О Т З Ы В
на диссертационную работу Нгуен Ван Куиня «Задачи теории субгармонических и дельта-субгармонических функций».

Теория субгармонических функций безусловно является одним из важнейших направлений современного анализа. Ее можно рассматривать как часть теории потенциала в конечномерном пространстве, поэтому она тесно связана с задачами математической физики. Современная теория аналитических функций также активно использует методы теории субгармонических функций. Кроме того, многие теоремы этой теории имеют естественные аналоги для субгармонических функций как на плоскости, так и в конечномерном пространстве. Так, созданная В.С.Азариным теория предельных множеств субгармонических функций позволила получать однотипные решения ряда давно стоящих и новых задач теории субгармонических функций в конечномерном пространстве и аналитических функций на плоскости. Главная идея этой теории состоит в том, что асимптотические свойства субгармонических и аналитических функций при переходе к предельным множествам превращаются в локальные (часто весьма нетривиальные) свойства субгармонических функций. Большой вклад в развитие этого направления был сделан харьковскими математиками В.С.Азариным, М. Л. Содиным, А. Е. Еременко, а также научным руководителем диссертанта А.Ф.Гришиным. Дальнейшие исследования в этом направлении потребовали дальнейшего изучения различных типов сходимости субгармонических функций, разностей субгармонических функций (так называемых дельта-субгармонических функций), потециалов мер (в том числе и знакопеременных мер).

Целью исследования в данной работе является изучение связи сходимости последовательностей дельта-субгармонических функций в смысле распределений с другими видами сходимости, а также исследование свойств предельных множеств для дельта-субгармонических функций и знакопеременных мер Радона. **Методами исследования** являются методы математического анализа, в том числе методы теории меры и потенциала, методы функционального анализа, а также некоторые элементы теории динамических систем. Из вышесказанного следует **актуальность темы** данной диссертационной работы.

Основные **задачи исследования** заключались в изучении предельных множеств для дельта-субгармонических функций и мер Радона, изучении связи между предельными множествами для дельта-субгармонических функций и предельных множеств их ассоциированных мер, получении представлений типа Брело для дельта-субгармонических функций, нахождение условий, при которых из сходимости последовательности потенциалов как последовательности обобщённых функций следует ее сходимость в пространствах Лебега, а также построении целой функции заданного нулевого уточнённого порядка.

Научная новизна полученных результатов. В работе впервые рассматривается понятие предельного множества для знакопеременной радоновой меры нормального типа при заданном уточненном порядке в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^m$ (Теорема 2.1). Для случая неотрицательных мер это понятие было подробно изучено В.С.Азариным, но его распространение на случай знакопеременных мер не является очевидным. Далее диссертант вводит понятие регулярной меры Радона как меры с одноточечным предельным множеством, что является естественным аналогом регулярной неотрицательной меры по Азарину. В теоремах 2.2 и 2.3 он показывает, что меры , имеющие угловую (при $m > 2$ конусную) плотность, являются регулярными, причем обратное имеет место только в случае неотрицательных мер: предъявляется регулярная знакопеременная мера в плоскости, которая не имеет угловой плотности. Эта ситуация невозможна в теории Азарина. Далее, в теоремах 2.4 и 2.5 доказывается, что множество, удовлетворяющее условиям Теоремы 2.1, является предельным множеством некоторой меры Радона тогда и только тогда, когда его можно аппроксимировать в смысле расстояния Хаусдорфа последовательностью периодических мер. Особый интерес представляет группа теорем 2.6-2.11, в которых для описания условий того, что данное множество мер является предельным, диссертант использует аппарат теории динамических систем. Для примера сформулируем одну из теорем

Теорема 2.11. *Пусть $\rho(r) \to \rho$ – уточнённый порядок, M – компакт в пространстве мер, инвариантный относительно преобразования $\mu(E) \to t^{-\rho}\mu(tE)$, все меры из которого имеют тип не выше σ при порядке ρ. Для того, чтобы существовала радонова мера, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и такая, для которой M есть предельное множество, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность периодических мер μ_n порядка ρ типа не выше σ_1 такая, что в метрике Хаусдорфа предельные множества мер μ_n сходятся к M.*

Как видно, аппарат теории динамических систем оказывается здесь вполне адекватным.

