МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА

Гукалов Олексій Олександрович

УДК 533.72

ТОЧНІ ТА НАБЛИЖЕНІ РОЗВ’ЯЗКИ РІВНЯННЯ БРІАНА-ПІДДАКА

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Гордевський Вячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, м. Харків,
професор, завідувач кафедри математичного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Герасименко Віктор Іванович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Шепельський Дмитро Георгійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
статистичних методів математичної фізики

Захист відбудеться «11» вересня 2015 р. о 15:15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи 4, ауд. 6-52.

З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи 4.

Автореферат розісланий «__»____________2015 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Ігнатович С. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Опис поведінки розрідженого газу здійснюється за допомогою функції розподілу, що залежить від швидкості молекули, її положення в просторі і від часу. Усі макроскопічні характеристики газу, тобто його гідродинамічні параметри (щільність, температура, масова швидкість і т.д.) легко виражаються через функцію розподілу. Ця функція повинна задовольняти добре відомому кінетичному рівнянню Больцмана, одержаному ще в 1872 році. З математичної точки зору рівняння Больцмана являє собою досить складне нелінійне інтегро-диференціально-функціональне рівняння, конкретний вигляд якого залежить від обраної моделі зіткнень (взаємодії) між молекулами газу.

Серед численних таких моделей найбільш природною і такою, що часто розглядаэться, є модель твердих (жорстких, абсолютно пружних) куль (сфер), в ній передбачається, що молекули є однаковими кулями, які миттєво взаємодіють між собою лише в момент зіткнення, в результаті якого їх лінійні швидкості змінюються за законами класичної механіки зі збереженням сумарних імпульсу і енергії. Інша, не менш цікава модель досліджувалася набагато рідше, хоча вона була запропонована Бріаном ще в 1894 році (оскільки Піддак потім активно вивчав цю модель, її іноді називають моделлю Бріана-Піддака). У ній молекули передбачаються так званими шорсткуватими сферами, які на відміну від вищеописаних твердих сфер володіють не тільки поступальною, але і обертальною енергією. В результаті зіткнення змінюються як лінійні, так і кутові швидкості молекул. Ця модель вдало поєднує в собі порівняльну простоту і достатню фізичну правдоподібність.

Незважаючи на цікаві фізичні властивості шорсткуватих сфер, раніше вони вивчалися досить мало. Актуальною на сьогоднішній день залишається задача знаходження загального вигляду максвеллівських розв'язків рівняння Больцмана для моделі Бріана-Піддака, а також опису процесу взаємодії таких потоків, що досягається за допомогою наближених розв’язків цього рівняння.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна в рамках державних науково-дослідних робіт за темами «Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстрації 0109U001456) і «Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування і теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (номер державної реєстрації 0111U010364).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є знаходження загального вигляду максвеллівського розв'язку для рівняння Бріана-Піддака, а також деяких явних наближених його розв’язків.

Основним завданням, яке доводиться вирішувати для досягнення зазначеної мети, є пошук таких умов на коефіцієнтні функції бімодального розподілу і на поведінку всіх наявних параметрів, які були б достатніми для того, щоб відповідне відхилення могло бути зроблено як завгодно малим (при цьому сам бімодальний розподіл, зрозуміло, не повинен зводитися до відомого точного розв'язку, тобто до жодного з максвелліанів).

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є кінетичне рівняння Больцмана для моделі Бріана-Піддака.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є точні та наближені розв'язки, що мають вигляд бімодального розподілу з максвеллівськими модами спеціального типу.

Методи дослідження. При роботі над дисертацією розв'язувалася спеціальна система диференціальних рівнянь в частинних похідних для гідродинамічних параметрів максвелліана. При вивченні поведінки відхилень між частинами рівняння використовувалися методи математичного аналізу і теорії узагальнених функцій. Векторний аналіз дозволив дослідити фізичну і геометричну структуру як неоднорідних, так і нестаціонарних максвелліанів, а також фізичний зміст знайдених явних наближених розв'язків.

Наукова новизна одержаних результатів.

У роботі вперше отримано:

1.Отримано загальний вигляд локальних максвелліанів для моделі шорсткуватих куль та досліджено його фізичний зміст.

2. Побудовано наближений розв'язок у вигляді бімодального розподілу з потоками типу «смерчу». В якості похибки між частинами рівняння використовувалося рівномірно-інтегральне відхилення.

3. Досліджено взаємодію двох потоків в газі з шорсткуватих сфер, що описують рух типу "прискорення-ущільнення". Використано бімодальний розподіл з максвеллівськими модами спеціального вигляду. Отримані різні умови, достатні для мінімізації рівномірно-інтегрального відхилення між частинами рівняння Бріана-Піддака.

4. Побудовано нові наближені явні розв'язки вигляду лінійних комбінацій двох локальних максвелліанів типу "прискорення-ущільнення", які мінімізують рівномірно-інтегральну похибку з вагою між частинами рівняння, що розв'язується.

5. Знайдено коефіцієнтні функції для бімодального розподілу з модами типу «смерчу» при мінімізації інтегрального відхилення.

