Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу, висунуту на здобуття ступені кандидата фізико-математичних наук Олійник Олени Вікторівни "Нелінійні диференціальні рівняння та модельні зображення систем лінійних несамоспряжених операторів"

Дослідження нелінійних диференціальних рівнянь носить індивідуальний характер, який враховує специфіку самого рівняння. Одним із важливих класів нелінійних диференціальних рівнянь є рівняння П. Лакса $L_t = [L, A]$, в яке входить довільний параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Виключення параметру λ з цього рівняння дає відомі нелінійні рівняння Кортевега — де Фріза, синус — Гордона, нелінійний Шредінгер та інші. Метод інтегрування цих рівнянь, який ґрунтується на рівнянні П. Лакса, ініціював розвиток солітонного напрямку в математичній фізиці.

Рівняння П. Лакса виникає в різних ґалузях математичних досліджень. Так побудова ланцюжка спільних інваріантних підпросторів комутативної системи несамоспряжених операторів (існування якого витікає з відомої теореми В. Ломоносова) засновано на розв'язку рівняння П. Лакса, де L - лінійний (за λ) матричний жмуток, а породжується спектральною мірою. Вперше такі рівняння з'явились в роботах М. С. Лівшиця, Л. Л. Ваксмана, В. О. Золотарьова, В. Віннікова. Використовуючи розв'язок цієї нелінійної задачі, будуються трикутні моделі комутативної системи несамоспряжених операторів (М. С. Лівшиць, Л. Л. Ваксман, В. О. Золотарьов, В. Вінніков). Виключення з системи нелінійних рівнянь довільного параметру дає два співвідношення, з яких перше є диференціальним рівнянням, а друге є умовою узгодження. Ці співвідношення, що називаються рівняннями типу П. Лакса, слід розглядати як нелінійні рівняння для знаходження пари матриць-функцій $a(x)$, $\gamma(x)$. Такі рівняння досліджувались Л. Л. Ваксманом та В. О. Золотарьовим та потребують подальших досліджень та мають важливі використання в теорії модельних зображень комутативних систем несамоспряжених операторів.

Тому обрана тема дослідження здається мені актуальною.

Дисертація складається зі вступу і п'яти розділів.

У першому розділі наведені основні факти з теорії несамоспряжених операторів, які приводять до основного рівняння типу Лакса, що досліджується в роботі. Сформульована основна задача, якій присвячена дисертація, а саме, дослідженню нелінійної матричної системи рівнянь

$$\begin{cases} [Ja(x), (\sigma_2 \alpha(x) + \gamma(x))J] = 0, & x \in [0, l], \\ \gamma'(x)J = i[Ja(x), \sigma_2 J], & x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{1}$$

де: $\gamma(x)$, $a(x)$ самоспряжені $r \times r$ ($r \in \mathbb{N}$) матриці ($a(x) \geqslant 0$, $\operatorname{tr} a(x) = 1$); $J = J^* = J^{-1}$; σ_2, γ^+ — самоспряжені $r \times r$ матриці, $\alpha(x)$ — дійсна, обмежена, неспадна функція ($0 < l < \infty$).

У другому розділі повністю досліджена (1), коли $r = 2$. Основним твердженням цього випадку є теорема 2.2, в якій не тільки отримані розв'язки цієї системи. Важливим кроком дослідження системи (1) при $r > 2$, коли $J = I$, $\alpha(x) = 0$, є покрокова процедура знаходження розв'язків нелінійної матричної системи

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, & x \in [0, l], \\ \gamma'(x) = i[a(x), \sigma_2], & x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \tag{2}$$

у припущенні, що γ^+ самоспряжена матриця з "простим"спектром.

Третій розділ дисертації присвячений використанню покрокової процедури, що викладена у розділі 2 для випадку $r = 3, 4$. А саме, якщо γ^+ має простий спектр, то, використовуючи те, що $\gamma(x)$ є поліном другої степені від $\gamma(x)$ (при всіх $x \in [0, l]$) $U(x) = k_2(x)\gamma^2(x) + k_1(x)\gamma(x) + k_0(x)I$ ($k_i(x)$ — дійсні функції із $L^1(0, l)$), вдається повністю розв'язати систему диференціальних рівнянь (2). Одним із основних результатів цього розділу слід вважати теорему 3.1, в якій не тільки розв'язано систему (2) ($r = 3$), але й вказані незалежні параметри, в термінах яких виражаються розв'язки. Отриманий результат при спеціальному виборі параметрів дає розв'язок систем в термінах еліптичних функцій. Аналогічний результат при $r = 4$ і коли $a(x)$ є поліном другого ступеня від $\gamma(x)$ також знайдені (теорема 3.3) всі розв'язки системи (2) та вказана їх параметризація. Для випадку $r = 4$ і коли $a(x)$ є кубічний многочлен від $\gamma(x)$ отримані розв'язки (теорема 3.5) системи (2). Результати цього розділу демонструють ефективність запропонованого покрокового методу розв'язку системи (2).

