Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Бебія Максим Отарійович

УДК 517.977

СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА СИНТЕЗ ОБМЕЖЕНИХ КЕРУВАНЬ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ НЕКЕРОВАНИМ НЕСТІЙКИМ ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Коробов Валерій Іванович,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна МОН України, м. Харків,
завідувач кафедри прикладної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Чуйко Сергій Михайлович,
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»,
м. Слов'янськ,
завідувач кафедри математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б.І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник відділу теорії функції.

Захист відбудеться «17» лютого 2017 р. о 15:15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи 4.

Автореферат розісланий «____» ______________ 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Ігнатович С.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Керовані системи звичайних диференціальних рівнянь виникають при дослідженні широкого класу механічних, біологічних, економічних та інших процесів. Основи математичної теорії керування були закладні Л.С. Понтрягіним. Значний внесок у її основи та розвиток було зроблено Р. Беллманом, Р.В. Гамкрелідзе, В.Г. Болтянським, Р. Каллманом, М.М. Красовським, О.Б. Куржанським, В.І. Коробовим та багатьма іншими.

Багато питань теорії лінійних керованих систем є добре вивченими, а сама теорія носить завершений характер. Розв'язано задачі керованості, синтезу, стабілізації, оптимальної швидкодії та багато інших. У той самий час більшість реальних динамічних систем мають нелінійну природу. Ці факти обумовлюють зростаючий інтерес до дослідження нелінійних керованих систем.

Дослідження якісних властивостей нелінійних систем є інтенсивно розвиваючимся напрямком у сучасній теорії керування. Поряд із питаннями керованості, стабілізовності, спостережуваності, відображуваності та іншими стоять питання про конкретні методи побудови керувань для нелінійних систем. У даній дисертаційній роботі запропоновані методи побудови позиційних керувань для класу нелінійних некерованих за першим наближенням систем.

Важливою задачею теорії керування є задача стабілізації. В основі більшості підходів до розв'язання задач стабілізації лежить метод функції О.М. Ляпунова. Задача оптимальної стабілізації, в тому числі стабілізації нелінійних систем за першим наближенням, була розглянута М.М. Красовським. На сьогоднішній день не існує універсальних методів побудови функції Ляпунова та стабілізуючих керувань для нелінійних систем.

Ще однією важливою проблемою теорії керування є задача позиційного синтезу обмежених керувань. Вперше розв'язок задачі позиційного синтезу для n-вимірної лінійної системи був отриманий В.І. Коробовим. Запропонований В.І. Коробовим підхід, який було названо методом функції керованості, є розвитком методу функції Ляпунова. Метод функції керованості дозволяє добитися скінченності часу потрапляння у початок координат. Подальший розвиток цей підхід дістав у роботах В.І. Коробова, Г.М. Скляра, а також Г.О. Бессонова, В.О. Скорика та багатьох інших. Зокрема, було досліджено задачу синтезу для нелінійної системи із повністю керованим першим наближенням.

Інший підхід до дослідження нелінійних систем полягає у їх відображенні на системи більш простого вигляду, властивості яких є добре вивченими. Важливим класом таких систем є трикутні керовані системи, які вперше були розглянуті В.І. Коробовим. Для таких систем був запропонований метод відображення на лінійні системи за допомогою заміни змінних та керування. Подальший розвиток теорії відображуваності нелінійних систем на лінійні було отримано у работах A.J. Krener, R.W. Brockett, H. Nijmeijer, S. Celikovsky, W. Respondek, Г.М. Скляра, К.В. Скляр, С.Ю. Ігнатович та багатьох інших.

Незважаючи на глибокий розвиток методів нелінійної теорії керування, задача синтезу обмежених керувань та задача стабілізації потребують подальшого дослідження для широкого класу нелінійних систем. Зокрема, особливий інтерес викликають нелінійні системи із некерованим нестійким першим наближенням.

Задачі побудови керувань для нелінійних систем є актуальними на сучасному етапі розвитку нелінійної теорії керування. У даній дисертації розв'язані задачі стабілізації та синтезу для класів нелінійних систем із некерованим нестійким першим наближенням. Ці системи не відображаються на лінійні системи відомими методами. Для одного класу таких нелінійних систем у явному вигляді побудовані стабілізуюче керування і функція Ляпунова. Для другого класу таких систем побудована функція керованості та обмежене позиційне керування, яке гарантує потрапляння у нульову точку спокою за скінченний час. Також, в роботі досліджено клас сингулярних трикутних систем, які відображаються на нелінійну систему спеціального вигляду. За допомогою такого відображення для цих систем розв'язано задачі стабілізації та синтезу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та керування ХНУ імені В.Н. Каразіна у рамках державної науково-дослідної роботи за темою "Розв'язання задач керованості, лінеаризації, синтезу та стабілізації для нелінійних систем" (номер державної реєстрації 0111U010365) та на кафедрі прикладної математики ХНУ імені В.Н. Каразіна у рамках державної науково-дослідної роботи за темою "Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи" (номер державної реєстрації 0116U000823).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова керувань, які розв'язують задачі синтезу і стабілізації для нелінійних систем із некерованим нестійким першим наближенням.

Об'єктами дослідження є класи нелінійних некерованих за першим наближенням систем, в тому числі класи сингулярних трикутних систем, і сингулярне матричне рівняння Ляпунова спеціального вигляду.

Предметом дослідження є методи побудови класів стабілізуючих керувань, а також керувань, які забезпечують скінченність часу потрапляння фазових траєкторій системи у початок координат. Крім того, предметами дослідження є умови існування розв'язків сингулярного матричного рівняння Ляпунова та опис класу додатно визначених розв`язків цього рівняння.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в роботі був запропонований метод стабілізації та синтезу за нелінійним наближенням. Для систем нелінійного наближення було застосовано метод функції Ляпунова та метод функції керованості. Для класу сингулярних трикутних систем був використаний метод відображення на нелінійні системи спеціального вигляду. Цей метод є подібним до методу, який був запропонований В.І. Коробовим для відображення трикутних систем на лінійні.

Задачами досліджень є задачі синтезу і стабілізації, задача відображуємості нелінійних систем, а також задача знаходження додатно визначених розв'язків сингулярного рівняння Ляпунова спеціального вигляду.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримані такі нові наукові результати:

- Побудовано клас функцій Ляпунова та клас стабілізуючих керувань для канонічної системи із багатьма степеневими нелінійностями;
- Побудовано клас функцій керованості та клас обмежених синтезуючих керувань, що розв'язують задачу потрапляння фазових траєкторій системи у початок координат за скінченній час, для керованої системи, нелінійним наближенням якої є канонічна система зі степеневими нелінійностями;
- Розв'язано задачі синтезу та стабілізації для деяких класів керованих систем за нелінійним наближенням;
- Досліджено клас сингулярних трикутних керованих систем. Для цих систем розв'язано задачі синтезу та стабілізації за допомогою їх відображення на нелінійні системи спеціального вигляду;
- Досліджено сингулярне матричне рівняння Ляпунова спеціального вигляду. Отримано та доведено критерій існування додатно визначеного розв'язку цього рівняння та описано клас таких розв'язків.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації можуть бути використані як для подальшого дослідження більш широких класів нелінійних систем, так і для розв'язання практичних задач теорії керування. Також, матеріали, які містяться у дисертації, можуть бути використані при викладанні спецкурсів та проведенні семінарів з нелінійної теорії керування.

