ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Марченка Віталія Анатолійовича
«Про спектральні базисні властивості операторів еволюційних рівнянь»
на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертаційна робота В.А. Марченка присвячена одному з важливих напрямів теорії диференціальних рівнянь, а саме теорії лінійних абстрактних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in X \end{cases} \tag{1}$$

у просторах Банаха X та спектральній теорії пов'язаних з рівнянням C_0-напівгруп. Рівняння виду (1) також називають лінійними еволюційними рівняннями. В наш час рівняння вигляду (1) є об'єктом дослідження багатьох математиків, бо являють собою адекватні математичні моделі різноманітних процесів, що вивчаються у теоретичній та математичній фізиці, теоретичній та квантовій механіці, біології та інших науках.

Теорія лінійних еволюційних рівнянь та пов'язаних з ними C_0-напівгруп бере свій початок у першій половині та середині XX сторіччя з класичних робіт M. Stone, K. Iosida, G. Lumer, R. Phillips, W. Feller, T.Kato та I. Miyadera. Спектральна теорія C_0-напівгруп почала свій розвиток у другій половині XX сторіччя з робіт Ю.І. Любича, В.І. Мацаєва, В.Е. Кацнельсона, Г.М. Скляра, В.Я. Ширмана, R. Curtain, Ву К. Фонга, А.І. Милославського, W. Arendt, C. Batty та інших авторів. До спектру питань цієї тематики належить питання повноти, базисності системи власних векторів (інваріантних підпросторів) оператора A, що генерує C_0-напівгрупу, теорія стійкості рівнянь (1) та спектральні методи їх дослідження. При цьому, у випадку, коли А має точковий спектр, ключовим інструментом аналізу стають базиси та розклади Шаудера.

Минуле десятиріччя ознаменувалося появою двох результатів G.Q. Xu, S.P. Yung, J. Differential Equations (2005) та H. Zwart, J. Differential Equations (2010) у спектральній теорії C_0-напівгруп. Ці результати стосуються достатніх умов того, щоб генератор C_0-групи A мав базис Ріса із власних векторів, або, у загальному випадку, із A-інваріантних підпросторів. Слід відзначити, що ці умови мають достатньо загальний характер. А саме, генератор A має базис Ріса з A-інваріантних підпросторів (у замиканні їх лінійної оболонки), якщо точковий спектр A задовольняє певним умовам відокремленості. Властивість оператора породжувати базис Ріса з власних векторів (із A-інваріантних підпросторів) є цінною для застосування тому, що спрощує методи дослідження систем (1) та лінійних керованих систем. Ця властивість суттєвим чином використовується у дослідженнях зі стійкості, керування, стабілізації, спостережуваності та реалізації за заданими спектральними даними різноманітних лінійних систем, що проводили R. Rabah, Г.М. Скляр, А.В. Резуненко, К.В. Скляр, П.Ю. Бархаєв, R. Curtain, H. Zwart, B.Z. Guo, G.Q. Xu, А.І. Милославський та інші.

В дисертаційній роботі В.А. Марченка розглядаються питання, пов'язані з результатами G.Q. Xu, S.P. Yung та H. Zwart і надаються конструктивні відповіді на них. Зокрема, досліджуються коректність (тобто існування та єдиність класичного розв'язку) та поведінка розв'язків рівнянь (1) у випадку, який досі не досліджувався, а саме, коли власні числа A згущуються на нескінченності вздовж уявної осі, а власні вектори утворюють повну систему, але не утворюють базису Шаудера.

Відмітимо, що спектральних методів дослідження системи (1) у бананових просторах, подібних до пов'язаних із базисами Ріса у просторах Гільберта, на сьогодні не існує. У зв'язку з цим в роботі В.А. Марченка розвиваються методи дослідження властивостей спектральних за Рісом операторів та систем, на випадок деяких просторів Банаха, зокрема ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0, та досліджується коректність рівнянь (1) у цих просторах. Також у роботі, слідуючи ідеям T. Kato, розвивається теорія стійкості розкладів Шаудера у просторах Банаха. Результати застосовано до питання щодо стійкості рівнянь (1) у просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$, c_0 та у гільбертових просторах.

Все це дає підстави вважати, що тема дисертаційної роботи В.А. Марченка є, безумовно, актуальною. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку літератури, який включає 158 найменувань. У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок з науковими програмами та тематичними планами наукової роботи ХНУ ім. В.Н. Каразіна і ФТІНТ ім. Б. І. Вєркіна НАН України.

У першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертації, основні для роботи відомі поняття та результати, а також обґрунтовано вибір напрямів досліджень та відзначені основні результати, що отримані в дисертації.