6. Отримано явний вигляд бімодального розподілу з гвинтовими модами та знайдено умови мінімізації рівномірно-інтегрального відхилення.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані для подальшого дослідження розв'язків кінетичного рівняння Бріана-Піддака

Особистий внесок автора. У спільних з науковим керівником статтях співавтору належать постановки задач та обговорення результатів. Решта результатів отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації були представлені на XIV Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2012р), XVI Міжнародній конференції «Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем» (Київ, 2013р.), Міжнародній конференції «Аналіз та математична фізика» (Харків, 2013р.), Міжнародній конференції, присвяченій 105-річниці з дня народження С. Л. Соболєва (Новосибірськ, 2013р.), на науковому семінарі з математичної фізики математичного відділу ФТІНТ НАН України(керівник: академік НАН України Хруслов Є. Я.) у 2013р, на науковому семінарі кафедри диференціальних рівнянь та керування ХНУ імені В.Н. Каразіна (керівник: професор Коробов В. І.), 2015р., на науковому семінарі "Об'єднаний семінар з математичної фізики" Інституту математики НАН України (керівники: член-кореспондент НАН України професор А. Г. Нікітін, професор Є. Д. Білоколос), 2015р.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи містяться у 6-х статтях у фахових виданнях [1]–[6] та в 4 матеріалах і тезах міжнародних математичних конференцій [7]–[10].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 121 сторінку. Список літератури займає 11 сторінок і містить 97 найменувань. Результати, що виносяться на захист, сформульовано та доведено в розділах 2 – 4.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Гордевському Вячеславу Дмитровичу за постійну увагу до роботи та підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність наукової проблеми, що розглядається в дисертації, визначено мету і задачі дослідження. Надано відомості про апробацію результатів дослідження та публікації автора за темою дисертації.

У *першому* розділі наведено огляд літератури за темою дисертаційної роботи.

У *другому розділі* наведена постановка задачі, якій присвячена дисертаційна робота.

У *підрозділі 2.1* розглянуто рівняння Бріана-Піддака.

Означення 1.1. Функція розподілу $f(t,V,x,\omega)$ описує кількість часток або молекул, які у момент часу t знаходяться поблизу точки простору x та мають лінійну швидкість близьку до V та кутову швидкість також нескінченно наближену до ω.

Ріняння Бріана-Піддака має наступний вигляд:

$$D(f) \equiv Q(f,f), \tag{1.1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \\ \times\left[f(t,V_1^*,x,\omega_1^*) f(t,V^*,x,\omega^*) - f(t,V,x,\omega) f(t,V_1,x,\omega_1) \right]. \end{gathered} \tag{1.3}$$

У *підрозділі 2.2* формулюється означення точного розв'язку рівняння Бріана-Піддака.

Єдиним точним розв'язком рівняння (1.1) є вираз, який є аналогічним до отриманого Максвелом у 1859р. для моделі твердих куль, тобто такий, що задовольняє наступній системі:

$$\begin{cases} D(f) = 0, \\ Q(f,f) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Для моделі шорсткуватих куль у монографії «Математична теорія неоднорідних газів»(Чепмен С., Каулінг Т.) стверджувалось, що натуральний логарифм такого виразу має наступний вигляд:

$$\ln f = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} V - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + \alpha^{(4)} (I\omega + [x \times V]), \tag{1.5}$$

де коефіцієнти $\alpha^{(i)}, i = 1..4$ можуть залежати від часу t та просторової координати x.

У *підрозділі 2.3* наводиться вигляд, в якому буде шукатися наближений розв'язок рівняння Бріана-Піддака.

Наближені розв'язки будемо шукати у вигляді бімодального розподілу

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{1.6}$$

де шукані функції $\varphi_i(t,x)$ – невід'ємні та гладкі(тут і усюди далі $i = 1,2$), а максвелліани M_i описують один із можливих типів руху течій газу.

При знаходженні явних наближених розв'язків будемо використовувати наступні відхилення, що були раніше запропоновані Гордевським В.Д. у своїх роботах:

- «рівномірно-інтегральний» відхил:

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} \int_{R^3} dV d\omega \left| D(f) - Q(f,f) \right|; \tag{1.7}$$

- «чисто-інтегральний» відхил:

$$\Delta_1 = \int_R dt \int_{R^3} dx \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| D(f) - Q(f,f) \right|; \tag{1.8}$$

- «відхил з вагою»:

$$\tilde{\Delta} = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \, | D(f) - Q(f,f) |. \tag{1.9}$$

У *розділі 3* отримано загальний вигляд локальних максвелліанів для моделі Бріана-Піддака, а також проведено фізичну трактовку знайдених розв'язків.

У підрозділі 3.1 встановлено залежність коефіцієнтів $\alpha^{(j)}, j=1..4$, що були використані у формулі (1.5), від часу t та просторової координати x.

При безпосередній підстановці до системи (1.4), як виявляється, формула (1.5) містить неточність, яку неважко виправити, прибравши доданок $\alpha^{(4)} I\omega$. Тоді вираз для $\ln f$ матиме наступне представлення:

$$\ln f = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} V - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \right) + \alpha^{(4)} [x \times V]. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Загальний вигляд локальних максвелліанів для моделі шорсткуватих куль задається формулою (2.1), де коефіцієнти $\alpha^{(j)}, j=1..4$ мають наступне представлення:

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = Cx + C_1; \\ \alpha^{(2)} = -Ct + C_3; \\ \alpha^{(3)} = -2C_2; \\ \alpha^{(4)} = C_4, \end{cases} \tag{2.2}$$

де C, C_1, C_2, C_3, C_4 – будь-які скалярні та векторні константи.

У *підрозділі 3.2* проведена фізична інтерпретація знайденого загального вигляду локальних максвелліанів.

У *розділі 4* побудований явний вигляд наближених розв'язків, що при спеціальному підборі гідродинамічних параметрів мінімізує деякі відхилення з наведених (1.7), (1.8) та (1.9).

У *підрозділі 4.1* побудовані наближені розв'язки рівняння Бріана-Піддака з максвеллівськими модами, що описують смерчоподібний рух газу. У якості міри відхилення використовуються відхилення (1.7), (1.8).

Максвелліани M_i, що описують смерчоподібний рух газу, мають наступний вигляд:

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 I^{3/2} e^{\beta_i [\bar{\omega}_i \times (x - \bar{x}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)]^2} e^{-\beta_i \left((V - \bar{V}_i)^2 + I\omega^2 \right)}, \tag{3.1}$$

де у різних течій свої гідродинамічні параметри: ρ_i – густина, $\beta_i = \frac{1}{2T}$ – обернена температура, $\bar{\omega}_i$ – кутова швидкість газу у цілому, $\bar{x}_{0i}$ – точка, через яку проходить вісь густини у момент часу $t=0$, $\bar{u}_0$ – будь-який вектор, що перпендикулярний до $\bar{\omega}$ (поступальна швидкість вісі густини), $\bar{V}_i$ – масова швидкість.