Особистий внесок автора. Постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику – професору В.І. Коробову. Загальний метод для розв'язання задачі синтезу був запропонований науковим керівником. Використовуючи цей метод, автор дисертації побудував клас обмежених синтезуючих керувань для нелінійної некерованої за першим наближенням системи спеціального вигляду. Формулювання та доведення результатів дисертації отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на Міжнародній науковій конференції "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харків, 2011), на Міжнародній науковій конференції "Современные проблемы математики, механики и информатики" (Харків, 2013), на IX міжнародній конференції для молодих учених "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харків, 2014), на II Міжнародній науковій конференції "Analysis and Mathematical Physics" (Харків, 2014.), на III Міжнародній науковій конференції "Analysis and Mathematical Physics" (Харків, 2015), на Міжнародній науковій конференції "Dynamical Systems and Their Applications" (Київ, 2015), на Міжнародній конференції "Современные проблемы естественных наук" (Харків, 2016), на IV Міжнародній науковій конференції "Analysis and Mathematical Physics" (Харків, 2016). Результати також обговорювались на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь та керування ХНУ імені В.Н. Каразіна (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Скляр Г.М.) та на семінарах кафедри прикладної математики ХНУ імені В.Н. Каразіна (керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Коробов В.І.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 статтях [1]-[6], з них 5 статей у фахових виданнях України та 1 стаття у виданні іншої держави, у 8 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [7]-[14].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, що поділені на підрозділи, висновків та списку літератури, що займає 14 сторінок та містить 120 найменувань. Обсяг роботи складає 117 сторінок. Результати, що виносяться на захист, містяться у розділах 2, 3, 4 та 5.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору Валерію Івановичу Коробову за постановку цікавої задачі, увагу до роботи та підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі дослідження, описано теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Також відмічено наукову новизну отриманих результатів, наведено їх апробацію та надано відомості про публікації автора за темою дисертації.

У **першому розділі** проведено огляд літератури, описано сучасний стан проблем нелінійної теорії керування, які пов'язані із стабілізацією та синтезом обмежених керувань для нелінійних системам звичайних диференціальних рівнянь із некерованим нестійким першим наближенням, наведено деякі важливі для дисертаційної роботи класичні результати з теорії керування.

У **другому розділі** сформульовані постановки задач стабілізації та синтезу. А саме, розглянуто нелінійну керовану систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = \varphi_{i-1}(t,x,u), \quad i = 2,\dots,n, \end{cases} \tag{1}$$

де $x = (x_1,\dots x_n)^* \in \Re^n$, $u \in \Re$ – керування, функції $\varphi_i(t,x,u): \Re \times \Re^n \times \Re \to \Re$ – неперервні, ліпшицеві по змінним x та u і $\varphi_i(t,0,0) = 0$ для всіх $t > 0$, $i = 1,\dots,n-1$.

Задача стабілізації для системи (1) полягає у побудові неперервного керування $u(t,x)$ такого, що нульова точка спокою системи (1), замкненої керуванням $u = u(t,x)$, є асимптотично стійкою в сенсі Ляпунова.

Задача синтезу обмеженого керування для системи (1) полягає у знаходженні керування $u = u(t,x)$ такого, що

1) функція $u(t,x)$ неперервна при всіх $x \neq 0$;
2) траєкторія замкненої керуванням $u = u(t,x)$ системи (1), що починається у довільній точці $x_0 \in Q$ (Q – деякий окіл початку координат) при $t = 0$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0) < +\infty$, причому $x(t) \in Q$ для всіх $t \in [0, T(x_0)]$;

3) $u(t,x)$ задовольняє обмеження $|u(t,x)| \le d$, де $d > 0$ – деяке задане число, для всіх $t \in [0, T(x_0)]$, $x \in Q$.

Якщо $Q = \Re$, то синтез називається глобальним.

У дисертаційній роботі досліджено задачі синтезу та стабілізації для системи (1) у випадку, коли

$$\varphi_i(t,x,u) = c_i x_i^{2k_i+1} + f_i(t,x,u), \quad i = 1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $k_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ (p_i – цілі числа, q_i – непарні числа), c_i – дійсні числа такі, що $\prod_{i=1}^{n-1} c_i \ne 0$.

Функції $f_i(t,x,u)$ – неперервні і ліпшицеві по змінним x та u. У загальному випадку така система є некерованою та нестійкою за першим наближенням.

У *підрозділі* 2.2 описано підхід до розв'язання задач синтезу та стабілізації для системи (1) з правою частиною вигляду (2). Цей підхід ґрунтується на дослідженні системи нелінійного наближення до системи (1). В якості нелінійного наближення розглянуто систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = c_{i-1} x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}, \quad i = 2,\ldots,n. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) має некероване нестійке перше наближення. Для системи (3) побудовано класи стабілізуючих та обмежених синтезуючих керувань у вигляді $u = u(x)$. У розділах 3 та 4 сформульовано додаткові умови відносно функцій $f_i(t,x,u)$, при яких ці керування розв'язують задачі синтезу та стабілізації і для вихідної нелінійної системи (1) з правою частиною (2).

При побудові таких керувань виникає сингулярне матричне рівняння Ляпунова спеціального вигляду, яке досліджено у *підрозділі* 2.3. А саме, розглянуто матричне рівняння

$$A^* F + FA = -W, \tag{4}$$

де $n \times n$-матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

($\{a_i\}_{i=1}^n$ – задані дійсні числа, s – задане натуральне число, таке що $0 \le s \le n-2$), $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – задана дійсна симетрична матриця, $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – невідома матриця.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1s+1} & w_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & w_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{1s+1} & \cdots & w_{s+1s+1} & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ w_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}^2}{a_{s+1}^2} & \cdots & w_{1s+1}\frac{a_{s+2}a_n}{a_{s+1}^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ w_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}a_n}{a_{s+1}^2} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_n^2}{a_{s+1}^2} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Нехай матриця $W_{s+1} = \left\{ w_{ij} \right\}_{i,j=1}^{s+1}$ ($w_{ij} = w_{ji}$) додатно визначена. У лемі 2.1 доведено, що в цьому випадку матриця (5) невід'ємно визначена. У теоремі 2.1. доведено необхідні та достатні умови існування додатно визначеного розв'язку матричного рівняння Ляпунова (4).

Теорема 2.1. Нехай матриця W_{s+1} додатно визначена. Тоді для того, щоб матричне рівняння (4) мало додатно визначений розв'язок при деякій невід'ємно визначеній матриці W, необхідно і достатньо, щоб власні значення матриці

$$A_{s+1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

мали від'ємні дійсні частини і при цьому матриця W мала вигляд (5).

У теоремі 2.2. описано клас додатно визначених розв'язків сингулярного рівняння Ляпунова (4) з правою частиною (5).

