)-\overline{\xi_3(x)}},$$

$$f(x)=\frac{\mu_1(x)-\mu_3(x)}{\xi_3(x)-\overline{\xi_1(x)}}.$$

В результате система (5.15) запишется в следующей форме:

$$\begin{cases} h_1'(x) = i\left(\alpha_{21}(x)d(x)h_2(x) + \alpha_{31}(x)\overline{f(x)}h_3(x)\right); \\ h_2'(x) = i\left(\alpha_{12}(x)\overline{d(x)}h_1(x) + \alpha_{32}(x)g(x)h_3(x)\right); \\ h_3'(x) = i\left(\alpha_{13}(x)f(x)Jh_1(x) + \alpha_{23}(x)\overline{g(x)}h_2(x)\right); \\ h_i(0) = h_i^0,\ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{5.16}$$

## 5.2. Решение системы уравнений (5.16) при $r = 3$ (случай 1)

Предположим, что оператор $\sigma_2 J$ действует на базисные вектора $\{h_i(x)\}_1^3$ так:

$$\begin{cases} \sigma_2 J h_1(x) = \psi(x)h_1(x), \\ \sigma_2 J h_2(x) = \nu(x)h_3(x), \\ \sigma_2 J h_3(x) = \overline{\nu}(x)h_2(x), \end{cases} \tag{5.17}$$

где $\psi(x)$ - вещественная, а $\nu(x)$ - комплекснозначная функция. В силу ортогональности векторов $Jh_k(x)$ и $h_s(x)$, и (5.5), имеем: $\alpha_{12}(x) = \alpha_{21}(x) = \alpha_{13}(x) = \alpha_{31}(x) = 0,\ \alpha_{32}(x) = \nu(x),\ \alpha_{23}(x) = \overline{\nu}(x)$. Обозначим $g(x)\nu(x) = c(x)$. Тогда система (5.16) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = 0, \\ h_2'(x) = ic(x)h_3(x), \\ h_3'(x) = i\overline{c}(x)h_2(x), \\ h_i(0) = h_0^i,\ i = 1,2,3; \end{cases} \tag{5.18}$$

Отсюда следует, что $h_1(x) = h_1^0$.

Полученная система совпадает с системой (4.12), поэтому для нее будут верны результаты п.3.2.

## 5.3. Решение системы уравнений (5.16) при $r = 3$ (случай 2).

Пусть оператор $\sigma_2 J$ действует на базисные вектора $\{h_k(x)\}_1^3$ следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_2 J h_1(x) = \psi(x) h_1(x) + \rho(x) h_3(x), \\ \sigma_2 J h_2(x) = \qquad\qquad \nu(x) h_3(x), \\ \sigma_2 J h_3(x) = \overline{\rho}(x) h_1(x) + \overline{\nu}(x) h_2(x), \end{cases} \tag{5.19}$$

где $\psi(x)$ - вещественная функция, а $\nu(x)$, $\rho(x)$ - комплекснозначные функции. В силу ортогональности векторов $Jh_k(x)$ и $h_s(x)$ и (5.5), получим: $\alpha_{12}(x) = \alpha_{21}(x) = 0$, $\alpha_{13}(x) = \overline{\rho}(x)\|h_1(x)\|^2$, $\alpha_{31}(x) = \rho(x)\|h_3(x)\|^2, \alpha_{23}(x) = \overline{\nu}(x)\|h_2(x)\|^2$, $\alpha_{32}(x) = \nu(x)\|h_3(x)\|^2$.
Таким образом, система (5.19) будет иметь вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = i\rho(x) f(x) h_3(x), \\ h_2'(x) = i\nu(x) g(x) h_3(x), \\ h_3'(x) = i\overline{\rho}(x) f(x) h_1(x) + i\overline{\nu}(x) g(x) h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{5.20}$$

Пусть $\nu(x)g(x) = c(x)$; $\rho(x)f(x) = k(x)$, а $c(x) = a(x) + ib(x)$, $k(x) = m(x) + in(x)$, где $a(x), b(x), m(x), n(x) \in \mathbb{R}$. В случае, когда $c(x) = a(x)$, $k(x) = m(x)$, система (5.20) примет вид:

$$\begin{cases} h_1'(x) = im(x) h_3(x), \\ h_2'(x) = ia(x) h_3(x), \\ h_3'(x) = im(x) h_1(x) + ia(x) h_2(x), \\ h_i(0) = h_i^0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{5.21}$$

Полученная система совпадает с системой (4.36), поэтому для нее будут верны результаты п.3.3.