Другий розділ присвячений дослідженню коректності рівнянь (1) у банахових просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0. Для цього у підрозділі 2.1 введено поняття симетрично-спектрального оператора, яке узагальнює поняття спектрального за Рісом оператора на випадок банахових просторів із симетричним базисом. В підрозділі 2.2 досліджено властивості симетрично-спектральних операторів у просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0, а також отримано результати, щодо коректності еволюційних рівнянь (1) у цих просторах. Використовуючи відомий факт, що простори ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0 мають єдиний, з точністю до ізоморфізму, симетричний базис, доведено, що властивості симетрично-спектральних операторів у просторах ℓ_p ($1 \le p < \infty$) та c_0 подібні до властивостей спектральних за Рісом операторів у просторах Гільберта. А саме, отримано спектральне представлення симетрично-спектрального оператора A, спектральне представлення резольвенти $(A - \lambda I)^{-1}$, критерій породження оператором C_0-напівгрупи та її спектральне представлення, співвідношення для логарифмічного показника C_0-напівгрупи у термінах спектру A. Тим самим, встановлено критерій коректності задач Коші (1) у випадку, коли A – симетрично спектральний оператор у просторі ℓ_p ($1 \le p < \infty$) або c_0. В результаті, встановлено зв'язок між коректністю задачі Коші (1) з симетрично-спектральним оператором A у просторі X та коректністю спряженої задачі з оператором A^* у просторі X^*.

Третій розділ фокусується на питаннях, пов’язаних із результатами G.Q. Xu, S.P. Yung та H. Zwart. А саме, розглядається головна задача – дослідження коректності задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

у випадку, коли оператор A діє у гільбертовому просторі, його власні числа мають вигляд $\lambda_n = i\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, де $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – необмежена та монотонно зростаюча послідовність, що задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0$, а відповідні власні вектори утворюють повну систему, але не утворюють базис Шаудера. Тим самим досліджується питання, наскільки суттєвою є умова

$$\inf_{n \ne m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0 \tag{3}$$

для спектральної теореми у випадку простого спектру оператора A. Оскільки випадок, коли спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ являє собою скінченне об’єднання множин, кожна з яких задовольняє (3), розглядав у своїй роботі H. Zwart, у дисертації розглядається недосліджений раніше випадок, коли спектр не задовольняє (3) та, більш того, не представляється у вигляді об’єднання скінченної кількості множин, кожна з яких задовольняє (3).

Одним з головних результатів роботи є те, що, як виявилось, задача Коші (2) буде коректною не завжди, і її коректність суттєво залежить від характеру поведінки спектру оператора А на нескінченності. В дисертаційній роботі охарактеризовано випадки поведінки спектру, що обумовлюють коректність/некоректність задач (1) та (2). В підрозділі 3.2 представлено конструкцію генератора C_0-групи з простими власними числами $\{\lambda_n = i \ln n\}_{n=1}^{\infty}$ та повним, мінімальним, але не рівномірно мінімальним (а отже, і небазисним) сімейством власних векторів.

В підрозділі 3.4 автором узагальнено конструкцію з підрозділу 3.2 та представлено клас генераторів C_0-груп з власними числами $\{\lambda_n = if(n)\}_{n=1}^{\infty}$ та повним мінімальним, але небазисним сімейством власних векторів. Тим самим, встановлено коректність задачі Коші (2) та знайдено явні формули їх розв'язків. З цією метою, попередньо, у підрозділі 3.1 введено у розгляд спеціальний клас просторів Гільберта $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$. Простір $H_k(\{e_n\})$ конструюється на основі вихідного сепарабельного простору Гільберта H та довільного базису Ріса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ у ньому. Доводиться, що $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ є повною., мінімальною системою, але не утворює базис Шаудера простору $H_k(\{e_n\})$. Автором доведено, що, якщо послідовність $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ належить до класу

$$S_k = \left\{ \{f(n)\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty; \{n^j \Delta^j f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}, 1 \le j \le k \right\},$$

де Δ – різницевий оператор, то відповідна задача Коші (2) буде коректною в $H_k(\{e_n\})$. Відзначимо, що у доведенні відповідних результатів ключову роль відіграє багаторазове застосування дискретної нерівності Харді для $p = 2$.

Якщо послідовність $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ покине клас S_1, то гарантувати коректність відповідної задачі вже не можна. А саме, встановлено, що, якщо $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$ задовольняє умовам

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0 \tag{4}$$

та $\exists \alpha \in (0,1/2)$: $\liminf_{n\to\infty} n^{\alpha} |\lambda_n - \lambda_{n-1}| > 0$, то навіть задача Коші (1) для оператора А виявляється некоректною в $H_1(\{e_n\})$.

У дисертації пропонується подальший розвиток цих результатів на випадок просторів Банаха. А саме, у підрозділі 3.5 використовується та сама ідея для конструювання генераторів C_0-груп з аналогічними спектральними властивостями. З цією метою, у підрозділі 3.1 вводиться клас просторів Банаха $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$, та використовуються класи S_k. Простір $\ell_{p,k}(\{e_n\})$ конструюється на основі простору ℓ_p та довільного симетричного базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ у ньому. Цікаво, що результат щодо коректності задач (2) є таким самим: якщо $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in S_k$, то задача Коші (2) виявляється коректною у просторі $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$. Ключовим моментом у доведенні цього результату є застосування дискретної нерівності Харді для $p > 1$.