Теорема 2.2. Нехай матриця W має вигляд (5). Нехай матриця W_{s+1} додатно визначена, а власні значення матриці A_{s+1} мають від'ємні дійсні частини. Визначимо матрицю F_{s+1}, як єдиний додатно визначений розв'язок рівняння

$$A_{s+1}^* F_{s+1} + F_{s+1} A_{s+1} = -W_{s+1} .$$

Тоді матричне рівняння Ляпунова (4) розв'язне, причому матриця

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1s+1} & f_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & f_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1s+1} & \cdots & f_{s+1s+1} & f_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & f_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ f_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & f_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & f_{s+2s+2} & \cdots & f_{s+2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ f_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & \cdots & f_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & f_{ns+2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

де елементи $\left\{ f_{ij} \right\}_{i,j=s+2}^{n}$– довільні дійсні числа, буде розв'язком цього рівняння. При цьому, існують числа $\left\{ f_{ij} \right\}_{i,j=s+2}^{n}$ такі, що матриця (7) додатно визначена.

При доведенні теореми 2.2. був вказаний спосіб вибору таких елементів $\left\{ f_{ij} \right\}_{i,j=s+2}^{n}$. Для того, щоб матриця F була додатно визначеною, достатньо вибрати довільні елементи $\left\{ f_{ij} \right\}_{i,j=s+2}^{n}$ для $i \neq j$ такі, що $f_{ij} = f_{ji}$. Елементи f_{ii}, $i = s+2,\dots,n$, достатньо вибрати послідовно згідно умов

$$f_{ii} > \max\left\{ 0,\ \frac{1}{\Delta(F_{i-1})} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+i+1} f_{ji} M_{ji} \right\},\ i = s+2,\dots,n,$$

де $\Delta(F_i)$ – головний послідовний мінор i-го порядку матриці F, M_{ji} – визначник матриці, що отримана шляхом видалення рядка з номером j та стовпця з номером i із матриці F.

У **третьому розділі** розв'язана задача стабілізації для нелінійної системи (1) з правою частиною (2) у випадку, коли виконані наступні умови. Нехай існує число s таке, що $0 \le s \le n-2$, для якого виконана умова

$$k_i = 0,\ i = 0,\dots,n-2 \quad \text{та} \quad 0 < k_{s+1} < \cdots < k_{n-1}. \tag{8}$$

Для $s = n-2$ умова (8) означає, що $k_i = 0$, $i = 1,\dots,n-2$, $k_{n-1} > 0$. Нехай для $\|x\| < \rho$ функції $f_i(t,x,u)$, $i = 1,\dots,n-1$, задовольняють умовам

$$|f_i(t,x,u)| \le \alpha_i (x_1^{2k_1+2} + \cdots + x_{n-1}^{2k_{n-1}+2}),\ \ i = 1,\dots,n-1 \tag{9}$$

для деяких $\alpha_i > 0$, $\rho > 0$.

У *підрозділі 3.2* розв'язана задача стабілізації для нелінійної системи (3) у випадку, коли $c_i = 1$, $i = 1,\dots,n-1$. Отже, досліджено систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}, \quad i = 2,\dots,n. \end{cases} \tag{10}$$

У цьому підрозділі запропоновано шукати стабілізуюче керування для системи (10) у вигляді

$$u(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \sum_{i=s+1}^{n-1} a_{n-s+i} x_i^{2k_i+1}, \tag{11}$$

де $\{a_i\}_{i=n+1}^{2n-s-1}$ – деякі від'ємні дійсні числа. Функцію Ляпунова V для системи (10), замкненої керуванням $u = u(x)$ вигляду (11), побудовано у вигляді $V = (Fx, x)$.

Виберемо додатно визначену матрицю $W_{s+1} = \left\{ w_{ij} \right\}_{i,j=1}^{s+1}$ ($w_{ij} = w_{ji}$) довільним чином. Виберемо числа $\left\{ a_i \right\}_{i=n+1}^{2n-s-1}$ так, щоб власні значення матриці A_{s+1} мали від'ємні дійсні частини. Нехай матриця W має вигляд (5). Визначимо матрицю F, як деякий додатно визначений розв'язок рівняння (4).

Покладемо

$$a_{n-s+i-1} = -\frac{a_{s+1}}{a_i} \frac{f_{ii}}{f_{1s+1}},\ i = s+2,\dots,n,\ f_{ji} = \frac{a_j}{a_i} f_{ii},\ j = i+1,\dots,n,\ i = s+2,\dots,n-1.$$

Виберемо елементи f_{ii}, $i = s+2,\dots,n$, згідно умов

$$f_{ii} > \frac{a_i^2}{a_{i-1}^2} f_{i-1i-1},\ i = s+2,\dots,n.$$

У лемі 3.1 доведено, що при такому виборі елементів $\left\{f_{ij}\right\}_{i,j=s+2}^{n}$ матриця F є додатно визначеною. У теоремі 3.1 доведено, що в цьому випадку керування $u=u(x)$ вигляду (11) є стабілізуючим для системи (10), а функція $V=(Fx,x)$ є функцією Ляпунова замкненої керуванням $u=u(x)$ системи (10).

Введемо позначення

$$b_j^i=-\frac{a_{s+1}}{a_i}\left(\frac{f_{1j}f_{ii}}{f_{1s+1}}-f_{js+1}\frac{a_i^2}{a_{s+1}^2}\right),\ j=1,\ldots,s+1,\ i=s+2,\ldots,n,$$

$$b_j^i=-\frac{a_j}{a_i}\left(f_{ii}-f_{jj}\frac{a_i^2}{a_j^2}\right),\quad j=s+1,\ldots,i-1,\quad j=s+2,\ldots,n.$$

$$\beta_j=\min_{1\le i\le s}\left\{\left(\frac{\lambda_{\min}}{(n-s-1)\left|b_i^{j+1}\right|}\right)^{\frac{1}{r_i}}\right\},\ j=s+1,\ldots,n-1,$$

де $\lambda_{\min}$ – мінімальне власне значення матриці W_{s+1}. Виберемо числа r_j так, щоб задовольнити умови

$$0<r_j<2k_{s+1},\ \ j=1,\ldots,s,$$

$$2k_j+1<r_j<2k_{j+1}+1,\ \ j=s+1,\ldots,n-1.$$

Розглянемо неперервні скалярні функції

$$g_i(x)=2b_i^{i+1}-\sum_{j=1}^{s}\left|b_j^{i+1}\right|\,|x|^{2k_i-r_j}-2\sum_{j=i+2}^{n}\frac{\left|b_i^j\right|}{1+r_i}\,|x|^{r_i-2k_i-1}-2\sum_{j=s+1}^{i-1}\frac{r_j}{1+r_j}\left|b_j^{i+1}\right|\,|x|^{\frac{2k_i+1-r_j}{r_j}},$$

$i=s+1,\ldots,n-1$. Позначимо через x_i^* мінімальний додатний корінь рівняння $g_i(x)=0$, $i=s+1,\ldots,n-1$.

Розглянемо еліпсоїд

$$\Phi=\left\{x\in\Re^n:(Fx,x)<\min_{s+1\le i\le n-1}\frac{\gamma_i^2}{(F^{-1}e_i,e_i)}\right\},$$

де $\gamma_i=\min\{\beta_i,x_i^*\}$, $i=s+1,\ldots,n-1$, e_i – це i-й стовпець одиничної матриці розмірності $n\times n$. У теоремі 3.1 довдено, що при $n\ge 3$ еліпсоїд Φ належить області притягання до початку координат замкненої керуванням $u=u(x)$ вигляду (11) системи (10). При $n=2$ область притягання до початку координат співпадає з усім простором $\Re^2$.