## 5.4. Выводы к разделу 5

1. Получены уравнения для собственных функций матрицы $Ja(x)$ в терминах собственных значений $Ja(x)$ и собственных чисел оператора $\gamma(x)J$ в случае простого спектра (теорема 4.1).
2. Установлено, что в изучаемом случае решения системы (5.16) выражаются через тригонометрические функции от аргумента, зависящего от $x$, который строится по матрице $\sigma_2$.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены явные формулы, выражающие решение системы типа Лакса (2.2) в случае $r = 2$ и $J = I$ (теорема 2.1).
2. Предъявлено решение более общей задачи (2.12) в случае $r = 2$ и произвольном $J$ (теорема 2.2).
3. Получено описание общих изоспектральных свойств решений системы (2.2).
4. Установлено, что система (2.26) специальной заменой сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью (теорема 2.3, замечание 2.2).
5. Указан пошаговый процесс с помощью теоремы 2.3 нахождения всех решений системы (2.26).
6. Описаны решения системы (2.26) в случае линейной и квадратичной зависимости $a(x)$ от $\gamma(x)$ и $r = 2$ (предложение 2.3, следствие 2.1).
7. Дано описание всех решений системы типа Лакса при условии, что $r = 3$ и матрицы $\sigma_2$, $\gamma^+$ имеют простой спектр. Получен явный вид решения в терминах обратного эллиптического интеграла (теорема 3.1 и замечание 3.1), которое в частном случае явно выражается через эллиптические функции Якоби (следствие 3.2 и пример 3.2).
8. При квадратичной зависимости матрицы $a(x)$ от $\gamma(x)$ ($r = 4$) получены решения системы (2.26) (теорема 3.3) В частном случае решения допускают представления в терминах тригонометрических и гиперболических функций (следствие 3.3).
9. В случае кубической зависимости матрицы $a(x)$ от $\gamma(x)$ и $r = 4$ найдены решения (2.26) (теорема 3.5), которые при специальном выборе $\gamma^+ = diag(\lambda_1, ..., \lambda_4)$ допускают представления с помощью эллиптических функций Якоби (следствие 3.4).

10. Получены уравнения для собственных функций матрицы $a(x)$ в терминах собственных значений $a(x)$ и собственных чисел оператора $\gamma(x)$ (теорема 4.1).
11. Найдены решения системы уравнений (4.10) в случае $r = 3$ и простого спектра гладкой матрицы $a(x)$, при заданном операторе $\sigma_2$ (4.11) (теоремы 4.2, 4.3).
12. Получены решения системы уравнений (4.10) в случае в случае простого спектра гладкой матрицы $a(x)$ и $r = 3$ при заданном операторе $\sigma_2$ (4.27) (леммы 4.3, 4.5, 4.6 теоремы4.4,4.5).
13. Получены выражения $\langle h_k'(x), h_s(x)\rangle$, $(k \neq s,\ k, s = \overline{1,3})$, где $h_s(x)$ - собственные функции гладкой матрицы $a(x)$, в случае ее кратного спектра и $r = 3$.
14. Описаны решения системы 4.84 в случае кратного спектра $a(x)$ и $r = 3$ при дополнительных условиях (лемма 4.7, теорема 4.6).
15. Получены уравнения для собственных функций матрицы $Ja(x)$ в терминах собственных значений $Ja(x)$ и собственных чисел оператора $\gamma(x)J$ в случае простого спектра (теорема 3.1).
16. Установлено, что в изучаемом случае решения системы (5.16) выражаются через тригонометрические функции от аргумента, зависящего от $x$, который строится по матрице $\sigma_2$.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Alpay D., Vinnikov V. Finite dimensional de Branges spaces on Riemann surfaces./D. Alpay, V. Vinnikov// J. of Functional Analysis. – 2002. – Vol. 189. – P. 283 – 324.
2. Ando T. On a pair of commutative contractions./T. Ando// Acta Sci. Math.. – 1963. – Vol. 24. – P. 88 - 90.
3. Arlinskii Yu., Belyi S., Tsekanovskii E. Conservative realizations of Herglotz-Nevanlinna functions./Yu. Arlinskii, S. Belyi, E. Tsekanovskii//Operator Theory Advances and Applications. Birkhäuser. – 2011. – Vol. 217. – 547 pp.
4. Arov D. Z., Dym H. Strongly regular-inner matrix functions and related problems./D. Z. Arov, H. Dym // Operator Theory: Advances and Applications. – 2004. – Vol. 149. – P. 79 - 106.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций./Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1970. – 303 с.
6. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях./Н. И. Ахиезер. – Харьков, Изд. ХГУ, 1984. – 120 с.
7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. т. 1./Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Харьков, Изд. ХГУ, 1977. – 315 с.
8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. т. 2./Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Харьков, Изд. ХГУ, 1978. – 288 с.
9. Bart H., Gohberg I., Kaashoek M. Couvohition equations and linear systems./H Bart.,I. Gohberg, M. Kaashoek // Integral equations and operator theory. – 1982. – Vol. 5, №3, P. 283 - 340.
10. Baker H. F. Note on the foregoing paper "Commutative ordinary differential operators"J. L. Burchnall and T. W. Chaundy./H. F. Baker// Proc. Royal Soc. London. – 1928. – Vol.118. – P. 584 - 593.

