

ВІДГУК

**офіційного опонента на дисертацію Ковальова Юрія Григоровича
«Невід'ємні самоспряжені розширення і моделі точкових взаємодій»,
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за
спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз**

Дисертаційна робота Ю. Г. Ковальова присвячена одному з важливих розділів функціонального аналізу – теорії розширень лінійних операторів, що діють у гільбертовому просторі. Відзначимо, що різноманітні питання цієї теорії досліджувалися у працях багатьох відомих математиків (як вітчизняних, так і закордонних), про результати яких достатньо повно згадано у рецензованій дисертаційній роботі. Маємо на увазі, перш за все, праці Дж. фон Неймана, К. Фрідрікса, М. Г. Крейна, М. Й. Вішіка, М. Ш. Бірмана. Основні результати згаданих праць сформульовано, як правило, в термінах дефектних просторів.

Інший підхід, ініційований, мабуть, J. W. Calkin-ом, і розвинутий в роботах Ф. С. Рофе-Бекетова, В. І. Горбачук та М. Л. Горбачука, А. Н. Кочубея, В. А. Михайлеця, В. М. Брука, Е. Р. Цекановського, Ю. М. Арлінського, В. О. Деркача, М. М. Маламуда та багатьох інших математиків – це метод абстрактних граничних операторів (за іншою термінологією – просторів граничних значень (ПГЗ), або ж граничних трійок) та відповідних функцій Вейля, який дозволяє формулювати результати у вигляді, який у випадку диференціальних операторів приводить безпосередньо до крайових умов. Як справедливо зазначає автор, «теорія самоспряжених розширень невід'ємного симетричного оператора з успіхом застосовується для дослідження (деяких) квантово-механічних моделей» (зокрема, моделей точкових взаємодій, про які йде мова в дисертації).

Зауважимо, однак, що теорія розширень лінійних операторів, діючих у гільбертовому просторі, перш за все, терія розширень нещільно визначених лінійних операторів, а також теорія розширень лінійних відношень («багатозначних операторів») ще далека до завершення. Тому актуальною, на нашу думку, є тема дисертаційної роботи Ю. Г. Ковальова.

Дисертація складається зі вступу, шести розділів, розбитих на підрозділи та пункти, висновків та списку літератури, який включає 96 назв.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок з науковими програмами та планами наукової роботи (думаю, що не тільки) кафедри математичного аналізу Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля у рамках держбюджетних тем «Аналітичні функції у спектральній теорії лінійних операторів у гільбертовому просторі» та «Перетворення Шура для операторнозначних аналітичних функцій та його застосування до лінійних систем і проблеми моментів», сформульовано мету і задачі дослідження, відзначено наукову новизну отриманих результатів.

У першому розділі наведено детальний огляд літератури (за темою дисертації), присвяченої теорії лінійних відношень, зокрема, лінійних операторів, діючих у гільбертовому просторі, та відповідних півторалінійних форм. Мова йде, в основному, про акретивні, перш за все, секторіальні,

оператори. Нагадано також основні положення теорії розширень лінійних операторів (розширення за Фрідріхсом, розширення Крейна, метод граничних трійок та функцій Вейля, тощо).

Виклад основних результатів дисертаційної роботи починається з розділу 2, присвяченого дослідженню екстремальних розширень (тобто розширень Фрідрікса та Крейна) невід'ємних симетричних операторів, поданих у дивергентній формі. Крім цього, у розділі 2 мова йде про факторизацію невід'ємних симетричних операторів (підрозділ 2.2). Тут побудовано приклад невід'ємного симетричного оператора \mathcal{L}_0 та його невід'ємного самоспряженого розширення \mathcal{L} таких, що $\text{dom}(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$ (пункт 2.2.1).

Більш детально питанню про факторизацію **щільно визначених** невід'ємних симетричних операторів присвячено пункт 2.2.2. У пункті 2.2.3 порушено питання про факторизацію **нещільно визначених** невід'ємних симетричних операторів (у випадку як скінченних, так і нескінченних дефектних чисел).

У розділі 3 досліджуються квазі-самоспряжені розширення невід'ємного симетричного оператора. Точніше, тут розвивається метод (описаний у розділі 1) для опису усіх квазі-самоспряжених максимально акретивних та максимально секторіальних розширень щільно визначеного невід'ємного симетричного оператора у внутрішніх термінах. Зазначимо, що цей метод було запропоновано вчителями дисертанта Ю. М. Арлінським та Е. Р. Цекановським. Описано також відповідні (асоційовані) півторалінійні форми і дано критерій диз'юнктності та трансверсальності квазі-самоспряженого розширення \tilde{S} та розширення за Фрідріхсом S_F . Як приклад розглянуто випадок симетричного оператора зі скінченними дефектними числами (підрозділ 3.2).