У *підрозділі* 3.3 розв'язана задача стабілізації для системи

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u,\\ \dot{x}_i=x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}+f_{i-1}(t,x,u),\quad i=2,\ldots,n.\end{cases}\tag{12}$$

Так, у теоремі 3.2 довдено, що побудоване для системи (10) керування $u=u(x)$ розв'язує задачу стабілізації і для системи (12) у випадку, коли виконані умови (8) та (9).

Виберемо числа ε_i, $i=1,\ldots,n-1$, так, щоб

$$0<\varepsilon_i<\lambda_{\min},\ i=1,\ldots,s\quad\text{та}\quad 0<\varepsilon_i<b_i^{i+1},\ i=s+1,\ldots,n-1.$$

Нехай $\hat{x}_i$ є найменшим коренем рівняння $g_i(x_i)=\varepsilon_i$, $i=s+1,\dots,n-1$. Введемо у розгляд величину

$$\hat{m}_j=\min_{1\le i\le s}\left\{\left(\frac{\lambda_{\min}-\varepsilon_i}{(n-s-1)\left|b_i^{j+1}\right|}\right)^{\frac{1}{r_i}}\right\},\ j=s+1,\dots,n-1.$$

Позначимо $m_i=\min\{\hat{x}_i,\hat{m}_i\}$, $i=s+1,\dots,n-1$, $\varepsilon=\min\limits_{1\le i\le n-1}\varepsilon_i$, $m=\min\limits_{s+1\le i\le n-1}m_i$. Введемо у розгляд константи $L_1=\min\left\{\rho,\dfrac{b_1^2}{\alpha_1\|Fe_2\|}\right\}$, $L_2=\min\left\{\rho,\dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i\|Fe_{i+1}\|},m\right\}$

Теорема 3.2. Нехай виконані умови теореми 3.1. Тоді керування $u=u(x)$ вигляду (11) розв'язує задачу стабілізації для системи (12). Причому, область притягання нульової точки спокою замкненої керуванням $u=u(x)$ системи (12) містить еліпсоїд $\Phi=\{x\in\Re^n:(Fx,x)<\lambda_{\min}(F)L^2\}$, де $\lambda_{\min}(F)$ – мінімальне власне значення матриці F, $L=\begin{cases}L_1,\ n=2.\\L_2,\ n\ge 3\end{cases}$.

У *підрозділі 3.4.* досліджена задача стабілізації для нелінійної системи

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u,\\ \dot{x}_i=c_{i-1}x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}+f_{i-1}(t,x,u),\quad i=2,\dots,n,\end{cases}\tag{13}$$

де $\prod\limits_{i=1}^{n-1}c_i\ne 0$. У теоремі 3.3 дано розв'язок задачі стабілізації системи (13) у випадку, коли виконані умові (8) та (9).

Теорема 3.3. Нехай виконані умови теореми 3.2. Покладемо

$$\hat{L}_1=\min\left\{\frac{\rho}{\max\limits_{1\le i\le n}\hat{c}_i},\frac{b_1^2}{\hat{\alpha}_1\|Fe_2\|}\right\},\quad \hat{L}_2=\min\left\{\frac{\rho}{\max\limits_{1\le i\le n}\hat{c}_i},\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\hat{\alpha}_i\|Fe_{i+1}\|},m\right\},$$

де $\hat{\alpha}_i=\dfrac{\alpha_i}{|\hat{c}_{i+1}|}\max\limits_{1\le j\le n-1}\hat{c}_j^{2k_j+2}$, $\hat{c}_i$ задаються наступними співвідношеннями

$$\hat{c}_1=1,\quad \hat{c}_2=c_1,\quad \hat{c}_i=c_{i-1}\left(\hat{c}_{i-1}\right)^{2k_{i-1}+1},\quad i=3,\dots,n.$$

Тоді керування

$$u(x)=a_1x_1+\frac{a_2}{\hat{c}_2}x_2+\dots+\frac{a_n}{\hat{c}_n}x_n+\sum_{i=s+1}^{n-1}a_{n-s+i}\left(\frac{x_i}{\hat{c}_i}\right)^{2k_i+1}\tag{14}$$

розв'язує задачу стабілізації для системи (13). При цьому, область притягання нульової точки спокою системи (13), замкненої керуванням $u=u(x)$ вигляду (14), містить еліпсоїд

$$\Phi=\left\{x\in\Re^n:(\hat{C}^{-1}F\hat{C}^{-1}x,x)<\lambda_{\min}(F)\hat{L}^2\right\},\tag{15}$$

де $\hat{L}=\begin{cases}\hat{L}_1, n=2.\\ \hat{L}_2, n\ge 3\end{cases}$, $\hat{C}=diag(\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_n)$ – діагональна матриця розмірності $n\times n$, $\lambda_{\min}(F) \;\; >0$– мінімальні власні значення матриці F.

Зазначимо, що випадок довільних ненульових c_i зводиться до випадку $c_i=1$, $i=1,\ldots,n-1,$ за допомогою заміни змінних $x_i=\hat{c}_i z_i$, $i=1,\ldots,n$.

Із теореми 3.3 у випадку коли виконані умови (8) та (9), випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 3.4. Нехай виконані умови теореми 3.3. Тоді керування (14) стабілізує систему (1). При цьому, область притягання нульової точки спокою системи (1) замкненої керуванням (14), містить еліпсоїд (15).

У **четвертому розділі** досліджено задачу синтезу для системи (1) з правою частиною (2) у випадку, коли $k_i=0$, $i=0,\ldots,n-2,$ та $k_{n-1}=k$ ($k=\dfrac{p}{q}$, p– ціле число, q– непарне число). Задачу синтезу розв'язано при наступній умові. Нехай при $\|x\|\le\rho$, $|u|\le d$ функції $f_i(t,x,u),$ $i=1,\ldots,n-1,$ задовольняють умови

$$\left|f_i(t,x,u)\right|\le\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left|x_j\right|^{\frac{i+r}{j}}+\left|x_n\right|^{\frac{i+r}{m}}\right),\quad i=1,\ldots,n-2, \tag{16}$$

$$\left|f_{n-1}(t,x,u)\right|\le\alpha_{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left|x_j\right|^{\frac{m-1+r}{j}}+\left|x_n\right|^{\frac{m-1+r}{m}}\right), \tag{17}$$

де $\alpha_i>0$, $i=1,\ldots,n-1$, $r>0$ – деякі задані дійсні числа, $m=(2k+1)n-2k$.

У *підрозділі* 4.2 розв'язана задача синтезу обмеженого керування для нелінійної системи (3) у випадку, коли $c_i=1$, $i=1,\ldots,n-1$. Отже, досліджено систему

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u,\\ \dot{x}_i=x_{i-1},\quad i=2,\ldots,n-1,\\ \dot{x}_n=x_{n-1}^{2k_{n-1}+1}\end{cases} \tag{18}$$

Введемо до розгляду діагональні $n\times n$-матриці вигляду

$$D(\Theta)=diag(\Theta^{m-1},\Theta^{m-1},\ldots,\Theta^{m-n+1},1),\quad H=diag(m-1,m-2,\ldots,m-n+1,0).$$

Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ для $x\ne0$, як додатний корінь рівняння

$$2a_0\Theta^{2m}=(FD(\Theta)x,D(\Theta)x), \tag{19}$$

Якщо матриця $F^1=2mF-FH-HF$ додатно визначена, то рівняння (19) має єдиний додатний розв'язок для кожного $x\ne0$.