Лема 3.1 Для моделі шорсткуватих куль інтеграл зіткнень, проінтегрований по простору лінійних та кутових швидкостей обнуляється, тобто має місце рівність:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega Q\left(M_k, M_j\right) = 0, \quad (k \neq j). \tag{3.2}$$

Теорема 3.1 Нехай для функцій φ_i має місце представлення:

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) e^{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{3.3}$$

та для будь-яких $(t,x) \in R^4$ наступні функції обмежені:

$$\psi_i,\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t},\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|,\ \psi_i \left|\bar{\omega}_{0i} \times (x - \bar{u}_{0i} t)\right|,\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\bar{\omega}_{0i} \times (x - \bar{u}_{0i} t)\right]\right| \tag{3.4}$$

при цьому:

$$r_i^2 = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2}[\bar{\omega}_i \times (x - \bar{x}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)]^2, \tag{3.5}$$

$$\bar{x}_{0i} = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2}\left[\bar{\omega}_i \times (\hat{V}_i - \bar{u}_{0i})\right]. \tag{3.6}$$

Також нехай:

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i}, \tag{3.7}$$

де $m_i \geq \frac{1}{2}$, а $\bar{\omega}_{0i}$ – будь-який фіксований вектор із R^3.

Тоді існує така величина Δ', що:

$$\Delta \leq \Delta', \tag{3.8}$$

причому:

1)якщо $m_i > \frac{1}{2}$, то виконується нерівність:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta' \leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \hat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right| + 4\pi d^2 \rho_1 \rho_2 \left|\hat{V}_1 - \hat{V}_2\right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1 \psi_2). \tag{3.9}$$

2)якщо $m_i = \frac{1}{2}$, то у правій частині нерівності (3.9) додається вираз

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left|\bar{\omega}_{0i} \times \left(\hat{V}_i - \bar{u}_{0i}\right)\right| \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_i .$$

Теорема 3.2 Нехай залишається у силі представлення (3.7), але замість умови (3.3) припустимо, що:

$$\left[\bar{\omega}_{0i} \times \left(\hat{V}_i - \bar{u}_{0i}\right)\right] = 0, \tag{3.10}$$

а також обмежені функції:

$$\varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \varphi_i \left|\bar{\omega}_{0i} \times (x - \bar{u}_{0i} t)\right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\left[\bar{\omega}_{0i} \times (x - \bar{u}_{0i} t)\right]\right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}. \tag{3.11}$$

Тоді, як і у теоремі 3.1, має місце оцінка (3.8), причому:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta' = \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in R^4}\left|\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\hat{V}_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)\mu_i(t,x)+\right.$$
$$\left.+\varphi_1\varphi_2\mu_1(t,x)\mu_2(t,x)\pi d^2\rho_j\left|\hat{V}_i-\hat{V}_j\right|\right|+2\rho_1\rho_2\pi d^2\left|\hat{V}_1-\hat{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\left[\mu_1(t,x)\mu_2(t,x)\varphi_1\varphi_2\right], \tag{3.12}$$

де:

$1)\mu_i(t,x)=exp\left\{\left[\bar{\omega}_{0i}\times(x-\bar{u}_{0i}t)\right]^2\right\},\ \ m_i=\frac{1}{2};$

$2)\mu_i(t,x)=1,$ але $m_i>\frac{1}{2};$

Наслідок 3.1 Нехай виконані умови теореми 3.1.У випадку $m_i>\frac{1}{2}$ припустимо, що: $\psi_i=C_i\left(x-\hat{V}_i t\right)-$ довільні невід’ємні неперервно-диференційовні функції та $\hat{V}_1=\hat{V}_2$. Тоді має місце наступне твердження:

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\beta_0:\ \ \forall\beta_i>\beta_0,\ \ \ \Delta<\varepsilon. \tag{3.13}$$

Наслідок 3.2 Якщо виконані умови теореми 3.2 (функції φ_i у точності співпадають з функціями ψ_i з наслідку 3.1), а також залишається вірною рівність $\hat{V}_1=\hat{V}_2$, то твердження (3.13) виконується.

Максвелліани M_i, що описують смерчоподібний рух газу, після елементарних перетворень набувають наступного вигляду:

$$M_i=\rho_i\left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2}e^{-\beta_i\left(\left(V-\bar{V}_i\right)^2+I\omega^2\right)}, \tag{3.14}$$

Теорема 3.3 Нехай виконуються умови (3.7) з такими ж значеннями коефіцієнта m_i як і у теоремі 3.1 та умова (3.10) теореми 3.2.

Нехай функції φ_i у розподілі (1.6) не залежать від β_i та такі, що вирази (3.11)(з заміною ω_i на $\bar{\omega}_i$) належать простору $L_1(R^4)$ при усіх додатних β_i.

Тоді існує така величина Δ_1', що виконується нерівність:

$$\Delta_1\leqslant\Delta_1', \tag{3.15}$$

причому:

1)якщо $m_i=\frac{1}{2}$, то:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta_1'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\int_{R^1}dt\int_{R^3}dx\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\hat{V}_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|\mu_i(t,x)$$
$$+4d^2\rho_{01}\rho_{02}\pi\left|\hat{V}_1-\hat{V}_2\right|\int_{R^1}dt\int_{R^3}dx\varphi_1\varphi_2\mu_1(t,x)\mu_2(t,x), \tag{3.16}$$

де $\mu_i(t,x)=exp\{\left[\bar{\omega}_{0i}\times(x-u_{0i}t)\right]^2\};$

2) якщо $m_i>\frac{1}{2}$, то виконується (3.16) при $\mu_i(t,x)=1.$

Означення 3.1 Будемо розглядати області $G\subset R^n$ такі, що число компонент зв'язності перетину цієї області з будь-якою прямою, що паралельна будь-якій із координатних вісей, є скінченним.

