ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Олійник Олени Вікторовні
"Нелінійні диференціальні рівняння та модельні зображення систем лінійних несамоспряжених операторів"
на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Дисертаційна робота О. Олійник присвячена розв'язанню систем матричних функціонально–диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma\alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, \\ \gamma'(x) = i\,[Ja(x), \sigma J]\,, \qquad\qquad x \in [0, l], \\ \gamma'(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{0.1}$$

де J – задана фундаментальна симетрія ($J = J^* = J^{-1}$), σ, γ^+ – задані самоспряжені матриці, $\alpha(x)$ – задана дійсна неспадна і обмежена скалярна функція на $[0, l]$, задана матриця-функція $a(x)$ з властивостями:

$$a(x) \geq 0,\ \operatorname{trace} a(x) = 1 \quad \forall x \in [0, l].$$

Розв'язком системи є самоспряжена матриця-функція $\gamma(x)$, яка використовується при побудові трикутних моделей систем двох комутуючих несамоспряжених операторів у гільбертовому просторі (М.С. Лівшиць, В.А. Золотарьов, Л.Л. Ваксман, V. Vinnikov), причому один з операторів має дійсний спектр і характеристичну матрицю-функцію

$$S(\lambda) = \int_0^{\frown l} \exp\left\{ i\frac{Ja(t)dt}{\lambda - \alpha(t)} \right\}.$$

Якщо $\alpha(x) \equiv 0$, $J = I$, то система (0.1) має вигляд

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, \\ \gamma'(x) = i\,[a(x), \sigma]\,,\ \ x \in [0, l]. \\ \gamma'(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{0.2}$$

З цього, зокрема, випливає

$$(\gamma(x)J + \sigma J)' = i\,[Ja(x), \gamma(x)J + \sigma J]\,,$$
$$(\gamma(x)J + \sigma J)\Big|_{x=0} = \gamma^+ J + \sigma J.$$

Останнє – це рівняння Лакса, яке з'явилось в статті П. Лакса (1968 р.) присвяченої інтегруванню нелінійного диференціального рівняння Кортевега–де Фріза методом зворотної задачі розсіювання. Крім того, система (0.2) є еквівалентною нелінійному матричному диференціальному рівнянню

$$\begin{cases} \left[A'(x), i\,[A(x),\sigma] + \gamma_0^+\right] = 0, \; x \in [0,l], \\ A(0) = 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Якщо самоспряжена матриця $A(x)$ – розв'язок рівняння (0.3), то $\gamma(x) = i\,[A(x),\sigma] + \gamma_0^+$ – розв'язок системи (0.2), де $a(x) = A'(x)$. Таким чином, тематика роботи пов'язана як з теорією систем лінійних і нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, так і з спектральною теорією несамоспряжених операторів у гільбертовому просторі і тому, на мій погляд, є актуальною.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, списку використаних джерел, який включає 91 найменування, в тому числі 11 праць дисертанта (5 статей, 6 – тези доповідей). У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок з науковими програмами та темами, які виконувалися відповідно плану досліджень у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна. У розділі 1 наведено окремі поняття та результати теорії моделей несамоспряжених обмежених лінійних операторів у гільбертовому просторі. Зокрема, сформульовано теорему В.О. Золотарова про те, що рівності в системі (0.1) еквівалентні умові сплетаємості уздовж ланцюжка інваріантних підпросторів оператора A_1, якщо A_2 комутує з A_1.

В підрозділах 2.1 і 2.2 знайдено розв'язки системи (0.1) для випадку матриць 2×2. В підрозілі 2.3 доведено важливу властивість ізоспектральності розв'язку $\gamma(x)$ системи (0.2), а також встановлено теорема 2.3, яка дає можливість покроково параметризувати пари матриць $\{a(x), \gamma(x)\}$, які задовольняють систему (0.2) при фіксованних σ і γ^+. В підрозділі 2.4 описано матриці-функції $\gamma(x)$, які задовільняють (0.2), якщо додатково $a(x) = \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$ або $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$ (останнє у випадку $\sigma = \operatorname{diag}\{\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}\}$).

Основні результати розділу 3 – це опис розв'язків $\{a(x), \gamma(x)\}$ системи (0.2) для таких випадків:

1. $r = 3$, $\sigma = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, b_3\}$, спеціальний вигляд матриці γ^+, $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$ (теорема 3.1), причому, якщо $\gamma_{12}^+ = 0$, $b_1 < b_2 < b_3$, то

елементи матриці $\gamma(x)$ можна виразити через еліптичні функції Якобі sn, cn, dn (наслідок 3.2);

2. $r = 4$, $\sigma = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $\gamma^+ = \alpha_1\sigma + \alpha_0 I + iC$, $C = -C^*$, $c_{jj} = 0$ (теорема 3.3);

3. $r = 4$, $a(x) = \kappa\gamma(x)^3$.

В підрозділах 4 і 5 при деяких припущеннях на матрицю-функцію $a(x)$ з систем (0.1) і (0.2) виведено і розв'язано диференціальні рівняння на власні вектор-функції матриць $a(x)$ і $Ja(x)$ для $r = 3,\ 4$.

Зауваження

1. Вважаю, що було б доцільним в розділі 1 пояснити чому системи рівнянь вигляду (0.1) мають в дисертації назву "рівняння типу Лакса".

2. В теоремі 2.2 функція $v(x)$ не є довільною, а повинна задовільняти умову $|v(x)|^2 \leq |\xi|^2 b(x)(1 - b(x))$.

3. В розділах 4 і 5 використовується позначення $a(x)$ для скалярної функції, в той же час $a(x)$ – це матриця-функція, яка бере участь в записі основних систем диференціальних рівнянь ((0.1), (0.2)) дисертації.

4. В авторефераті на стор.4 в розділі II замість $\alpha(x)$ в диференціальному рівнянні повинно бути λ.

Слід зазначити, що в дисертації отримано цікаві нові і нетривіальні результати, достовірність яких підтверджується строгими доведеннями та апробаціями на наукових конференціях та семінарах. Основні результати дисертації детально опубліковано у фахових виданнях та в міжнародних журналах. Автореферат повністю відображає зміст дисертації. Робота має теоретичний характер, її результати можуть знайти застосування у наукових дослідженнях у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Львівському національному університеті імені Івана Франка, Донецькому національному університеті, Східноукраїнському національному університеті імені Володимира Даля, Інституті математики НАН України, Фізико-технічному інституті низьких темперарур імені Б.І. Вєркіна НАН України та в інших вищих учбових закладах та наукових установах.

Виходячи з висловленого вище, вважаю, що дисертаційна робота "Нелінійні диференціальні рівняння та модельні зображення систем лінійних несамоспряжених операторів" відповідає вимогам "Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника", а її автор Олійник Олена Вікторовна заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідуючий кафедрою математичного аналізу
Східноукраїнського національного університету
імені Володимира Даля Ю. М. Арлінський

Підпис Арлінського Ю.М.
засвідчую:
Начальник ВК, Л.М. Літвінова

Міністерство освіти і науки України * Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля * 02070714