В четвертому розділі роботи дається інший підхід для нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Лакса, що вивчається, який базується на рівняннях власних вектор-функцій $\{h_k(x)\}_1^r$ матриці $a(x)$. Знаючи власні значення матриці $a(x)$ та власні значення $\gamma(x)$ (які не залежать від x) отримана (теорема 4.1) система лінійних диференціальних рівнянь для $\{h_k(x)\}_1^r$. У випадку $r = 3$ на базі дослідження цієї системи рівнянь описані всі розв'язки системи (2) (теорема 4.2, теорема 4.3), які виражаються в термінах тригонометричних функцій. В цьому розділі також вивчається випадок кратного спектру $a(x)$.

У п'ятому розділі дисертації досліджується система (1) на базі методу, запропонованого у розділі 4, коли $\alpha(x) = 0$, а $J \neq I$. У цьому випадку також отримана система диференціальних рівнянь для власних векторів $\{h_k(x)\}_1^r$ матриці-функції $Ja(x)$. Використовуючи цю систему рівнянь також знайдено всі розв'язки системи (1) ($\alpha(x) = 0$) у випадку простого спектру $Ja(x)$.

В роботі отримано наступні основні результати:

а) Знайдено всі розв'язки нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Лакса у випадку $r = 2$.

б) Знайдено опис загальних ізоспектральних перетворень системи типу Лакса та вказано покроковий метод побудови усіх розв'язків системи.

в) Знайдено всі розв'язки системи типу Лакса у випадку поліноміальної залежності матриці-функції $a(x)$ від $\gamma(x)$ при $r = 3, 4$, які в окремих випадках записуються в термінах еліптичних функцій.

г) Побудовано розв'язки системи типу Лакса при $r = 3$ на базі аналізу власних значень матриці $a(x)$.

д) Побудовано розв'язки системи типу Лакса при $r = 3$ на базі аналізу власних значень матриці $Ja(x)$ в термінах її власних значень у випадку простого спектра початкових даних та знайдено їх розв'язки.

Зауваження:

1) на стор. 27 (Лема 2.1) припущено описку: замість $A \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{r\times r})$ повинно бути $A \in L^1([0,l]; \mathbb{C}^{r\times r})$.

2) метод ізоспектральної деформації (розділ 2.3) та покрокова процедура розв'язку системи нелінійних рівнянь, що вивчається, доведені у випадку $a(x) \in L^1([0,l]; \mathbb{C}^{r\times r})$,

відповідно $k_i(x) \in [0, l]$. Слід було дослідити більш загальний випадок, коли належність простору L^1 не має місце. Хоча це є тема окремого дослідження.

3) В авторефераті на сторінці 4 у виносній формулі повинен бути спектральний параметр замість множника $a(x)$.

Підсумовуючи вищесказане вважаю, що незважаючи на зауваження, дисертація Олійник О. В. є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, висунутих на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук. Науковий рівень дисертації є високим, а всі результати обґрунтовані і мають чіткі і коректні доведення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані в теорії систем звичайних диференціальних рівнянь, а також у спектральному аналізі систем комутуючих лінійних операторів. Дослідження, яке проведено автором, може бути корисним в наукових розробках, що проводяться в Інституті НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Інституті прикладних задач механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львівському національному університеті ім. І. Франка. Автореферат ідентичним чином відображає основні положення і твердження дисертації. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

На підставі вищезгаданого вважаю, що дисертаційна робота О. В. Олійник виконана на відповідному рівні, а дисертант заслуговує присвоєння йому ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Доктор фізико-математичних наук,
провідний науковий співробітник
Інституту прикладної математики та механіки
НАН України, м. Слов'янськ М. М. Маламуд

Підпис Маламуда М. М. підтверджую.
Ст. інспектор з кадрів Гонка С. С.
02.02.2016р.

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
ВІДДІЛ КАДРІВ
код 05410675
50