Покладемо $\Theta(0)=0$. Введена таким чином функція $\Theta(x)$ є неперервною для всіх $x\in\Re^n$ та неперервно диференційовною при $x\ne0$.

Синтезуюче керування запропоновано шукати у вигляді

$$u(x)=\frac{1}{\Theta^m(x)}(a,D(\Theta(x))x)+a_{n+1}\frac{x_{n-1}^{2k+1}}{\Theta^{m-1}(x)}, \tag{20}$$

де $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^*$ ($a_i<0$, $i=1,\ldots,n+1$– деякі дійсні числа).

Виберемо числа $a_i < 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, так, щоб матриця

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

була стійкою. Нехай матриця $W_{n-1} = \left\{ w_{ij} \right\}_{i,j=1}^{n-1}$ ($w_{ij} = w_{ji}$) додатно визначена, матриця W має вигляд (5) при $s = n-2$, а матриця F є додатно визначеним розв'язком сингулярного матричного рівняння Ляпунова (4) при $s = n-2$. Згідно теореми 2.2 матриця F має вигляд (7), де матриця $F_{n-1} = \left\{ f_{ij} \right\}_{i,j=1}^{n-11}$ ($f_{ij} = f_{ji}$) є єдиним додатно визначеним розв'язком матричного рівняння Ляпунова

$$A_{n-1}^{*} F_{n-1} + F_{n-1} A_{n-1} = -W_{n-1},$$

а f_{nn} – довільне дійсне число таке, що

$$f_{nn} > \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1}. \tag{21}$$

Нехай матриця F^1 додатно визначена. Покладемо

$$a_{n+1} = -\frac{f_{nn}}{f_{1n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{22}$$

Введемо наступні позначення:

$$b_i = \left(f_{1i} \frac{f_{nn}}{f_{1n-1}} - f_{in-1} \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \right) \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad b_{n-1} = \left(f_{nn} - f_{n-1n-1} \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \right) \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0.$$

Виберемо таке дійсне число R, що $0 < R < \dfrac{1}{2} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \dfrac{w_{n-1n-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} w_{in-1}^2}}$.

Покладемо

$$M_1(R) = \frac{\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} w_{n-1n-1} - 2 \frac{a_n}{a_{n-1}} R \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} w_{in-1}^2}}{\lambda_{\max}(F^1)(R^2+1)} > 0, \quad M_2(R) = \frac{\hat{\lambda} \min\left\{1, \left(\frac{2a_0}{\lambda_{\max}(F)}\right)^k\right\}}{\lambda_{\max}(F^1) 2^{(n-2)k}} \frac{R^{2k+2}}{(R^2+1)^{k+1}} > 0,$$

де $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{2}\left(\lambda_{\min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{\min} - 2b_{n-1})^2 + 4L^k \sum_{i=1}^{n-2} b_i^2} \right)$ ($L = \dfrac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}$, $\lambda_{\min} > 0$ – мінімальне власне значення матриці W_{n-1}), $\lambda_{\max}(F^1) > 0$ – максимальне власне значення матриці F^1, $\lambda_{\max}(F) > 0$ – максимальне власне значення матриці F.

Виберемо число a_0 так, щоб була справедливою нерівність

$$0 < a_0 < \min\left\{ \frac{1}{2} \lambda_{\min}(F) \left(\frac{2b_{n-1}\lambda_{\min}}{b_1^2 + \cdots + b_{n-2}^2} \right)^{\frac{1}{k}}, \ a_0^* \right\}, \tag{23}$$

де число a_0^* є єдиним додатним розв'язком рівняння

$$\sqrt{\frac{2a_0^*}{\lambda_{\min}(F)}}\left(\|a\|-a_{n+1}\left(\frac{2a_0^*}{\lambda_{\min}(F)}\right)^k\right)=d,$$

де $\lambda_{\min}(F)$ – мінімальне власне значення матриці F. У лемі 4.4 доведено, що при такому виборі числа a_0, керування $u=u(x)$ вигляду (20) зодовольняє нерівність $|u(x)|\le d$ для всіх $x\ne 0$.

У *підрозділі* 4.2 доведено, що похідна функції керованості $\Theta(x)$ в силу системи (18) задовольняє нерівність

$$\dot{\Theta}(x)\le -\min\left\{M_1(R),M_2(R)\right\}$$

для всіх $x\in\Re^n\setminus\{0\}$. Згідно методу функції керованості В.І. Коробова, ця нерівність означає, що керування $u=u(x)$ вигляду (20) розв'язує задачу глобального синтезу обмеженого керування для нелінійної некерованої за першим наближенням системи (18). Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1. Нехай числа $a_i<0$, $i=1,\dots,n-1$, такі, що матриця A_{n-1} стійка, $a_n<0$ – довільне число, $W_{n-1}=\left\{w_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n-1}$ – довільна додатно визначена матриця. Припустимо, що матриця F є додатно визначеним розв'язком рівняння (4) із правою частиною (5) при $s=n-2$. Виберемо f_{nn} згідно умови (21), визначимо a_{n+1} рівністю (22). Припустимо, що матриця F^1 додатно визначена. Виберемо таке число a_0, що виконана умова (23). Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x\ne 0$, як єдиний додатний розв'язок рівняння (19). Тоді керування $u=u(x)$ вигляду (20) розв'язує задачу глобального синтезу для системи (18). При цьому, час руху $T(x_0)$ із довільної точки $x_0\in\Re^n\setminus\{0\}$ задовольняє нерівність

$$T(x_0)\le\frac{1}{\min\left\{M_1(R),M_2(R)\right\}}\Theta(x_0).$$

У *підрозділі* 4.3 розв'язано задачу синтезу обмеженого керування для нелінійної системи

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u,\\ \dot{x}_i=x_{i-1}+f_{i-1}(t,x,u),\quad i=2,\dots,n-1,\\ \dot{x}_n=x_{n-1}^{2k_{n-1}+1}+f_{n-1}(t,x,u)\end{cases}\tag{24}$$

Покладемо $\beta=\min\{M_1(R),M_2(R)\}>0$,

$$\gamma=\frac{2}{\lambda_{\max}(F^1)}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(F)}{2a_0}}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_{i-1}\|Fe_i\|\left(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{i+r}{j}}+L^{\frac{i+r}{m}}\right)+\alpha_{n-1}\|Fe_n\|\left(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{m-1+r}{j}}+L^{\frac{m-1+r}{m}}\right)\right).$$

Нехай ε – довільне число таке, що $0<\varepsilon<\beta$.

У теоремі 4.2 доведено, що побудоване для системи (18) керування $u=u(x)$ розв'язує задачу стабілізації і для системи (24), якщо виконані умови (16), (17).

Теорема 4.2. Нехай виконані умови теореми 4.1. Тоді керування $u=u(x)$ вигляду (20) розв'язує задачу стабілізації для системи (24). При цьому, траєкторія системи (24), замкненої керуванням $u = u(x)$, що починається у довільній точці $x_0 \in Q$, де

$$Q = \left\{ x \in \Re^n : \Theta(x) \le \min\left\{ \left\{\frac{\beta - \varepsilon}{\gamma}\right\}^{\frac{1}{r}}, \frac{\rho}{nL}, \sqrt[m]{\frac{\rho}{nL}} \right\} \right\},$$

закінчується в нулі у деякий скінченний момент часу $T(x_0)$, причому $T(x_0) \le \frac{1}{\varepsilon}\Theta(x_0)$.