Означення 3.2 Через $G_\delta(\delta>0)$ позначимо $\delta-$окіл множини G, тобто множину усіх точок, відстань від яких до множини G менше δ.

Означення 3.3 У випадку $n=4$: позначимо через G_x-проекцію області G на гіперплощину $t=0$, а через $G_k(k=1,2,3)-$проекцію тієї ж області на гіперплощину $x^k=0$.

Означення 3.4 Нехай область $G\subset R^n, \delta>0$. Тоді "$\delta-$плато" над областю G називається неперервно-диференційовна функція $\varphi_\delta(G,t,x)$, яка визначається наступним чином:

$$\varphi_\delta(G,t,x)=\begin{cases}1, & (t,x)\in G,\\ 0, & (t,x)\,\overline{\in}\, G_\delta,\\ 0\leqslant\varphi_\delta\leqslant 1, & (t,x)\in G_\delta\setminus G,\end{cases} \tag{3.17}$$

і, крім того, на будь-якій прямій, що паралельна якій-небудь координатній осі, має не більш ніж скінченне числа строгих екстремумів.

Наслідок 3.3 Нехай виконуються умови (3.7), (3.10), а також $m_i\geq\frac{1}{2}$, а функції φ_i мають вигляд фінітних "плато" таких, що:

$$\begin{gathered}V\left[\left(supp\varphi_i\right)_{G_x}\right]\to 0,\\ \hat{V}_i^k\cdot V\left[\left(supp\varphi_i\right)_{G_k}\right]\to 0,\quad k=1,2,3,\end{gathered} \tag{3.18}$$

де $V-$об'єм зазначених проекцій.

Нехай, крім того, виконується хоча б одна з наступних вимог:

$$\hat{V}_1=\hat{V}_2, \tag{3.19}$$

$$supp\varphi_1\cap supp\varphi_2=\varnothing, \tag{3.20}$$

$$d\to 0. \tag{3.21}$$

Тоді $\lim\limits_{\beta_i\to+\infty}\Delta_1=0.$

Теорема 3.4 Нехай знову виконується умова (3.7) теореми 3.1, а також має місце розклад (3.3), при цьому функції (3.4) належать простору $L_1(R^4)$.

Тоді має місце оцінка (3.15), при цьому у випадку $m_i=\frac{1}{2}$ виконується співвідношення (3.16) з додаванням до правої частини ще одного доданку вигляду:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\left\|\left[\bar{\omega}_{0i}\times\left(\hat{V}_i-\bar{u}_{0i}\right)\right]\right\|\int_{R^1}dt\int_{R^3}dx\psi_i, \tag{3.22}$$

при цьому функції $\mu_i(t,x)$ зберігаються, а у випадку $m_i>\frac{1}{2}$ співвідношення (3.16) залишається вірним з тими ж функціями $\mu_i(t,x)=1.$

Наслідок 3.4 Нехай виконуються усі умови теореми 3.4, причому функції ψ_i задовольняють тим же вимогам, які були накладені на функції φ_i у наслідку 3.3. Тоді, якщо вірно, що $m_i > \frac{1}{2}$ або $m_i = \frac{1}{2}$ разом з (3.10), то при виконанні хоча б однієї з вимог (3.19)–(3.21) має місце рівність $\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta_1 = 0.$

У *підрозділі 4.2* побудовані наближені розв'язки рівняння Бріана-Піддака з максвеллівськими модами, що описують рух газу типу «прискорення-ущільнення». У якості міри відхилення використовуються відхилення (1.7), (1.9).

Нехай максвелліани мають вигляд (3.14), за умови, що густина газу матиме представлення

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \left(\bar{V}_i^2 + 2\bar{u}_i x \right)}, \tag{3.23}$$

де $\bar{V}_i = \hat{V}_i - \bar{u}_i t.$

Теорема 4.1 Нехай функції φ_i у розподілі (1.6) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,x) = \frac{D_i}{\left(1+t^2\right)^{\xi_i}} C_i \left(x + \bar{u}_i \frac{\left(\hat{V}_i - \bar{u}_i t\right)^2}{2\bar{u}_i^2} \right), \tag{3.24}$$

де константи D_i, ξ_i задовольняють наступним нерівностям:

$$D_i > 0, \quad \xi_i \geqslant \frac{1}{2}, \tag{3.25}$$

та функції C_i – невід'ємні, належать простору $C^1(R^3)$, і володіють обмеженим носієм (тобто фінітні) або швидкоспадаючі на нескінченності. Також нехай виконуються наступні вимоги:

$$\hat{V}_i = \frac{\hat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \quad \bar{u}_i = \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} \tag{3.26}$$

з такими умовами:

$$k_i \geqslant \frac{1}{2}, \quad n_i \geqslant 1, \quad k_i \geqslant \frac{1}{2} n_i, \tag{3.27}$$

де $\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i}$ – довільні фіксовані тривимірні вектори.

Тоді вірне наступне твердження:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall D_1, D_2 : 0 < D_1, D_2 < \delta, \exists \beta_0, \forall \beta_i > \beta_0, \Delta < \varepsilon. \tag{3.28}$$

Теорема 4.2 Припустимо, що функції $\varphi_i(t,x)$ наступного вигляду:

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \cdot e^{-\beta_i \left(\left(\hat{V}_i - \bar{u}_i t\right)^2 + 2\bar{u}_i x \right)}, \tag{3.29}$$

де $\psi_i = D_i \cdot C_i(t,x)$, тут $D_i > 0, C_i$ – фінітна функція.

