Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Лемешева Наталя Володимирівна

УДК 533.72

ВЗАЄМОДІЯ ЛОКАЛЬНО-МАКСВЕЛІВСЬКИХ ТЕЧІЙ В РОЗРІДЖЕНОМУ ГАЗІ

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Гордевський Вячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерства освіти і науки України,
професор кафедри фундаментальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Герасименко Віктор Іванович,
Інститут математики НАН України (м. Київ),
провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Єгорова Ірина Євгенівна,
Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник відділу статистичних методів математичної фізики.

Захист відбудеться «23» вересня 2016 р. о ______ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий «_____» ________ 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Ігнатович С.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Інтерес до систем частинок, які зіштовхуються та взаємодіють за тими чи іншими законами, обумовлений дослідженнями в авіаційній і космічній техніці, вакуумній техніці, хімічній технології тощо. Крім зовнішніх стимулів з боку промисловості, неослабний інтерес до дослідження газової динаміки підтримується і внутрішньою логікою наукових пошуків у цій цікавій з точки зору розвитку механіки, прикладної та загальної математики сфері. Одним з важливих напрямків у цій галузі є вивчення кінетичних рівнянь, зокрема, нелінійного рівняння Больцмана, і пошук його точних і наближених розв'язків. Єдиними точними розв'язками кінетичного рівняння Больцмана для найбільш відомої моделі твердих (пружних) куль, відомими на сьогоднішній день в явному вигляді, є глобальні та локальні максвеліани, які обертають обидві частини рівняння в нуль, і були відомі (щоправда, лише в стаціонарному випадку) ще в XIX столітті Л. Больцману (1872 р.) і Д.К. Максвелу (1859 р.). Інші, немаксвелівські, точні розв'язки були знайдені лише для окремих моделей взаємодії між максвелівськими молекулами і деяких їхніх узагальнень О.В. Бобильовим (1975 р., 1984 р.), М. Круком, Т.Т. Ву (1977 р.), В.В. Веденяпіним (1981 р.), О.В. Міщенком, Д.Я. Петриною (1988 р.), К. Черчіньяні (2002 р.). Також не дають точних результатів розв'язування нелінійного інтегро-диференціального рівняння Больцмана і різні методи, що застосовуються при його дослідженні. Так, ціла низка теорем про існування та єдиність розв’язку задачі Коші для рівняння Больцмана (Т. Карлеман (1933 р.), В.І. Герасименко (1998 р.), Д.Я. Петрина (1998 р.), А.Ш. Акиш (2002 р., 2013 р.) та інші) не дає інформації про явний вигляд цих розв’язків. Методи розкладання в ряди Гільберта, Чепмена-Енскога, Греда виявляються нестрогими, бо не вдається довести навіть збіжність таких рядів. Те ж саме можна сказати про чисельні методи та спроби побудови модельних варіантів рівняння Больцмана. Тим самим зростає інтерес до дослідження кінетичного рівняння Больцмана саме строгими аналітичними методами, за допомогою яких спочатку був знайдений лише глобальний максвеліан (1859 р.), незалежний ні від часу, ні від координати молекули. Наступним кроком стала робота Максвела (1877 р.), в якій він отримав більш загальний вигляд стаціонарних, але неоднорідних максвеліанів, які задовольняють рівняння Больцмана, і описують гвинтовий і спиралевидний рух газу (в спеціальній літературі вони відомі як рівноважні розподіли Максвела – Больцмана). Нестаціонарний локально-максвелівський (залежний не тільки від швидкості молекули і просторової координати, але і від часу) розв'язок було знайдено значно пізніше Т. Карлеманом (1960 р.), О.Г. Фрідлендером (1965 р.), Г. Гредом (1958 р.), однак і він не дав достатньої інформації про важливі фізичні та геометричні особливості локальних максвеліанів, такі як форма потоку і швидкість його руху, наявність зон ущільнення або розрідження і тому подібне.