У *підрозділі* 4.4 розв'язана задача синтезу обмеженого керування для нелінійної системи (1) з правою частиною (2) у випадку, коли $\prod_{i=1}^{n-1} c_i \ne 0$. Отже, досліджено систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = c_{i-1}x_{i-1} + f_{i-1}(t,x,u), \quad i = 2,\dots,n-1, \\ \dot{x}_n = c_{n-1}x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t,x,u), \end{cases} \tag{25}$$

де функції $f_i(t,x,u)$, $i = 1,\dots,n-1$, задовольняють умови (16), (17).

Теорема 4.3. Нехай виконані умови теореми 4.1. Задамо числа $\hat{c}_i$, $i = 1,\dots,n$, співвідношеннями

$$\hat{c}_1 = 1, \ \ \hat{c}_i = c_{i-1}\hat{c}_{i-1}, \ \ i = 2,\dots,n-1, \ \ \hat{c}_n = c_{n-1}\left(\hat{c}_{n-1}\right)^{2k+1}.$$

Константу $\hat{\gamma}$ визначимо рівністю

$$\gamma = \frac{2}{\lambda_{\max}(F^1)}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(F)}{2a_0}}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\hat{\alpha}_{i-1}\|Fe_i\|\left(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{i+r}{j}} + L^{\frac{i+r}{m}}\right) + \hat{\alpha}_{n-1}\|Fe_n\|\left(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{m-1+r}{j}} + L^{\frac{m-1+r}{m}}\right)\right),$$

де $\hat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\hat{c}_{i+1}}\max\left\{|\hat{c}_1|^{i+r}, |\hat{c}_1|^{\frac{i+r}{2}}, \dots, |\hat{c}_{n-1}|^{\frac{i+r}{n-1}}, |\hat{c}_n|^{\frac{i+r}{m}}\right\}, \quad i = 1,\dots,n-1,$

$$\hat{\alpha}_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\hat{c}_n}\max\left\{|\hat{c}_1|^{m-1+r}, |\hat{c}_1|^{\frac{m-1+r}{2}}, \dots, |\hat{c}_{n-1}|^{\frac{m-1+r}{n-1}}, |\hat{c}_n|^{\frac{m-1+r}{m}}\right\}.$$

Нехай функція керованості $\Theta(x)$ є додатним коренем рівняння

$$2a_0\Theta^{2m} = (FD(\Theta)C^{-1}x, D(\Theta)C^{-1}x),$$

де $\hat{C} = diag(\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_n)$ – діагональна матриця розмірності $n \times n$, число a_0 задовольняє нерівність (23). Тоді керування

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{\hat{c}_i}\frac{x_i}{\Theta^i(x)} + \frac{a_n}{\hat{c}_n}\frac{x_n}{\Theta^m(x)} + \frac{a_{n+1}}{\hat{c}_{n-1}^{2k+1}}\frac{x_{n-1}^{2k+1}}{\Theta^{m-1}(x)}$$

розв'язує задачу синтезу для системи (25). Більше того, при $u = u(x)$ трєкторія системи (25), що починається у точці $x_0 \in \hat{Q}$, де

$$\hat{Q} = \left\{ x \in \Re^n : \Theta(x) \le \min\left\{ \left\{\frac{\beta - \varepsilon}{\hat{\gamma}}\right\}^{\frac{1}{r}}, \frac{\rho}{nL}, \sqrt[m]{\frac{\rho}{nL}} \right\} \right\},$$

закінчується у нулі у деякий скінченний момент часу $T(x_0)$, причому $T(x_0) \le \frac{1}{\varepsilon}\Theta(x_0)$.

У **п'ятому розділі** досліджено питання стабілізовності та керованості класів трикутних сингулярних систем. Такі нелінійні системи відображаються на нелінійну систему (18) за допомогою заміни змінних $z = F(x)$ та керування. На основі такого відображення досліджені задачі стабілізації та синтезу для запропонованих класів сингулярних трикутних систем.

У *підрозділі 5.1* запропоновані класи трикутних систем для яких обернене відображення координат та керування знайдено у явному вигляді. Розглянута нелінійна система вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_0(x_1,\dots,x_n)u + g(x_1,\dots,x_n), \\ \dot{x}_i = c_{i-1}(x_i,\dots,x_n)x_{i-1}, \quad i = 2,\dots,n-1, \\ \dot{x}_n = c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}, \end{cases} \tag{26}$$

де функції $c_i(x_{i+1},\dots,x_n)$, $i = 0,\dots,n-1,$ мають неперервні частинні похідні до i-го порядку включно, $g(x_1,\dots,x_n)$ – неперервна функція.

Розглянемо заміну змінних

$$\begin{gathered} z_n = x_n \equiv F_n(x_n), \quad z_{n-1} = \left(c_{n-1}(x_n)\right)^{\frac{1}{2k+1}} x_{n-1} \equiv F_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \\ z_i = \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n)}{\partial x_j} c_{j-1}(x_j,\dots,x_n)x_{j-1} + \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n)}{\partial x_n} c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1} \equiv F_i(x_i,\dots,x_n), \end{gathered} \tag{27}$$

$i = n-2,\dots,1$. Введемо позначення

$$\hat{F}_i(x_{i+1},\dots,x_n) = \sum_{j=i+2}^{n-1} \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n)}{\partial x_j} c_{j-1}(x_j,\dots,x_n)x_{j-1} + \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1},\dots,x_n)}{\partial x_n} c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}, i = n-2,\dots,1$$

$$\hat{F}_0(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial F_1(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1} g(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial F_1(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_j} c_{j-1}(x_j,\dots,x_n)x_{j-1} + \\ + \frac{\partial F_1(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n} c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}.$$

$i = n-2,\dots,1$. Тоді заміна змінних (27) приймає вигляд

$$\begin{gathered} z_n = x_n, \quad z_{n-1} = \left(c_{n-1}(x_n)\right)^{\frac{1}{2k+1}} x_{n-1} \\ z_i = \left(c_{n-1}(x_n)\right)^{\frac{1}{2k+1}} \left(\prod_{j=i}^{n-2} c_j(x_{j+1},\dots,x_n) \right) x_i + \hat{F}_i(x_{i+1},\dots,x_n), \; i = n-2,\dots,1. \end{gathered} \tag{28}$$

Розглянемо нове керування

$$v = \left(c_{n-1}(x_n)\right)^{\frac{1}{2k+1}} \left(\prod_{j=0}^{n-2} c_j(x_{j+1},\dots,x_n) \right) u + \hat{F}_0(x_1,\dots,x_n). \tag{29}$$

Введемо до розгляду функції:

$$H_n(z_n) = z_n, \; H_{n-1}(z_{n-1}, z_n) = \frac{z_{n-1}}{\left(c_{n-1}(z_n)\right)^{\frac{1}{2k+1}}},$$

$$H_{p-1}(z_{p-1},\dots,z_n) = \left(c_{n-1}(H_n(z_n))\right)^{-\frac{1}{2k+1}} \left(\prod_{j=p-1}^{n-2} c_j\left(H_{j+1}(z_{j+1},\dots,z_n),\dots,H_n(z_n)\right) \right)^{-1} \times \\ \times \left(z_{p-1} - \hat{F}_{p-1}(H_p(z_p,\dots,z_n),\dots,H_n(z_n))\right), \quad p = n-1,\dots,2.$$

Тоді обернена заміна змінних має вигляд $x_i = H_i(z_i,\dots,z_n),\ i=1,\dots,n$.

