Відгук

офіційного опонента на дисертацію Марченка Віталія Анатолійовича «Про спектральні базисні властивості операторів еволюційних рівнянь» на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

В дисертаційній роботі В.А. Марченка розглядається задача Коші:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \; t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathrm{X} \end{cases} \qquad (1)$$

в банаховому просторі X.

Постійний інтерес до задачі (1) пов'язаний з тим, що до задачі (1) зводяться, зокрема, задачі Коші для нескінченних систем диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь, рівнянь із запізненням, а також початкові та початково-крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.

Відомо, що при $\rho(A) \neq \emptyset$ коректність задачі (1) еквівалентна тому, що A є генератором C_0-напівгрупи. Основи теорії C_0-напівгруп закладені Е. Хілле, Р.С. Філлипсом, К. Іосідою, Т. Като, В. Феллером. Стійкість рівняння (1) досліджувалась, зокрема, в роботах Г.М. Скляра, В.Я. Ширмана, Ю.І. Любича та Ву К. Фонга, W. Arendt та C.J.K. Batty.

Зауважимо, що при дослідженні абстрактних диференціальних рівнянь, як правило, виникає потреба доведення тверджень відносно геометрії банахових просторів або операторів в них. Часто ці твердження становлять і самостійний інтерес. Дисертація В.А. Марченка є прикладом такого дослідження. В ній досліджується зв'язок між коректністю задачі (1) і спектральними властивостями оператора A, а також стійкість рівняння (1). Крім того, одержані нові результати про стійкість базисів і розкладів Шаудера в банаховому просторі. На мій погляд, тема дисертації є актуальною.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, які містять підрозділи та висновки, заключної частини та списку літератури, що включає 158 назв.

В вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано на зв'язок з науковими програмами та планами наукової роботи.

В першому розділі наведено вельми детальний огляд літератури за темою дисертації, а також наводяться відомі результати, які використовуються в дисертації.

В другому розділі, виходячи з поняття симетричного базису, вводиться поняття симетрично-спектрального оператора. Тим самим узагальнюється на випадок банахова простору поняття спектрального за Рісом оператора в гільбертовому просторі, яке належить R.F. Curtain. Далі в просторах l_p та c_0 дається загальний вид таких операторів і їх резольвент, а також критерій того, що такий оператор є генератором C_0-напівгрупи, і знаходиться формула для логарифмічного показника зростання цієї напівгрупи. Також знаходиться оператор спряжений до симетрично-спектрального. Відповідні результати в гільбертовому просторі доведені R.F. Curtain.

Результати цього розділу використовуються в розділі 4 при дослідженні стійкості рівняння (1)

Результати третього розділу є дотичними до відомого результату G.Q. Xu, S.P. Yung та H. Zwart про те, що власні вектори генератора A C_0-групи в гільбертовому просторі H утворюють базис Ріса, якщо $\sigma(A)$ є дискретним і однократним, система власних векторів A є повною, а власні значення задовольняють умові «відокремленості»

$$\inf_{n\neq m}\left|\lambda_n-\lambda_m\right|>0\,. \qquad (2)$$

В роботі H. Zwart розглядався і більш загальний випадок, коли власні значення можна розбити на $K<\infty$ таких множин, що власні значення з кожної з них задовольняють умові (2). У цьому випадку базис Ріса з власних векторів замінюється базисом Ріса з підпросторів з розмірностями $\leq K$.

В дисертації вивчається питання: чи може оператор A бути генератором C_0-групи, якщо його власні значення лежать на уявній осі і не задовольняють умовам типу H. Zwart, а система власних векторів є повною, але не утворює базис Ріса?