11. Berg Ch., Christensen J., Ressel P. Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions./Ch. Berg, J. Christensen, P. Ressel. – Springer-Verlag. New-York. – 1984. – 289 p.
12. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов./Ю. М. Березанский. – К.: Наукова думка. – 1965. – 798 с.
13. Бирман М. Ш., Крейн М. Г. К теории волновых операторов и операторов рассеяния./ М. Ш. Бирман, М. Г. Крейн // Доклады АН СССР, сер. мат.. – 1962. – Т. 144, № 3, С. 475 - 478.
14. Ball J., Sadosky C., Vinnikov V. Scattering systems with several evolutions and multidimensional input/state/output systems. /J. Ball, C. Sadosky, V. Vinnikov// Integral equations and operator theory. – 2005. – Vol. 52. – P. 323 - 393.
15. Ball J. A., Helton J. W. Lie groups over the field of rational functions, signed spectral factorization, signed interpolation and amplifier design. /J. Ball, J. W. Helton // Operator theory, Bucharest. – 1982. – Vol. 8, № 1. – P. 19 - 64.
16. Ball J. A., Helton J. W. A Benrling - Lax theorem for the Lie group U(n, m) which contains most classical interpolation theory. /J. Ball, J. W. Helton// Operator Theory, Bucharest. – 1983. – Vol. 9, № 1.– P. 107 - 142.
17. Briem E., Davie A. M., Oksendal B. K. A functional calculus for pairs of commuting contractions./E. Briem, A. M. Davie, B. K. Oksendal// J. London Math. Soc.. – 1974. – Vol. 7, № 4. – P. 709 - 718.
18. de Branges L. Hilbert spaces of entire functions./ L. de Branges. – Prentice - Hall, London. – 1968. – 326 p.
19. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов./М. С. Бродский. – М.: Наука. – 1969. – 287 с.
20. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы./М. С. Бродский, М. С. Лившиц // УМН/ – 1958. – Т. XII, № 1/79. – С. 3 - 86.