За допомогою заміни змінних та керування (28), (29) доведено наступні теореми.

Теорема 5.1. Нехай функції $c_i(x_{i+1},\dots,x_n),\ i=0,\dots,n-1,$ мають неперервні частинні похідні до i-го порядку включно та $\prod_{i=0}^{n-1} c_i(x_i,\dots,x_n)\neq 0.$ Тоді система (26) заміною змінних (28) та заміною керування (29) відображається на систему

$$\begin{cases} \dot z_1 = v, \\ \dot z_i = z_{i-1}, \quad i=2,\dots,n-1, \\ \dot z_n = z_{n-1}^{2k+1} \end{cases} \tag{30}$$

Теорема 5.2. Нехай функції $c_i(x_{i+1},\dots,x_n),\ i=0,\dots,n-1,$ мають неперервні частинні похідні до i-го порядку включно та $\prod_{i=0}^{n-1} c_i(x_i,\dots,x_n)\neq 0.$ Тоді система (26) стабілізовна.

Теорема 5.3. Нехай функції $c_i(x_{i+1},\dots,x_n),\ i=0,\dots,n-1,$ мають неперервні частинні похідні до i-го порядку включно та $\prod_{i=0}^{n-1} c_i(x_i,\dots,x_n)\neq 0.$ Тоді система (26) є глобально нуль-керованою.

Зауважимо, що якщо керування $v(z)$ розв'язує задачу стабілізації (синтезу) для системи (30), то керування

$u(x) = \left(c_{n-1}(x_n)\right)^{-\frac{1}{2k+1}}\left(\prod_{j=0}^{n-2} c_j\left(x_{j+1},\dots,x_n\right)\right)^{-1}\left(v(F_1(x_1,\dots,x_n),F_2(x_2,\dots,x_n),\dots,F_n(x_n)) - \hat F_0(x_1,\dots,x_n)\right),$ розв 'язує задачу стабілізації (синтезу) для системи (26) .

Аналогічні результати отримані для системи

$$\begin{cases} \dot x_1 = c_0 u + f_0(x_1,\dots,x_n), \\ \dot x_i = c_{i-1}x_{i-1} + f_{i-1}(x_i,\dots,x_n), \quad i=2,\dots,n-1, \\ \dot x_n = \left(c_{n-1}x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(x_n)\right)^{2k+1}, \end{cases} \tag{31}$$

де $\prod_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$, ($c_i$ – задані числа), $f_i \in C^i(\Re^{n-i})$, $i=0,\dots,n-1$. А саме, побудовано заміну змінних та керування, що відображає систему (31) на систему (30). У теоремі 5.4 запропоновано стабілізуючі та синтезуючі керування для системи (31) .

У *підрозділі 5.2* досліджено нелінійну систему

$$\begin{cases} \dot x_1 = f_1(u, x_1,\dots x_n), \\ \dot x_i = f_i(x_{i-1},\dots,x_n),\ i=2,\dots,n. \end{cases} \tag{32}$$

Нехай функції $f_i(x_{i-1},\dots,x_n)$, $i=1,\dots,n-1$, задовольняють умови

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}}\right| \ge a > 0,\ i=1,\dots,n-1, \quad \left|\frac{\partial f_n^{\frac{1}{2k+1}}}{\partial x_{n-1}}\right| \ge a > 0 \tag{33}$$

при всіх $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_0 = u$), де a – константа, яка не залежить від $u, x_1, \ldots, x_n$. Доведено наступну теорему.

Теорема 5.5. Нехай функції $f_i : \Re^{n-i+2} \to \Re$, $i = 1, \ldots, n-1$, мають неперервні частинні похідні до i-го порядку включно, а функція $f_n : \Re^2 \to \Re$ така, що $f_n^{\frac{1}{2k+1}}(x_{n-1,} x_n)$ має неперервні частинні похідні до n-го порядку включно, причому $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді, якщо виконані умови (33), то система (32) є глобально нуль-керованою.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано задачі стабілізації та синтезу для широких класів нелінійних систем із некерованим нестійким першим наближенням. Також досліджено задачі керованості та стабілізації для керованих сингулярних трикутних систем, що не відображаються на лінійні системи відомими методами.

У роботі одержані такі нові наукові результати:

1) Розв'язано задачу стабілізації для нелінійної системи із некерованим нестійким першим наближенням. Для розглянутої керованої системи запропоновано метод стабілізації за нелінійним наближенням. Для системи нелінійного наближення до вихідної системи побудовано функцію Ляпунова та стабілізуюче керування. Доведено, що побудоване керування розв'язує задачу стабілізації і для вихідної нелінійної системи. Дано еліпсоїдальну оцінку області притягання нульової точки спокою.
2) Розв'язано задачу синтезу обмежених керувань для класу нелінійних систем із некерованим нестійким першим наближенням. Для системи нелінійного наближення до вихідної керованої системи побудовано функцію керованості та обмежені синтезуючі керування. Доведено, що ці керування розв'язують задачу синтезу і для вихідної нелінійної системи. Отримано оцінку часу потрапляння у початок координат.
3) Досліджено сингулярне матричне рівняння Ляпунова, що виникає при побудові керувань для нелінійних систем. Отримано та доведено умови існування додатно визначених розв'язків цього рівняння. Описано клас додатно визначених розв'язків розглянутого матричного рівняння.
4) Досліджено класи нелінійних систем, які відображаються на нелінійні системи спеціального вигляду. Зокрема, досліджено сингулярні трикутні системи. Такі системи за допомогою заміни змінних та керування відображаються на канонічну систему зі степеневою нелінійністю, яка також досліджена в роботі. Запропоновано широкі класи систем, для яких обернене відображення змінних та керування знайдено у явному вигляді. Для таких систем за допомогою такого відображення побудовано стабілізуючі та синтезуючі керування.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1) Бебия М.О. Задача синтеза для одной неуправляемой по первому приближению системы / М.О. Бебия // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2011. – Вип. 64, № 990. – С. 48-53.
2) Коробов В.И. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению / В.И. Коробов, М.О. Бебия // Доповіді НАН України. – 2014. – № 2. – С. 20-25.
3) Бебия М.О. Стабилизация систем со степенной нелинейностью / М.О. Бебия // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2014. – Вип. 69, № 1120. – С. 75-84.
4) Bebiya M.O. Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity / M.O. Bebiya // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2015. – Vol. 81. - P. 36-51.
5) Bebiya M.O. On stabilization problem for nonlinear systems with power principal part / M.O Bebiya, V.I. Korobov // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2016. – Vol. 12, No. 2. – P. 113–133.
6) Бебия М.О. Гашение колебаний грузов соединенных нелинейной пружиной / М.О. Бебия // Механика. Исследования и инновации.– 2016. – Вып. 9. – С. 27-32.
7) Бебия М.О. Задача синтеза для одной неуправляемой по первому приближению системы / М.О. Бебия // Международная школа-конференция «Тараповские чтения»: “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях”: 17- 22 апреля 2011 г.: сб. тез. – Харьков. – 2011. – С. 159.
8) Бебия М.О. Решение задачи стабилизации для одного класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем / М.О. Бебия // Международня школа-конференция «Тараповские чтения»: “Современные проблемы математики, механики и информатики”: 29 сентября - 4 октября 2013 г.: сб. тез. – Харьков. – 2013. – С. 87.
9) Бебия М.О. О стабилизации одного класса нелинейных систем / М.О. Бебия // IX международная конференция для молодых ученых: “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях”: 25-26 апреля 2014 г.: сб. тез. –Харьков. – 2014. – С. 12.
10) Bebiya M.O. Synthesis problem for systems with power nonlinearity / M.O. Bebiya // 2-nd International conference “Analysis and Mathematical Physics”, 16-20 June 2014: book of abstracts. – Kharkiv. – 2014. – P. 30-31.