Далее, в теоремах 3.1 и 3.2 описываются условия на ассоциированные меры дельта-субгармонических функций в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, при которых из сходимости последовательности таких функций в смысле теории распределений следует сходимость в пространствах $L_p(\gamma)$ с той или иной мерой γ, что обобщает соответствующие результаты А.Ф.Гришина и А Шуиги для функций на плоскости. Такого рода сходимости часто возникают при изучении дельта-субгармонических функций и их предельных множеств. В теоремах 3.3 и 3.4 находятся новые представления типа Брело для дельта-субгармонических функций конечного порядка. В теоремах 3.5 и 3.7 рассматриваются предельные множества для дельта-субгармонических функций конечного порядка, изучаются их свойства. Особо отметим теорему 3.6, где Нгуен Куинь находит точное описание дельта-субгармонических функций, которые принадлежат предельному множеству некоторой дельта-субгармонической функции в случае целого уточненного порядка.

Особое место в диссертации занимает теорема 3.9, в которой явно строится целая функция заданного нулевого уточненного порядка. Это очень сложная и тонкая конструкция. Эта задача стояла более 60 лет, с момента, когда Б.Я.Левин построил функцию с заданным индикатором нецелого уточненного порядка. Следующее продвижение было сделано В.Н.Логвиненко через 20 лет: он решил задачу построения функции с заданным индикатором случае целого ненулевого уточненного порядка. И только после работы Нгуен Куиня задачу можно считать полностью решенной.

Все основные результаты диссертации являются **новыми, научно обоснованными**, их **достоверность** вытекает из того, что все они снабжены подробными доказательствами. Кроме того, все результаты диссертации докладывались на нескольких конференциях и научных семинарах, в присутствии квалифицированных специалистов по анализу.

Результаты, полученные в работе, носят теоретический характер. **Практическое значение полученных результатов** состоит в том, что они могут быть использованы как в теории функций комплексного переменного, так и в других разделах математики, где используются целые, субгармонические и дельта-субгармонические функции.

К диссертации имеются следующие замечания:

1) На с. 24 хорошо бы было привести определение величины $V(r)$.

2) На этой же страницы слова «мера не нагружает шар» не расшифро-

вываются.

3) Стр. 35, 6-я строчка сверху, определение, предлагаемое для множества $K(r, E)$ не вполне корректно, поскольку рассматриваемое множество не является декартовым произведением отрезка $[0, r]$ на множество E.

4) Страница 11, строка 9 снизу, слово «называется» (должно быть «называются»).

5) Страница 15, строка 4 сверху, слово «пространстве» (должно быть «пространство»).

6) Страница 17, строка 5 сверху, слово «последовательность» (должно быть «последовательности»).

7) Страница 78, строка 7 снизу, слово «справедливы» (должно быть «справедливо»).

8) Страница 129, строка 12 сверху, слово «ИЗ» (должно «Из»).

9) Пропущенные точки: Страница 27, на конце строки 11 сверху и стоки 13 сверху. Страница 42, на конце строки 4 сверху.

Указанные замечания не влияют на общую высокую и исключительно положительную оценку диссертации, в которой получены серьёзные научные результаты. Считаю, что диссертация Нгуен Куиня полностью соответствует требованиям аттестационной коллегии Министерства образования и науки Украины, а её автор заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01. «математический анализ».

Доктор физико-математических
наук по специальности 01.01.01,
старший научный сотрудник
по специальности 01.01.01,
профессор Житомирского
государственного университета
им. Ивана Франко Севостьянов Е.А. С Е В О С Т Ь Я Н О В

Подпись свидетельствую
Проректор по научной
и международной
работе, доктор
педагогических наук,
профессор

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка
02125208
Україна

Сейко Н.А.