21. Burchnall J. L., Chandy T. W. Commutative ordinary differential operators./J. L. Burchnall, T. W. Chandy// Proc. London Math. Soc.. – 1922. – Vol. 21. – P. 120 - 440.
22. Ваксман Л. Л. О характеристических оператор-функциях алгебр Ли./Л. Л. Ваксман // Вестник Харьк. ун-та. Сер. мат. и мех.. – 1972. – № 33, вып. 37. – С. 41 - 45.
23. Ваксман Л. Л. Голоморфные функции в поликруге и семейства коммутирующих сжатий./Л. Л. Ваксман // Рукопись Деп в ВИНИТИ, РЖ "Мат 4Б191Деп. – 1976. – 15 с.
24. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области./Н. Винер, Р. Пэли. – М.: Наука, 1964. – 267 с.
25. Vinnikov V. Commuting nonselfadjoint operators and algebraic curves./V. Vinnikov// Operator Theory Adv. and Appl.. – 1992. – Vol. 59. – P. 348 - 371.
26. Vinnikov V. Selfadjoint determinantal reprsentations of real plan curves./V. Vinnikov // Math. Ann.. – 1993. – Vol. 296. – P. 453 - 479.
27. Винников В. (Vinnikov V.) Commuting operators and function theory on a Riemann surfaces./V. Vinnikov // Holomorphic Spaces, MSRI Publications (Cambridge Univer. Press). – 1998. – Vol. 33. – P. 445 - 476.
28. Voichek M. Ideals and invariant subspaces of analytic functions./M. Voichek // Trans. Amer. Math. Soc.. – 1964. – Vol. 111. – P. 493 - 512.
29. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции./Дж. Гарнет. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
30. Гахов Ф. Д. Краевые задачи./Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
31. Golinskii L., Mikhailova I. Hilbert spaces of entire functions as a J-theory subject./ L. Golinskii, I. Mikhailova// Operator Theory, Adv. and Appl.. – 1997. – Vol. 95. – P. 205 - 251.

32. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов./И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
33. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения./И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
34. Griffiths Ph. A. Introduction to algebraic curves./Ph. A. Griffiths. – AMS. Transl. of mathematical monographs. Vol. 76. – 1989. – 229 p.
35. Гурарий В. П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа./В. П. Гурарий// Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем. фундам. направления, ВИНИТИ. – 1988. – Т. 25. – С. 4 - 303.
36. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
37. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения./Б. А. Дубровин // УМН. – 1981. – Т. 36, вып. 2. – С. 11 - 80.
38. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи./В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
39. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов./В. А. Золотарев. – Харьков: Mag Press, ХНУ, 2003. – 342 с.
40. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности./В. А. Золотарев // Мат. сб.. – 1990. – Т. 181, № 7. – С. 965 - 994.
41. Золотарев В. А. Коммутативные системы несамосопряженных (неунитарных) операторов и их модельные представления./В. А. Золотарев. – Днепропетровск: Середняк Т.К., ХНУ, 2014. – 672 с.

42. Золотарев В. А. Модельные представления коммутирующих систем линейных операторов./В. А. Золотарев// Функц. анализ и его прил.. – 1988. – № 22. – С. 66 - 68.
43. Золотарев В. А. Схема рассеяния Лакса - Филлипса на группах и функциональные модели алгебры Ли./В. А. Золотарев // Мат. сб.. – 1992. – 183:5. – С. 115 - 144.
44. Золотарев В. А. Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов./В. А. Золотарев// Рукопись Деп. в ВИНИТИ, РЖ "Мат 1Б916Деп. – 1981. – 66 с.
45. Золотарев В. А. Функциональные модели на римановой поверхности. /В. А. Золотарев // Теория функций, функц. анализ и их прил.. – Харьков, 1991, вып. 56. – С. 123 - 128.
46. Janas J., Kurasov P., Laptev A., Naboko S., Stolz G. Methods of spectral analysis in mathematical physics./J. Janas, P. Kurasov, A. Laptev, S. Naboko, G. Stolz. Oper. Theory: Advances and Applications, 2006. – Vol. 186. – 443 pp.
47. Като Т. Теория возмущений линейных операторов./Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
48. Constantinescu T. Shur parameters, factorizaion and dilation problems./T. Constantinescu. – Birkhauser - Verlag, Basel - Boston - Berlin, 1996. – 376 p.
49. Kravitsky N. On the discriminant function of two commuting nonselfadjoint operators./N. Kravitsky// Integral Equation, Operator Theory. – 1980. – Vol. 3, № 1. – P. 97 - 124.
50. Kravitsky N. Regullar colligations for several commuting operators in Banach space./N. Kravitsky// Int. Equations and Operator Theory. – 1983. – Vol. 6, № 2. – P. 224 - 249.
51. Kravitsky N. On commuting integral operators./N. Kravitsky// Oper. Theory Adv. Appl.. – 1984. – № 12. – P.319 - 333.

52. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений./И. М. Кричевер // УМН. – 1977. – Т. 32, № 6. – С. 183 - 208.
53. Kuzhel A. Characteristic functions and models of nonselfadjoint operators./A. Kuzhel. – Kluwer academic publ., Dordreht - London. – 1996. – 266 p.
54. Кусис П. Введение в теорию пространств./П. Кусис. – М.: Мир, 1984. – 364 с.
55. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма - Лиувилля./Б. М. Левитан. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
56. Лившиц М. С. Коммутирующие несамосопряженные операторы и порождаемые ими решения систем дифференциальных уравнений в частных производных./М. С. Лившиц// Сообщ. АН ГрузССР. – 1978. – 91, № 2. – С. 281 - 284.
57. Livšic M. S. The inverse problem for the characteristic functions of several commuting operators./M. S. Livšic// Integral Equations and Operator Theory. – 1979, Vol. 2/21. – P. 264 - 284.
58. Livšic M. S. A method for constructing triangular, canonical models of commuting operators based on connections with algebraic curves./M. S. Livšic // Integral Equations and Operator Theory. – 1980. – Vol. 3/4. – P. 489 - 507.
59. Livšic M. S. Vortices f 2D systems./M. S. Livšic // Operator Theory, Adv. and Appl.. – 2001. – Vol. 123. – P. 7 - 41.
60. Livšic M. S., Waksman L. L. Commuting nonselfadjoint operators in Hilbert space./M. S. Livšic, L. L. Waksman. – Lect. Notes Math., 1987. – № 1272. – 115 p.
61. Livšic M. S., Kravitsky N., Markus A., Vinnikov V. Theory of commuting nonselfadjoint operators./M. S. Livšic, N. Kravitsky, A. Markus, V. Vinnikov. – Kluwer academic publ., Dordreht-London. – 1995. – 332 p.

62. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах./М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. – Харьков, Изд. Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.

63. Ломоносов В. И. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным.// В. И. Ломоносов./ Функц. анализ и его прил.. – 1973. – Т. 7, вып. 3. – С. 55 – 56.

64. Лунев А. А., Олейник Е. В. Об одном классе систем уравнений типа Лакса/А. А. Лунев, Е. В. Олейник// Український математичний вісник. – 2013. – Т.10, № 4. – С. 507–531.

65. Лунев А. А., Олейник Е. В. Об одном классе систем уравнений типа Лакса/А. А. Лунев, Е. В. Олейник//Доповіді Національної академії наук України. – 2015. – № 1.– С. 25-30.

66. Lunyov A. A., Oliynyk E. V. On Integration of One Class of Systems of Lax-Type Equations /A. A. Lunyov, E. V. Oliynyk// Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry – 2014. – Vol.11. – №1. – P. 45 -62.

67. Любич Ю. И. Линейный функциональный анализ./Ю. И. Любич// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат., Фунд. направл.. – 1988. – Т. 19. – С. 5 - 305.

68. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях./Д. Мамфорд – М.: Мир, 1988. – 446 с.

69. Надь Б. С., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве./Б. С. Надь, Ч. Фояш – М.: Мир, 1970. – 431 с.

70. Sz.-Nagy B., Foias C., Bercovici H., Kerchy L. Harmonic analysis of operators on Hilbert space./B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kerchy. – Universitext, Springer, 2010. – 473 p.

71. Neidhardt H. Scattering matrix, phase shift and spectral shift for a nuclear dissipative scattering theory./H. Neidhardt// Report R-Math-05/85, Adw der DDR, Berlin, 1985. – 70 p.