Розділ 4 присвячено дослідженню зв'язку певних просторів Соболева з простором l_2 . Цей зв'язок використовується в подальшому.

Розділи 5 та 6, на нашу думку, є центральними у дисертації. Конкретніше, у розділі 5 досліджуються невід'ємні оператори Шредінгера з точковими взаємодіями. Точніше, нехай Y – монотонна послідовність точок на дійсній осі, яка задовольняє умову

$$\inf \{|y' - y''|, y', y'' \in Y, y' \neq y''\} > 0. \quad (5.1)$$

Автор вводить у розгляд такі диференціальні оператори, що діють у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$:

$$\text{dom}(A_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(y) = 0, y \in Y\}, A_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{dx^2}, \quad (5.2)$$

$$\text{dom}(A') = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f'(y) = 0, y \in Y\}, A' \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{dx^2}, \quad (5.3)$$

$$\text{dom}(H_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(y) = 0, f'(y) = 0, y \in Y\}, H_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{dx^2}. \quad (5.4)$$

Ці оператори є щільно визначеними, невід'ємними та симетричними з рівними скінченними (якщо множина Y скінченна) або нескінченними (якщо множина Y нескінченна) дефектними числами і є основою для дослідження деяких

гамільтоніанів на дійсній осі (детальніше ці гамільтоніани досліджували S. Albeverio, F. Gesztesy та інші математики).

У цьому розділі дано представлення згаданих операторів, а також спряжених з ними, у дивергентній формі. Застосовуючи результати попередніх розділів, тут також описано екстремальні розширення (Фрідрікса та Крейна) у дивергентній формі, доведено (виходячи з базисності Ріса дельта-функцій Дірака) трансверсальність розширень Фрідрікса та Крейна, побудовано базисні граничні трійки, дано опис усіх невід'ємних самоспряжених розширень згаданих операторів, а також опис у внутрішніх термінах певного класу квазі-самоспряжених максимально акретивних та максимально секторіальних гамільтоніанів.

У завершальному, шостому, розділі дисертації, який є продовженням попереднього, мова йде про деякі невід'ємні оператори Шредінгера з точковими взаємодіями. Тут, застосовуючи згаданий вище метод Ю. М. Арлінського та Е. Р. Цекановського, описано невід'ємні самоспряжені розширення невід'ємних симетричних операторів у внутрішніх термінах деяких невід'ємних гамільтоніанів. Застосовуючи зв'язок просторів Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ та $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$, з гільбертовими просторами типу l_2 (про що мова йшла у розділі 4) показано, що певні системи дельта-функцій Дірака (ці системи з достатньою повнотою наведено у дисертації) утворюють базиси Ріса у своїх лінійних оболонках.

Виходячи з базисності Ріса систем дельта-функцій Дірака, досліджено питання про диз'юнктність та трансверсальність згадуваних вище екстремальних відношень. При цьому істотно застосовується апарат просторів граничних значень (зокрема, застосовуються основні властивості функцій Вейля).

Істотних

зауважень щодо змісту роботи та її оформлення немає. Щоправда, хоча на початку дисертації згадується задача про різні класи розширень нещільно визначених операторів та лінійних відношень, насправді про такі розширення мова, по суті не йде (можливо, це не так зауваження, а побажання для подальших досліджень).

Про інші зауваження, мабуть, не варто писати.

Переходячи до оцінки дисертації в цілому, зазначимо, що вона являє собою завершену наукову працю і є вагомим внеском в такий важливий розділ функціонального аналізу, як теорія розширень лінійних операторів у гільбертовому просторі, оскільки тут наведено умови невід'ємності самоспряжених розширень певного класу симетричних операторів у гільбертовому просторі, причому, у значній мірі, в критеріальній формі. Результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано у наукових виданнях відповідно до існуючих вимог ДАК України. Вони можуть бути використані у наукових дослідженнях з функціонального аналізу та суміжних питань, які проводяться в Інституті математики НАН України, у Фізико-технічному низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, у Львівському, Східноукраїнському та Харківському національних університетах Міністерства

освіти і науки України та в деяких закордонних наукових установах (Канада, Нідерланди, Польща, Росія, Фінляндія).

Автореферат адекватно відображає зміст дисертації.

Виходячи з висловленого вище, вважаю, що дисертаційна робота «**Невід'ємні самоспряжені розширення і моделі точкових взаємодій**» задовольняє вимоги, які ставить ДАК України до кандидатських дисертацій, а її автор **Ковальов Юрій Григорійович** заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Професор кафедри математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, професор



О. Г. Сторож