Також в третьому розділі досліджується асимптотична поведінка сконструйованих C_0-груп та встановлено, що сконструйовані C_0-групи у просторах $H_k(\{e_n\})$ зростають, коли $t \to \pm\infty$. Знайдено явні формули для резольвент генераторів цих C_0-груп і встановлено оцінки їх зростання в околах спектру.

Розділ 4 присвячений питанням стійкості розкладів Шаудера та стійкості еволюційних рівнянь (1) у просторах Банаха. Паралельно розглядається важливе, у контексті розділу 2 питання: за яких умов деяка мінімальна послідовність у просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0, чи у гільбертовому просторі є симетричним базисом? В підрозділі 4.1 введено у розгляд певні геометричні характеристики просторів Банаха, а саме: тип, котип, інфратип та *M*-котип Орлича-Радемахера, що узагальнюють поняття типу, котипу, інфатипу та *M*-котипу банахового простору. Встановлюються властивості безумовних розкладів Шаудера в залежності від цих характеристик.

В підрозділі 4.2 В.А. Марченко отримав серію узагальнень теореми Т. Като про подібність послідовностей проекторів у гільбертових просторах на випадок не ортогональних проекторів, а також на випадок розкладів Шаудера у певних просторах Банаха. Для цього автором введено поняття розкладу Шаудера-Орліча, що узагальнює поняття ортогонального розкладу Шаудера на випадок просторів Банаха, та використовує ℓ_ψ-гільбертові (∞-гільбертові) розклади Шаудера. Результати найбільш загального характеру отримані для розкладів Шаудера у просторах послідовностей Орліча та для класу Банахових просторів, що володіють розкладами Шаудера-Орліча.

Підрозділ 4.3 містить ряд результатів зі стійкості безумовних розкладів та базису Шаудера у просторах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ та c_0. Для виводу результатів щодо стійкості безумовних розкладів та базисів у просторах ℓ_p автор використовує найкращі константи нерівності Хінчина. Отримані у розділі 4 результати супроводжуються наслідками, що стосуються, зокрема, властивостей безумовних розкладів та базисів Шаудера у просторах $L_p(\mu)$ $(1 \le p < \infty), c_0$, та у просторах Гільберта. Результати розділу 4, у поєднанні з результатами розділу 2, застосовуються до питання стійкості рівнянь (1) у просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, c_0, та у гільбертових просторах.

Істотних зауважень щодо дисертації немає. Є зауваження до форми викладення матеріалу. В дисертації дуже багато результатів. Деякі з них формулюються як теореми, інші – як твердження. Серед них є майже рівнозначні, а деякі також важливі результати сформульовані як наслідки, і таких досить багато. Від такої різноманітності роботу дуже важко читати і виділити основні результати. В рефераті, де сформульовані результати, винесені на захист, в п.1 висновків дається посилання на метод дослідження (нерівність Харді), що на мій погляд, є недоцільним.

Оцінюючи дисертацію в цілому, відмітимо, що вона являє собою завершену наукову працю і є вагомим внеском у теорію абстрактних диференціальних рівнянь та спектральну теорію C_0-напівгруп. В дисертації отримано нові, глибокі результати, достовірність яких підтверджена строгими доведеннями та численними апробаціями на наукових конференціях та наукових семінарах, а тому не викликає сумнівів. Результати дисертації з достатньою повнотою опубліковано у наукових виданнях відповідно до існуючих вимог ДАК України. Автореферат адекватно відображає основні положення і твердження дисертації.

Робота має теоретичний характер. Її результати можуть знайти застосування у наукових дослідженнях, що проводяться у Інституті математики НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім.. Б.І. Вєркіна НАН України, Інституті прикладних проблем математики і механіки ім.. Я.С. Підстригача НАН України, Харківському, Київському ті Львівському університетах, а також у закордонних наукових центрах (США, Франції, Нідерландів, Польщі, Великобританії та Китаю).

Виходячи з висловленого вище, вважаю, що дисертаційна робота **«Про спектральні базисні властивості операторів еволюційних рівнянь»** задовольняє всім вимогам, які ставить ДАК України до кандидатських дисертацій, а її автор – **Марченко Віталій Анатолійович** заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
академік НАН України,
зав. відділу ФТІНТ ім.. Б. І. Вєркіна НАН України
доктор фіз.-мат наук, професор

Є.Хрус Є.Я.Хруслов

Фізико-технічний інститут низьких температур Національної академії наук України
Ідентифікаційний код 03534601
Україна м. Харків

Особистий підпис гр. Хруслова Є.Я.
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ ім. Б.І.Вєркіна
Національної академії наук України
кандидат фізико-математичних наук
Буравцева Л.М.