Нехай також виконується умова:

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \quad n_i \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.30}$$

Тоді:

а)якщо виконується наступна рівність:

$$supp C_1 \cap supp C_2 = \varnothing,$$

або умова (3.19), то вірне твердження (3.28).

б)у випадку довільних носіїв функцій C_1 та C_2, та швидкостей $\hat{V}_1,\hat{V}_2$ твердження теореми 4.1 як і раніше виконується, якщо буде доповнено умовою нескінченної мализни діаметра частки газу ($d<\delta$), що відповідає фізичній вимозі навколовільномолекулярної течії (газ, що близький до кнудсенівського).

Теорема 4.3 Нехай функції φ_i у розподілі (1.6) мають наступний вигляд:

$$\varphi_i(t,x)=\psi_i(t,x)\cdot e^{-\beta_i\left(\hat{V}_i-\bar{u}_it\right)^2}, \tag{3.31}$$

та виконується умова (3.30), але для $n_i\geqslant 1$.

Тоді твердження теореми 4.2 залишається вірним, якщо:

а)функції ψ_i мають вигляд:

$$\psi_i(t,x)=\frac{D_i}{\left(1+t^2\right)^{\xi_i}}C_i\left(\left[x\times\hat{V}_i\right]\right), \tag{3.32}$$

а також виконується умова (3.25) та $\hat{V}_i\perp\bar{u}_{0i}$.

б)має місце представлення:

$$\psi_i(t,x)=\frac{D_i}{\left(1+t^2\right)^{\xi_i}}C_i\left(x\right), \tag{3.33}$$

причому на функції C_i накладаються такі ж обмеження, що і у теоремі 4.1.

Теорема 4.4 Припустимо, що має місце наступне представлення:

$$\varphi_i(t,x)=\psi_i(t,x)\cdot e^{-2\beta_i\bar{u}_ix}, \tag{3.34}$$

та зберігається вимога (3.26), але:

$$n_i\geqslant\frac{1}{2},k_i\geqslant\frac{1}{2}. \tag{3.35}$$

Нехай функція $\psi_i(t,x)$ має вигляд:

$$\psi_i(t,x)=D_iC_i(t)E_i(x), \tag{3.36}$$

де $D_i>0,C_i(t)-$ володіють тими ж властивостями, що і в попередніх теоремах 4.1, 4.2, 4.3, а $E_i(x)-$ невід'ємна, фінітна або швидкоспадаюча на нескінченності та обмежена разом зі своїм градієнтом по x функція. Тоді виконується твердження (3.28).

Теорема 4.5 Нехай коефіцієнтні функції $\varphi_i(t,x)$зберігають вигляд (3.34), де функції ψ_i такі, що добуток множника

$$e^{\beta_i(\hat{V}_i-\bar{u}_it)^2}\cdot\frac{1}{1+|t|} \tag{3.37}$$

на вирази:

$$\psi_i;\quad \frac{\partial\psi_i}{\partial t};\quad \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|;\quad \psi_it;\quad \left(\bar{u}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)t \tag{3.38}$$

обмежені по $t,\ x$ на R^4.

Нехай, крім того, виконуються співвідношення:

$$\bar{u}_i = \frac{s_i \bar{u}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}, \tag{3.39}$$

$$\hat{V}_i = \frac{s_i \hat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \tag{3.40}$$

де $\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i} \in R^3$ – деякі фіксовані вектори, s_i – довільна додатна константа, а показник $k_i \geqslant \frac{1}{2}$.

Тоді існує така величина $\tilde{\Delta}'$, що:

$$\tilde{\Delta} \leqslant \tilde{\Delta}', \tag{3.41}$$

причому вона має наступні скінченні границі:

а)при $k_i > \frac{1}{2}$ вірна рівність:

$$\begin{gathered}\lim_{\beta_i \to +\infty} \tilde{\Delta}' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \bar{u}_{0i}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| \right\} \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} s_i \rho_{0i} |\bar{u}_{0i}| \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \bar{u}_{0i}^2} \psi_i \right\};\end{gathered} \tag{3.42}$$

б)при $k_i = \frac{1}{2}$ отримуємо:

$$\begin{gathered}\lim_{\beta_i \to +\infty} \tilde{\Delta}' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 \right| e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} \right\} \\ +2\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left(\frac{2 s_i |\bar{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} + s_i^2 \left(\bar{u}_{0i}, \hat{V}_{0i} \right) \right) \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2 (\hat{V}_{0i} - \bar{u}_{0i} t)^2} \psi_i \right\}.\end{gathered} \tag{3.43}$$

Наслідок 4.1 Нехай функції ψ_i при $k_i > \frac{1}{2}$ мають вигляд:

$$\psi_i(t,x) = C_i(x) e^{-s_i^2 \bar{u}_{0i}^2 t^2}, \tag{3.44}$$

де $C_i(x)$−довільні додатні, гладкі, обмежені на R^3 функції разом з $C_i'(x)$. Тоді похибка $\tilde{\Delta}$ є довільно малою при достатньо малих значеннях $s_1, s_2, T_1, T_2,$ тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдуться $\delta > 0$ та $\beta_0 > 0$ такі, що для усіх $s_1, s_2,$ що задовольняють нерівності $0 < s_1, s_2 < \delta,$ та усіх $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ виконана нерівність $\tilde{\Delta} < \varepsilon.$

Наслідок 4.2 У випадку $k_i = \frac{1}{2}$ нехай залишаються справедливі усі умови наслідку 4.1, та виконується ще одна умова $\bar{u}_i \perp \hat{V}_i.$ Тоді твердження наслідку 4.1 залишається у силі.

Теорема 4.6 Нехай має місце наступне представлення:

$$\varphi_i(t,x) = C_i \left(x + \bar{u}_i \frac{(\hat{V}_i - \bar{u}_i t)^2}{2\bar{u}_i^2} \right), \tag{3.45}$$

де C_i −невід'ємні, фінітні або достатньо швидко спадаючі на нескінченності гладкі функції.