72. Nikolski N. K. Operator, Functions, and Systems: An Easy Reading. Volum 1: Hardy, Hankel, and Toeplitz. Mathem. Surv. and Monogr../N. K. Nikolski. – Amer. Mathem. Soc., 2002 – Vol. 92. – 458 p.
73. Nikolski N. K. Operator, Functions, and Systems: An Easy Reading. Volum 2: Model Operators and Systems.Mathem. Surv. and Monogr.,/N. K. Nikolski. – Amer. Mathem. Soc., 2002 – Vol. 93. – 438 p.
74. Олейник Е. В. Об интегрировании нелинейной системы дифференциальных уравнений//Український математичний журнал. – 2014. – Т.66, № 9.– С. 1223–1234.
75. Олейник Е. В. Об интегрировании одной нелинейной системы дифференциальных уравнений/ Е. В. Олейник//Современные проблемы математики "Тараповские чтения - 2013": тез. докладов международной школы-конф., 29 сентября - 4 октября 2013 г., Харьков. – 2013. – С. 105.
76. Олейник Е. В. Исследование одного класса систем уравнений типа Лакса/Е. В. Олейник// Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B.Lopatinskii, 14 - 17 листопада 2012: conference materials. – Донецьк. – 2012. – P. 57-58.
77. Олейник Е. В. Некоторые решения специальной системы нелинейных уравнений/Е. В. Олейник// Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях "Тараповские чтения - 2012": тез. докладов межд.конф., 01 - 31 мая 2012г., Харьков. – 2012. – С. 83.
78. Олейник Е. В. О собственных векторах одного класса систем уравнений типа Лакса /Е. В. Олейник//Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння теорія функцій та їх застосування"з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка : тез. доповідей конф., 23-30 червня 2013 р. – Севастополь. – 2013. – С. 148.

79. Олейник Е. В. Решение нелинейных уравнений специального вида /Е. В. Олейник// Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика та механіка". – 2012. – № 1018. – С. 62–75.

80. Олейник Е. В. Решение нелинейных уравнений специального вида/Е. В. Олейник// Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука: міжн.наук.конф., 19 - 21 квітня 2012 р.: матеріали конференції. – Київ. – 2012. – С. 328.

81. Oliynyk E. V. The study of one class non-linear equations of a special kind. /E.V.Oliynyk.//Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012) International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday:Abstracts of conference reports, August 20-24, 2012. – Kharkiv. – P. 82-83.

82. Павлов Б. С., Федоров С. И. Группа сдвигов и гармонический анализ на римановой поверхности рода один. /Б. С. Павлов, С. И. Федоров// Алгебра и анализ. – 1989. – Т. 1, вып. 2. – С. 132 - 168.

83. Потапов В. П.. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций. /В. П. Потапов// М.: ГИТТЛ, Тр. ММО. – 1955. – Т. 4. – С. 125–236.

84. Rudin W. Analitic functions of class./W. Rudin// Trans. Amer. Math. Soc.. – 1955. – Vol. 78. – P. 46 - 66.

85. Самойленко Ю. С. Спектральная теория наборов самсопряжённых операторов./Ю. С. Самойленко. – К.:"Наукова думка 1984. – 231 с.

86. Slocinski M. Isometric dilation of doubly commuting con-tractions and related models./M. Slocinski// Bull. Academ. Polon.; ser. math., astr. et phis.. – 1977. – Vol. 25, № 12, P. 1233 - 1240.

87. Slocinski M. Characteristic functions of doubly commuting contractions./M. Slocinski// Bull. Academ. Polon.; ser. math., astr. et phis.. – 1980. – Vol. 28, № 7 - 8. – P. 351 - 360.

88. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей./Дж. Спрингер. – М.: Изд-во ин. лит., 1960. – 344 с.

89. Sucin N. Absolutely continuous semispectral measures for pair of commuting contractions./N. Sucin// Rev. Roum. Math. Pure at Appl.. – 1981. – № 4. – P. 653 - 657.
90. Susin N., Valusescu I. The maximal function of doubly commuting contractions./N. Sucin, I. Valusescu// Top. Mod. Oper. Theory 5, Int. Conf. Oper. Theory, Timicoara, Basel. – 1981. – P. 295 - 309.
91. Hasumi M. Invariant subspaces theorems for Riemann surfaces./M. Hasumi // Proc. Int. Symp. "Funct. Algebras"ed. F. Birtel, Chicago. – 1966. – P. 250 - 256.