11) Bebiya M.O. Stabilization of systems with power principal part / M.O. Bebiya // 3-d International conference “Analysis and Mathematical Physics”, 15-19 June 2015: book of abstracts. – Kharkiv. – 2015. – P. 17-18.
12) Bebiya M.O. Stabilization of systems with multiple power nonlinearities / M.O. Bebiya // International conference “Dynamical Systems and Their Applications”, 22-26 June 2015: book of abstracts. – Kyiv. – 2015. – P. 21.
13) Бебия М.О. Синтез ограниченных управлений для класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем / М.О. Бебия // Международная конференция «Тараповские чтения»: “Современные пробле мы естественных наук”: 1-15 марта 2016 г.: сб. тез. –Харьков. – 2016. – С. 48.
14) Bebiya M.O. Synthesis problem for a class of nonlinear systems nonlinearity / M.O. Bebiya // IV International conference “Analysis and Mathematical Physics”, 13-17 June 2016: book of abstracts. – Kharkiv. – 2016. – P. 15-16.

АНОТАЦІЯ

Бебія М.О. Стабілізація та синтез обмежених керувань для нелінійних систем із некерованим нестійким першим наближенням. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2016.

Дисертаційна робота присячена дослідженню нелінійних систем із некерованим нестійким першим наближенням. Розглянуто задачі стабілізації та синтезу обмежених керувань. Також досліджено задачі стабілізовності та керованості для сингулярних трикутних систем.

Побудова стабілізуючого керування ґрунтується на дослідженні системи нелінійного наближення. Для системи нелінійного наближення на основі методу функції Ляпунова побудовано стабілізуюче керування. Доведено, що побудоване керування розв'язує задачу стабілізації і для вихідної нелінійної системи. Аналогічний підхід використано і для розв'язання задачі синтезу. Для побудови синтезуючого керування застосовано метод функції керованості.

У роботі також досліджено сингулярне матричне рівняння Ляпунова, щи виникає при побудові керувань. Дано критерій розв'язуваності цього рівняння та описано клас його додатно визначених розв'язків.

Розглянуто питання керованості та стабілізовності для сингулярних трикутних систем. Показано, що такі системи за допомогою заміни змінних та керування відображаються на нелінійну систему спеціального вигляду, що досліджена у роботі. На основі такого відображення досліджено задачі стабілізації, синтеза та керованості для певних класів сингулярних трикутних систем.

Ключові слова: задача стабілізації, задача синтезу, керованість нелінійних систем, метод функції Ляпунова, метод функції керованості, нелінійне наближення, сингулярна трикутна система, сингулярне матричне рівняння Ляпунова.

АННОТАЦИЯ

Бебия М.О. Стабилизация и синтез ограниченных управлений для нелинейных систем с неуправляемым неустойчивым первым приближением. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 2016.

Диссертационная работа посвящена изучению нелинейных систем с неуправляемым неустойчивым первым приближением. Исследованы задачи стабилизации и синтеза ограниченного управления для таких систем. Также исследованы задачи стабилизируемости и управляемости для сингулярных треугольных систем.

Построение стабилизирующего управления основано на нелинейном приближении. В качестве нелинейного приближения исходной управляемой системы выбрана каноническая система со степенной нелинейностью. Для системы нелинейного приближения на основе метода функции Ляпунова построено стабилизирующее управление. Показано, что построенное управление стабилизирует и исходную нелинейную систему. Дана эллипсоидальная оценка области притяжения нулевой точки покоя соответствующей замкнутой системы. Аналогичный подход применяется и для решения задачи синтеза ограниченного управления. При построении синтезирующего управления для системы нелинейного приближения применяется метод функции управляемости. Это метод позволяет добиться конечности времени попадания в начало координат. Также рассмотрен класс нелинейных систем, которые отображаются на каноническую систему со степенными нелинейностями. С помощью такого отображения для этих систем построены классы стабилизирующих и синтезирующих управлений.

В работе также исследовано сингулярное матричное уравнение Ляпунова, которое возникает при построении управлений. Дан критерий разрешимости этого уравнения и описан класс его положительно определенных решений.

Изучены вопросы управляемости и стабилизпруемости для сингулярных треугольных систем. Показано, что такие системы с помощью замены координат и управления отображаются на нелинейную систему особого вида, которая изучена в работе. Такой подход позволяет сформулировать достаточные условия управляемости для широкого класса сингулярных треугольных систем. Предложены классы сингулярных треугольных систем, для которых обратное отображение

координат и управления найдено в явном виде. На основе такого отображения решены задачи стабилизации и синтеза для этих систем.

Ключевые слова: задача стабилизации, задача синтеза, управляемость нелинейных систем, метод функции Ляпунова, метод функции управляемости, нелинейное приближение, сингулярная треугольная система, сингулярное матричное уравнение Ляпунова.

ABSTRACT

Bebiya M.O. Stabilization and bounded control synthesis for nonlinear systems with uncontrollable unstable first approximation. – Manuscript.

Thesis for obtaining the degree of candidate of sciences (Ph.D.) in physics and mathematics, speciality 01.01.02 – Differential Equations. – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 2016.

The thesis is devoted to the study of nonlinear systems with uncontrollable unstable first approximation. The stabilization problem and the bounded control synthesis problem are investigated. Also, we consider the stabilizability and controllability problems for singular triangular systems.

The stabilizing feedback design is based on a nonlinear approximation. The stabilizing control for the approximate system is constructed using the Lyapunov function method. It is shown that this control solves the stabilization problem for the original nonlinear system. The similar approach is used to solve the finite-time stabilization problem. The finite-time stabilizing control for the nonlinear approximation of the original system is constructed basing on the controllability function method.

We also study the singular Lyapunov matrix equation, which arises in the feedback construction process. We obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of this equation. The class of positive definite solutions of this singular matrix equation is described.

We consider singular triangular form systems. We find an explicit change of coordinates and control that transforms several classes of singular triangular systems into a nonlinear system of a special form. Using this change of variables we construct the classes of stabilizing and finite-time stabilizing controls.

Keywords: stabilization problem, synthesis problem, controllability of nonlinear systems, Lyapunov function method, controllability function method, nonlinear approximation, singular triangular systems, singular Lyapunov matrix equation.