Також нехай має місце співвідношення (3.26), (3.27). Тоді справедливе твердження:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \tilde{\Delta} = 0. \tag{3.46}$$

Теорема 4.7 Нехай функції φ_i у розподілі (1.6) мають вигляд (3.29), де $\psi_i(t,x)$ такі, що вирази:

$$t\psi_1\psi_2; \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \quad t\psi_i; \quad \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|; \quad t\left(\bar{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right), \tag{3.47}$$

помножені на $\frac{1}{1+|t|}$, обмежені на R^4; нехай також виконується представлення (3.30) для $n_i > \frac{1}{2}$. Тоді справедлива оцінка (3.41), причому:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \tilde{\Delta}' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \hat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| + 4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} |\hat{V}_1 - \hat{V}_2| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} (\psi_1\psi_2). \tag{3.48}$$

Наслідок 4.3 Нехай функції ψ_i у (3.29) мають такий вигляд:

$$\psi_i = C_i\left(x - \hat{V}_i t\right) \tag{3.49}$$

або

$$\psi_i = C_i\left(\left[x \times \hat{V}_i\right]\right), \tag{3.50}$$

де C_i – невід'ємні, гладкі, фінітні функції.

Тоді:

1) Якщо виконується рівність (3.19) або (3.20), то вірне твердження (3.46).

2) При довільних $C_1, C_2, \hat{V}_1, \hat{V}_2$ будемо мати:

$$\lim_{d \to 0} \lim_{\beta_i \to +\infty} \tilde{\Delta}' = 0. \tag{3.51}$$

Теорема 4.8 Припустимо, що функції $\varphi_i(t,x)$ мають вигляд (3.31), причому вирази:

$$t\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1\bar{u}_1 x + 2\beta_2\bar{u}_2 x}; \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t} e^{2\beta_i\bar{u}_i x}; t\psi_i e^{2\beta_i\bar{u}_i x}; \quad \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right| e^{2\beta_i\bar{u}_i x}; \quad t\left(\bar{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right) e^{2\beta_i\bar{u}_i x} \tag{3.52}$$

обмежені з вагою $\frac{1}{1+|t|}$ та виконується умова (3.30), але $n_i \geqslant 1$.

Тоді має місце оцінка (3.41), причому у випадку $n_i > 1$ виконується твердження (3.48), а при $n_i = 1$ низькотемпературна границя величини $\tilde{\Delta}'$ наступна:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\tilde{\Delta}'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left|\mu_i(x)\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\hat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)\right|$$
$$+4\pi d^2\rho_{01}\rho_{02}\,|\hat{V}_1-\hat{V}_2|\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left[\mu_1(x)\mu_2(x)\psi_1(t,x)\psi_2(t,x)\right] \qquad (3.53)$$
$$+2\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\left|\left(\bar{u}_{0i},\hat{V}_i\right)\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left\{\mu_i(x)\psi_i(t,x)\right\},$$

де $\mu_i(x)=e^{2\bar{u}_{0i}x}$.

Наслідок 4.4 Нехай виконується умова (3.30) при $n_i\geqslant 1$, а також умова $\bar{u}_i\perp\hat{V}_i$, а функції ψ_i мають вигляд (3.49) або (3.50). Тоді виконуються твердження (3.46) та (3.51).

У *підрозділі 4.3* побудовані наближені розв’язки рівняння Бріана-Піддака з максвеллівськими модами, що описують гвинтовий рух газу типу «прискорення-ущільнення». У якості міри відхилення використовується «рівномірно-інтегральний» відхил.

Розв'язок шукається у вигляді (1.6), де максвелліани матимуть вигляд (3.14), але масова швидкість матиме наступне представлення:

$$\bar{V}_i=\hat{V}_i+[\bar{\omega}_i\times x]-\bar{u}_i t, \qquad (3.54)$$

де $\bar{u}_i\parallel\bar{\omega}_i$.

Теорема 5.1 Нехай розподіл f задається формулами (1.6), (3.14), (3.54), а функції $\varphi_i(t,x)$ мають вигляд:

$$\varphi_i(t,x)=\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}}C_i\left(x+\bar{\omega}_i t^2\,\frac{\bar{u}_i^2}{2\bar{u}_i\bar{\omega}_i}\right), \qquad (3.55)$$

де $D_i>0,\ s_i\geqslant\dfrac{1}{2}$ – довільні константи, а C_i – довільні, невід'ємні, гладкі, фінітні або швидкоспадаючі функції зазначених векторних аргументів.

Припустимо, що:

$$\bar{\omega}_i=\bar{\omega}_{0i}\beta_i^{-m_i},\quad \bar{u}_i=\bar{u}_{0i}\beta_i^{-n_i}, \qquad (3.56)$$
$$\hat{V}_i=0,$$

де $\bar{\omega}_{0i},\ \bar{u}_{0i}\in R^3$ – довільні, фіксовані вектори, а на числа m_i, n_i накладаються умови:

$$m_i\geqslant\frac{1}{2},\quad n_i\geqslant 1.$$

Тоді існує така величина $\tilde{\Delta}'$, що виконується нерівність (3.8), причому має місце твердження:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_iK_i(s_i)\sup_{x\in R^3}(C_i(x)\mu_i(x)), \qquad (3.57)$$

де:

$$K_i(s_i)=2s_i\sup_{t\in R^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}, \qquad (3.58)$$

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1, & m_i>\dfrac{1}{2}, n_i>1;\\ e^{2\bar{u}_{0i}x}, & m_i>\dfrac{1}{2}, n_i=1;\\ e^{[\bar{\omega}_{0i}\times x]^2}, & m_i=\dfrac{1}{2}, n_i>1;\\ e^{[\bar{\omega}_{0i}\times x]^2+2\bar{u}_{0i}x}, & m_i=\dfrac{1}{2}, n_i=1.\end{cases} \qquad (3.59)$$

Наслідок 5.1 Нехай виконані усі умови теореми 5.1, тоді для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для будь-яких достатньо малих коефіцієнтів D_1, D_2, а β_1, β_2 – достатньо великих досягається нескінченна мализна відхилення Δ(1.7). Тобто виконується твердження (3.28).

