Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу, висунуту на здобуття степені кандидата фізико-математичних наук, Ковальова Юрія Григорійовича "Невід'ємні самоспряжені розширення і моделі точкових взаємодій"

Теорія самоспряжених розширень симетричних лінійних операторів в гільбертових просторах та зокрема теорія напівобмежених розширень (напівобмежених операторів) веде початок з класичних робіт J.von Neumann, M. Stone, K. Friedrichs, М.Г. Крейна, М.А. Наймарка, А.В. Штрауса і має істотне застосування в спектральній теорії диференціальних операторів, в проблемі моментів, в інтерполяційних задачах, в квантовій механіці, математичній фізиці. Невід'ємні симетричні оператори вигляду

$$A_{Y,d}=-\Delta, \mathrm{dom}(A_{Y,d})=\{f\in W_2^2(\mathbb{R}^d): f(y)=0, y\in Y\}, d=1,2,3, \tag{1}$$

де Y - скінчена або злічена множина точок в просторі $\mathbb{R}^d$, є базовими моделями для точкових взаємодій в $\mathbb{R}^d$. Вони пов'язані з самоспряженими реалізаціями та дослідженням спектральних властивостей операторів, породжених виразами типу $L_{Y,d,\alpha}=-\Delta+\sum\limits_{y\in Y}\alpha_y\delta(\cdot-y)$. Теорії таких реалізацій та загальної теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів присвячена велика кількість публікацій, і зокрема монографії:

1) S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H.Holden. Solvable models in quantum mechanics, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York. First edition - 1988, second edition - 2004,
2) В.Д. Кошманенко, Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов, Киев, Наукова думка, 1993,
3) S. Albeverio and P. Kurasov, Singular perturbations of differential operators and solvable Schrodinger type operators, Cambridge University Press, 2000.

Основними методами дослідження цієї області аналізу є: теорія розширень симетричних операторів вигляду (1), формула Крейна резольвент, теорія квадратичних форм, теорія оснащених гільбертових просторів, теорія функцій, теорія матриць.

Першою роботою щодо коректного визначення виразу $-\Delta+\alpha\delta(\cdot-y)$ як самоспряженого оператора у просторі $L_2(R^3)$ є стаття Ф.А.Березина і Л.Д. Фаддеева, яка ґрунтується на застосуванні теорії самоспряжених розширень і резольвентної формули Крейна. Значний внесок в теорію сингулярних збурень належить Ю.М.Березанському, Л.П. Нижнику, В.Е. Лянце, В.Д. Кошманенко та іншим українським математикам. За останні 40 років в працях Ф.С. Рофе-Бекетова, М.Л. Горбачука, В.І. Горбачук, В.Є.Лянце, А.Н. Кочубєя, В.А, Михайлеця, О.Г. Сторожа розвинуто та застосовано до симетричних диференціальних операторів метод абстрактних граничних умов, формалізований в поняття граничної трійки (простору граничних значень) та пов'язаний з абстрактною формулою Лагранжа-Гріна. Суттєвим доповненням цього методу є поняття функції Вейля, асоційованої з граничною трійкою, яке розвинуто В.А. Деркачем та М.М. Маламудом. Функція Вейля є Q функцією М.Г. Крейна - Г. Лангера симетричного оператора, суттєвим елементом формули резольвент та містить інформацію про спектральні властивості самоспряжених розширень. До спектральної теорії диференціальних операторів в моделях точкових взаємодій метод граничних трійок був застосований В.Е. Лянце, А.Н. Кочубеєм, В.А. Михайлецем, Л.П. Нижником, О.Костенко, М.Маламудом, K.Schmudgen та іншими.

В роботах Ю. М. Арлінського і Е. Р. Цекановського було встановлено, що опис квазі-самоспряжених m-акретивних (m-секторіальних) розширень невід'ємного симетричного оператора грунтується на дослідженні зображень невід'ємних симетричних операторів у дивергентній формі. Саме подальшому розвитку цього актуального напрямку досліджень і присвячена дисертаційна робота Ковальова Ю. Г.

Метою дисертаційної роботи Ю.Г.Ковальова є вивчення теорії розширень невід'ємного симетричного оператора та застосування отриманих абстрактних результатів до квазі-самоспряжених розширень оператора $A_{Y,d}$ вигляду (1), а також дослідження базисності зліченої системи δ -функцій Дірака у своїх лінійних оболонках в просторах Соболева $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, трансверсальності екстремальних розширень Фрідрихса та Крейна, побудови граничних трійок, опису за їх допомогою невід'ємних самоспряжених розширень оператора $A_{Y,d}$ та вигляду відповідної функції Вейля.

Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, списку використаних джерел, який включає 96 найменувань.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок з науковим програмами та темами, які виконувалися відповідно планам наукових робіт кафедри математичного аналізу Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля, сформульовано мету і задачі дослідження.

У Розділі 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, а також стисло викладені необхідні для подальшого розуміння основні поняття та результати, які отримані попередниками за темою дисертації.

У Розділі 2 досліджуються невід'ємні симетричні оператори, які мають дивергентний вигляд $A = L_2^* L_1$, де L_1, L_2 - замкнені і щільно визначені лінійні оператори, причому $L_1 \subset L_2$. Використовуючи підхід Арлінського Ю. М. дано опис розширень Фрідріхса і Крейна за умовою $(L_2^* L_1)^* = L_1^* L_2$. Одним із основних результатів цього розділу є теорема 2.1.4, де побудовано базисну граничну трійку для оператора A^* на основі граничної трійки для пари $L_1 \subset L_2$.

Доведено (теореми 2.2.6, 2.2.7), що кожен замкнений щільно визначений невід'ємний симетричний оператор, що має диз'юнктні невід'ємні самоспряжені розширення, допускає нескінченно багато факторизацій у вигляді $A = LL_0$, де L_0 – замкнений невід’ємний симетричний оператор, L – його невід’ємне самоспряжене розширення.

Подібна ж факторизація встановлена для нещільно визначеного замкненого невід'ємного симетричного оператора з нескінченними індексами дефекту, а у випадку скінченних індексів дефекту доведено що таких факторизацій не існує.

В підрозділі 2.2 за допомогою укороченого оператора Крейна запропоновано метод побудови абстрактних прикладів пар $L_0 \subset L$, де L_0 - щільно визначений замкнений невід'ємний симетричний оператор, L - невід’ємне самоспряжене розширення L_0, таких, що $\mathrm{dom}(LL_0) = \{0\}$. З цього випливає, зокрема, що квадрат симетричного оператора L_0 має тривіальну область визначення, $\mathrm{dom}(L^2_0) = \{0\}$. Приклади таких щільно визначених замкнених симетричних операторів належать М.А. Наймарку (1940 р.), P. Chernoff (1983 р.).

В розділі 3 розглянуто задачу о параметризації максимальних акретивних квазі-самоспряжених розширень $\tilde{S}$ щільно визначеного замкненого невід'ємного симетричного оператора S $(S \subset \tilde{S} \subset S^*)$. Серед таких операторів містяться невід’ємні самоспряжені розширення. В 2005 р. Ю.М. Арлінський і Е.Р. Цекановський запропонували новий підхід то опису областей визначень невід’ємних самоспряжених розширень. В дисертаційної роботі Ю.Г.Ковальова розвинуто цей метод і повністю розв’язано задачу про параметризацію областей визначення максимальних акретивних і максимальних секторіальних квазі-самоспряжених розширень у внутрішніх термінах за допомогою розширення по Фрідріхсу. Основним результатом цього розділу слід вважати теорему 3.1.1, в якій надано опис усіх невід’ємних самоспряжених розширень щільно заданого невід’ємного симетричного оператора. Важливими є теореми 3.1.3 та 3.2.1, в яких отримано критерій екстремальності квазі-самоспряжених m-акретивних розширень.

В розділі 4, який носить допоміжний характер, встановлено зв’язки між гільбертовим простором l_2 та просторами Соболева $W_2^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $d = 1,2,3, W_2^1(\mathbb{R}^1), W_2^1(\mathbb{R}^1 \setminus Y)$. На підставі результатів розділу 4 в розділах 5 і 6 доведено, що якщо Y – злічена множина в R^d, точки якої задовольняють умові $d_* = \inf\{|y - y'|, y, y' \in Y, y \neq y'\} > 0$, то системи дельта-функцій Дірака

$$\left\{\delta(\cdot - y),\, y \in Y\right\} \subset W_2^{-1}\left(\mathbb{R}^1\right), \left\{\delta(\cdot - y),\, y \in Y,\, d = 2,3\right\} \subset W_2^{-2}\left(\mathbb{R}^d\right),$$

$$\left\{\delta'(\cdot - y),\, y \in Y\right\} \subset W_2^{-2}\left(\mathbb{R}^1\right), \left\{\delta(\cdot - y), \delta'(\cdot - y), y \in Y\right\} \subset W_2^{-2}\left(\mathbb{R}^1\right)$$

утворюють базиси Риса у своїх лінійних оболонках.