В дисертації в спеціальних гільбертових просторах $H_k\left(\{\phi_n\}\right)\supset H$ будується оператор A, який має дискретний спектр $\lambda_n=if(n)\in i\mathbb{R},\ f(n)\to+\infty$, який не можна розбити на такі множини, як в роботі H. Zwart, і який не задовольняє умові (2), а система власних векторів якого є повною, але не утворює навіть базис Шаудера. Цей оператор A буде генератором C_0-групи в залежності від швидкості «злипання» власних значень. Зокрема, при $f(n)=\ln n$ оператор A генерує C_0-групу, а при $f(n)=\sqrt{n}$ - не генерує. Крім того, виявляється, що $\left\|e^{At}\right\|\underset{|t|\to\infty}{\to}\infty$ не швидше полінома степеня k. Далі в дисертації вищенаведені результати відносно коректності задачі (1) узагальнюються на спеціальні банахови простори $l_{pk}\left(\{\phi_n\}\right)\supset l_p,\ p>1$. В цьому випадку оператор A перестає бути генератором, якщо $f(n)=n^{1-\frac{1}{p}}$. Пояснимо, що $H_k\left(\{\phi_n\}\right)$ є поповненням H за нормою $\left\|(I-T)^k x\right\|$, $k\in\mathbb{N}$, де T є «оператором правого зсуву, пов'язаним з базисом Ріса $\{\phi_n\}$ в H»; $l_{pk}\left(\{\phi_n\}\right)$ визначаються аналогічно, виходячи вже із симетричного базиса $\{\phi_n\}$ в l_p.

Доведення цих результатів здійснюється шляхом вельми тонких оцінок, які базуються на застосуванні дискретної нерівності Харді.

Результати четвертого розділу дозволяють перевіряти: чи утворює система векторів симетричний базис (якщо утворює, то, виходячи з цієї системи, можна конструювати генератори C_0-напівгрупи, користуючись результатами другого розділу). А саме, в дисертації знайдені умови стійкості симетричних базисів в $l_p, p\geq 1, c_0$ та H. Для доведення цих результатів в дисертації вводиться поняття розкладу Шаудера-Орлича у банаховому просторі, яке є аналогом ортогонального розкладу в гільбертовому просторі, і для банахових просторів, які мають розклад Шаудера-Орлича, узагальнюється відома теорема Като про подібність системи ортопроекторів і системі проекторів в H.

Далі в четвертому розділі знайдені умови стійкості, а також асимптотичної стійкості, експоненціальної стійкості рівняння (1), коли A є симетрично спектральним оператором в l_p або c_0.

Результати розділу ілюструються цікавими прикладами, в яких встановлюється базисність в l_p та c_0 деяких систем векторів, а також стійкість трикутної нескінченної системи диференціальних рівнянь.

Зробимо деякі зауваження:

1. Наслідок 2.2 є окремим випадком загальної теореми про зв'язок між напівгрупою, що відповідає задачі (1) в X, і напівгрупою відповідної задачі в X^*, коли банахів простір X є рефлексивним.
2. В авторефераті на стор. 9 в третьому знизу рядку є описка.
3. На наш погляд, бажано було б з'ясувати більш точно співвідношення між класами S_k із визначення 3.4. Також, мабуть, становить інтерес оцінка знизу зростання норми напівгрупи з теорем 3.3.

Зауваження 3 скоріше є питаннями для подальших досліджень.

Вважаю, що в дисертації одержано нові нетривіальні результати, достовірність яких підтверджено акуратними доведеннями та апробаціями на численних наукових конференціях і семінарах. Основні результати дисертації опубліковано у фахових виданнях та солідних іноземних журналах. Автореферат повністю відображає зміст дисертації. Робота має теоретичний характер. Результати можуть бути застосовані в наукових дослідженнях у Фізико-технічному інституті НАН України ім. Б.І. Вєркіна, Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна, Інституті математики НАН України, Institute of Mathematics of Szczecin University, University of Groningen, University of Twente.

Виходячи з наведеного вище, вважаю, що дисертація «Про спектральні базисні властивості операторів еволюційних рівнянь» задовольняє вимогам, які висуваються Міністерством освіти і науки України до кандидатських дисертацій, а її автор Марченко Віталій Анатолійович заслуговує присвоєння наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, завідувач кафедри вищої
математики Українського
державного університету
залізничного транспорту В.І. Храбустовський

Храбустовський В.

Особистий підпис
засвідчую 06.09. 2016 р.
Завідуючий канцелярією
УкрДУЗТ

Міністерство освіти і науки України * Український державний університет залізничного транспорту * №01116472