Теорема 5.2 Нехай коефіцієнтні функції у бімодальному розподілі (1.6) мають наступний вигляд:

$$\varphi_i(t,x)=\psi_i(t,x)\rho_{0i}[\bar{\rho}_i(t,x)]^{-1}e^{-\beta_i\bar{\omega}_i^2 r_i^2}, \qquad (3.60)$$

де

$$\bar{\rho}_i=\rho_{0i}e^{\beta_i(\bar{V}_i^2+2\bar{u}_i x)},$$

$$r_i^2=\frac{1}{\bar{\omega}_i^2}\left[\bar{\omega}_i\times(x-x_{0i})\right]^2, \quad x_{0i}=\frac{[\bar{\omega}_i\times\hat{V}_i]}{\bar{\omega}_i^2}.$$

Нехай при виконанні умов:

$$m_i>\frac{1}{2}, \quad n_i>1$$

також залишається вірним припущення (3.56). Тоді, якщо функції:

$$\psi_i(t,x)=D_i C_i(t)E_i(x), \qquad (3.61)$$

де $C_i(t), E_i(x)\geqslant 0$ – гладкі, фінітні або швидкоспадаючі, то твердження (3.28) залишається у силі.

ВИСНОВКИ

В дисертації отримані наступні результати:

1. Визначено загальний вигляд локальних масвеллівських розподілів для моделі Бріана-Піддака.

2. Детально класифіковані основні типи руху течій газу для моделі шорстккуватих куль.

3. Продемонстровано, що інтеграл зіткнень для довільних максвелліанів, що проінтегрований по простору лінійних та кутових швидкостей, обертається на нуль.

4. Отримано наближений розв’язок у вигляді бімодального розподілу з модами, що описують смерчоподібний рух газу у випадку рівномірно-інтегрального та чисто-інтегрального відхилення між частинами рівняння Бріана-Піддака.

5. Продемонстровано, що вигляд бімодального розподілу з модами спеціального типу, що описують "прискорюючи-ущільнюючий" рух газу для моделі шорсткуватих куль у випадку рівномірно-інтегрального відхилення зберігається у вигляді, аналогічному тому, який раніше був відомий для більш простої моделі твердих куль.

6. Досліджено взаємодію двох прискорюючи-ущільнюючих течій, де у ролі відхилення між частинами рівняння Бріана-Піддака використовується відхилення з вагою.

7. Побудовано наближений розв'язок у вигляді бімодального розподілу з модами, що описують гвинтовий рух типу "прискорення-ущільнення", що мінімізує з як завгодно високим ступенем точності рівномірно-інтегральне відхилення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гордевский В. Д. Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер / В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов // Український математичний журнал. — 2011. — Т. 63, № 5. – С. 629 — 639.

2. Гордевский В. Д. Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака / В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». — 2011. — № 990. — С. 27 — 41.

3. Gukalov A. A. Interaction between "Accelerating-Packing" Flows for the Bryan-Pidduck Model / A. A. Gukalov // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2013. — Vol. 9, № 3. — P. 316 — 331.

4. Гордевский В. Д. Взаимодействие локально-максвелловских потоков в модели шероховатых сфер / В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов // Теоретическая и математическая фізика. — 2013. — Т. 176, № 2. — С. 322 — 336.

5. Гордевський В. Д. Взаємодія смерчових течій у випадку моделі шорсткуватих куль / В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». — 2013. — № 1061. — С. 4 — 16.

6. Гордевський В. Д. Бімодальний розподіл з гвинтовими модами для моделі Бріана-Піддака / В. Д. Гордевський, О. О. Гукалов // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 1. — С. 178 — 191.

7. Гордевский В. Д. Общий вид максвелловских распределений для модели Бриана-Пиддака / В. Д. Гордевський, А. А. Гукалов // XIV International scientific Kravchuk conference, 19 — 21 April 2012: conference materials. — Kyiv. — 2012. — P. 134.

8. Гордевский В. Д. Минимизация невязки с весом для уравнения Бриана-Пиддака / В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов // XVI International Conference

Dynamical system modeling and stability investigation, 29 — 31 May 2013: Abstracts of conference reports. — Kyiv. — 2013. — P. 182.

9. Gordevskyy V. D. General form of the Maxwellian distribution for the model of rough spheres / V. D. Gordevskyy, A. A. Gukalov // International Conference Analysis and Mathematical Physics, 24 — 28 June, 2013:abstracts. — Kharkiv. — 2013. — P. 23.

10. Гордевский В. Д. Взаимодействие смерчеобразных потоков для модели шероховатых сфер / В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов // Международная конференция посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева, 18 — 24 августа 2013г.: тезисы докладов. — Новосибирск. — 2013. — С. 118.

АНОТАЦІЯ

Гукалов О.О. Точні та наближені розв'язки рівняння Бріана-Піддака.– Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2015.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню нелінійного інтегро-диференціального кінетичного рівняння Бріана-Піддака, яке є модифікацією класичного рівняння Больцмана у випадку спеціальної моделі взаємодії між молекулами газу - так званої моделі шорсткуватих сфер. Такі молекули здатні не тільки пересуватися прямолінійно, але й обертатися навколо своєї нерухомої вісі, причому в момент зіткнення між ними змінюються як поступальна, так і кутова швидкості кожної молекули за певними правилами відповідно до відомих законів збереження.

У дисертації вперше знайдені максвеллівські розподіли найбільш загального вигляду для рівняння Бріана-Піддака, тобто остаточно з'ясований характер їх можливої залежності від часу і просторової змінної.