Розділ 5 присвячений опису розширення Фрідріхса і Крейна операторів

$$A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \mathrm{dom}(A_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^1) : f(y) = 0, y \in Y\}$$

$$A' = -\frac{d^2}{dx^2}, \mathrm{dom}(A') = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^1) : f'(y) = 0, y \in Y\}$$

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \mathrm{dom}(H_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^1) : f(y) = 0, f'(y) = 0, y \in Y\}$$

Доведена трансверсальність таких розширень для скінчених Y та злічених Y з умовою $d_* > 0$. Побудовані базисні граничні трійки та параметризовано в термінах граничних умов невід'ємні самоспряжені розширення. В підрозділі 5.2 для скінченого Y описано всі максимальні акретивні та максимальні секторіальні квазі-самоспряжені розширення оператора A'. Для цього застосовані абстрактні результати розділу 3.

В останньому розділі 6 дано два нових доведення, що вільній гамільтоніан

$$A = -\Delta, \mathrm{dom}(A) = W_2^2(\mathbb{R}^d), d = 2,3$$

є фрідріхсовє розширення оператора $A_{Y,d}$ для скінченої множини Y, а для зліченної множини Y за умовою $d_* > 0$. Одно доведення належить дисертанту, інше — науковому керівнику. Доведення відрізняються від доведення запропонованого для випадку $\mathbb{R}^3$ в статті М.М.Маламуда і К. Шмюдгена (2013 р.). Доведено також, що розширення Фрідріхса і Крейна діз'юнктні, але не трансверсальні в $L_2(\mathbb{R}^2)$, а для випадку $L_2(\mathbb{R}^3)$ запропоновано критерій трансверсальності. Розроблено єдиний метод для побудови граничних трійок та обчислення функцій Вейля для точкових взаємодій на площині та у просторі.

Результати розділів 2 – 6 грунтуються на теорії розширень симетричних операторів, теорії оснащених гільбертових просторів та теоремі вкладень соболевських просторів. Дисертація написана чіткою ясною мовою, з відповідною аргументацією аналізу кожної задачі, що вивчається.

До зауважень слід віднести те, що в розділах 4 – 6 (підрозділи 4.1.3, 5.1.4, 6.2.2) обчислення деяких інтегралів проводиться у сенсі узагальнених функцій, хоча це окремо не підкреслено. Це потрібно було б стисло пояснити.

Незважаючи на цей недолік, вважаю, що дисертація Ковальова Ю. Г. є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, висунутих на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук, так як:

a) Доведено, що кожний замкнений щільно заданий невід'ємний симетричний оператор, який має невід'ємні самоспряжені розширення допускає факторизацію у дивергентній формі.
b) Отримано параметризацію усіх квазі-самоспряжених m-акретивних та m-секторіальних розширень невід'ємних симетричних щільно заданих операторів.
c) Надано опис розширень симетричних операторів у моделях точкових взаємодій.
d) Отримані умови базисності Риса системи дельта-функцій у замиканні їх лінійної оболонки в просторах Соболєва.

Науковий рівень дисертації високий, а всі результати обґрунтовані і опираються на чіткі і коректні доведення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані в теорії розширень лінійних операторів, в спектральному аналізі лінійних операторів з сингулярними потенціалами. Дослідження, яке проведено автором, може бути корисним в наукових розробках, що проводяться в Інституті НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Інституті прикладних задач механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті ім. І. Франка. Автореферат ідентичним чином відображає основні положення і твердження дисертації. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

На підставі вищезгаданого вважаю, що дисертаційна робота Ю. Г. Ковальова виконана на відповідному рівні, а дисертант заслуговує присвоєння йому ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник
Фізико-технічного інституту низьких
температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України В. О. Золотарьов

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР ІМ. Б.І. ВЄРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
УКРАЇНА, М. ХАРКІВ
Ідентифікаційний код 03534601

Підпис гр. Золотарьова В. О.
ЗАСВІДЧУЮ
секретар ФТІНТ ім. Б.І.Вєркіна
Національної академії наук України
фізико-математичних наук
Каминкова