Побудовано наближені розв'язки рівняння Бріана-Піддака у вигляді лінійної комбінації двох локальних максвелліанів, що описують рух різних типів (смерчеподібний, «прискорення-ущільнення», гвинтовий рух типу «прискорення-ущільнення») з коефіцієнтними функціями, які залежать від часу і просторової координати. Знайдено достатні умови для мінімізації декількох відхилень між лівою і правою частинами рівняння Бріана-Піддака. Проведено аналіз фізичного змісту всіх знайдених точних і наближених розв'язків цього рівняння.

Ключові слова: шорсткуваті сфери, рівняння Бріана-Піддака, максвелліани, відхилення, мінімізація, гвинти, смерчі, прискорення-ущільнення, бімодальні розподіли.

АННОТАЦИЯ

Гукалов А.А. Точные и приближенные решения уравнения Бриана-Пиддака.– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 2015.

Диссертационная работа посвящена исследованию нелинейного интегро-дифференциального кинетического уравнения Бриана-Пиддака, которое является модификацией классического уравнения Больцмана в случае специальной модели взаимодействия между молекулами газа – так называемой модели шероховатых сфер. Такие молекулы способны не только передвигаться прямолинейно, но и вращаться вокруг своей неподвижной оси, причём в момент столкновения между ними меняются как поступательная, так и угловая скорость каждой молекулы по определённым правилам в соответствии с известными законами сохранения. Теоретически предполагается, что вещество в таких молекулах распределено изотропно, что означает равномерное его распределение по всем направлениям. До последнего времени эта содержательная с физической точки зрения модель была недостаточно исследована, в частности, для неё не был известен точный вид нестационарных максвелловских (равновесных) распределений.

В диссертации впервые найдены максвелловские распределения самого общего вида для уравнения Бриана-Пиддака, т.е. окончательно выяснен характер их возможной зависимости от времени и пространственной переменной. Полученные выражения подробно проанализированы с точки зрения их физического смысла и классифицированы по типам движения соответствующих им потоков газа. Также установлено, что для модели Бриана-Пиддака невозможны движения газа типа разогрев-остывание и расширение-сжатие, которые имели место для более простой с физической точки зрения модели твердых сфер, не обладающих вращательной скоростью. Невозможность движения типа разогрев-остывание обьясняется тем, что температура газа, состоящего из рассматриваемых молекул, не зависит от времени, а для модели твердых сфер такая зависимость имела хорошо известный конкретный вид. Отсутствие движений типа расширение-сжатие следует из того, что показатель экспоненты в выражении для плотности квадратично зависит от перпендикулярной, по отношению к угловой скорости потока газа в целом $\bar{\omega}$, составляющей вектора x, и лишь линейно – от параллельной его составляющей и, кроме того, в массовой скорости отсуствует член, пропорциональный tx.

Показано, что интеграл столкновений для произвольных максвеллианов, проинтегрированный по пространству линейных и угловых скоростей, обращается в нуль.

Построено приближенное решение уравнения Бриана-Пиддака в виде линейной комбинации двух локальных максвеллианов, описывающих смерчеобразное движение с коэффициентными функциями, зависящими от времени и пространственной координаты. Найдены достаточные условия для минимизации равномерно-интегрального отклонения между частями этого уравнения, а также и для чисто-интегральной невязки, представляющей собой норму в пространстве L_1 разности между левой и правой частями. Исследовано взаимодействие двух потоков, описывающих движение типа "ускорение-уплотнение" для рассматриваемой модели. Приведен явный вид бимодального распределения с соответствующими максвеллианами и указаны достаточные условия для минимизации равномерно-интегральной невязки. Также представлен вид коэффициентных функций в случае рассмотрения в качестве меры отклонения левой и правой частей уравнения Бриана-Пиддака невязки с "весом", которая является модифицированным равномерно-интегральным отклонением.

Получено бимодальное распределение с максвелловскими модами, описывающими винтовое движение типа "ускорение-уплотнение" для модели шероховатых сфер. Предоставлены достаточные условия для минимизации равномерно-интегрального отклонения в этом случае с указанием явного вида коэффициентных функций.

Проведен анализ физического смысла всех найденных точных и приближенных решений уравнения Бриана-Пиддака.

Ключевые слова: шероховатые сферы, уравнение Бриана-Пиддака, максвеллианы, невязки, минимизация, винты, смерчи, ускорение-уплотнение, бимодальные распределения.

ABSTRACT

Gukalov A.A. Exact and approximate solutions of the Bryan-Pidduck Equation. – Manuscript.

A dissertation for a PhD Degree in Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.03 – Mathematical Physics. – Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2015.

The thesis is devoted to the study of nonlinear integro-differential kinetic Bryan-Pidduck Equation, which is a modification of the classical Boltzmann equation in the case of a special model of interaction between the molecules of a gas - the so-called model of rough spheres. Such molecules are not only able to

move in a straight line, but also rotate around its fixed axis, and in the moment of collision between them change the translational and angular velocity of each molecule according to certain rules, in accordance with the known laws of conservation.

In the thesis for the first time the Maxwell distribution for the most general form of the Bryan-Pidduck Equation is found, ie finally clarified the nature of their possible dependence on time and the space variable.

The approximate solutions of the Bryan-Pidduck Equation as a linear combination of two local Maxwellians describing the motion of various types (tornado, "acceleration-packing" helical motion of the "acceleration-packing") with the coefficient functions, depending on the time and spatial coordinates are obtained. Sufficient conditions to minimize a number of deviations between the left and right sides of the Bryan-Pidduck Equation are found.

The analysis of the physical sence of all founded the exact and approximate solutions of the Bryan-Pidduck Equation was done.

Keywords: rough spheres, Bryan-Pidduck Equation, Maxwellians, residuals, minimization, screws, tornadoes, acceleration-packing, bimodal distributions.