Як видно зі сказаного вище, рівняння Больцмана досліджувалося в різних напрямками, проте точні його розв'язки вдалося явно знайти тільки для рівноважних станів газу, що ж стосується нерівноважного стану, то тут досі не вдається знайти розв'язок в явному вигляді, оскільки рівняння Больцмана виявляється досить складним для розв'язання навіть дуже простих нерівноважних задач. Тому виникла проблема опису взаємодії між двома або більше максвелівськими течіями газу (за допомогою так званих бімодальних розподілів). Спроби отримання результатів у цьому напрямку були пов'язані з побудовою моделі ударних хвиль і теорією випаровування-конденсації газу (І.Є. Тамм (1965 р.), І. Хосокава, К. Ямамото (1988 р.), Г. Мотт-Сміт (1951 р.), С. Дешпанде, Р. Нарасімха (1969 р), С. Таката, К. Аокі, К. Черчіньяні (2000 р.) та інші), але виявилося, що відповідні бімодальні розподіли не можуть задовольняти рівняння Больцмана не тільки точно, але навіть наближено з яким завгодно ступенем точності через жорсткі умови, що накладаються на гідродинамічні параметри самою постановкою задачі. Проте метод побудови бімодальних розподілів, схожих з розподілом Тамма – Мотт-Сміта, все ж таки отримав розвиток, зокрема, у роботах В.Д. Гордевського (1995 р., 1998 р., 2004 р., 2009 р., 2014 р. та ін.). Знайдені в цих роботах бімодальні і тримодальні розподіли дозволяють наближено (з довільним ступенем точності) описати взаємодію між глобальними і деякими з відомих типів локальних максвеліанів. Але проблема побудови інших явних наближених розв'язків досі залишається відкритою і актуальною.

Дисертаційна робота присвячена саме подальшому дослідженню бімодальних розподілів, які б відповідали процесам взаємодії між локально-максвелівськими течіями довільної складності (тобто неоднорідними й нестаціонарними) в розрідженому газі з твердих куль.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, які викладені в дисертації, були отримані при виконанні науково-дослідних робіт кафедри математичного аналізу Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна в рамках державних науково-дослідних робіт «Асимптотичні і алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстрації 0106U001561), «Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстрації 0109U001456) і «Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування і теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (номер державної реєстрації 0111U010364).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова нових явних наближених розв'язків нелінійного рівняння Больцмана, відмінних від максвелівських, для моделі твердих куль, з модами типу «прискорення-ущільнення». В якості числових характеристик ступеня точності цих розв'язків розглядаються деякі норми різниці між лівою і правою частинами рівняння Больцмана в різних функціональних просторах (розглядається рівномірно-інтегральний («змішаний») відхил, змішані відхили з «однорідною вагою» і «неоднорідною вагою» та інтегральний відхил).

Таким чином, основне *завдання* дослідження полягає в пошуку умов, що накладаються на коефіцієнтні функції і на поведінку всіх параметрів, що входять у бімодальні розподіли з модами типу «прискорення-ущільнення», які будуть достатніми для мінімізації того чи іншого відхилу.

Об'єкт дослідження. Нелінійне інтегро-диференціальне кінетичне рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль.

Предмет дослідження. Явні наближені розв'язки рівняння Больцмана, які мають вигляд бімодальних розподілів з модами типу «прискорення-ущільнення».

Методи дослідження. В роботі використані методи математичного і функціонального аналізу, загальні методи диференціальних рівнянь з частинними похідними, асимптотичні методи, елементи векторного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі отримані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають в наступному:

1. Побудовано нові наближені явні розв’язки кінетичного рівняння Больцмана у вигляді бімодальних розподілів, які описують низькотемпературний режим взаємодії між двома локально-максвелівськими течіями спеціального типу, а саме «прискорення-ущільнення», в розрідженому газі з твердих куль. Для опису ступеня наближеності використано рівномірно-інтегральний відхил між частинами цього рівняння.

2. Знайдено низку нових наближених явних розв’язків у вигляді лінійної комбінації двох локальних макселіанів типу «прискорення-ущільнення» за допомогою інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Отримано достатні умови мінімізації зазначеного відхилу.

3. Для бімодального розподілу з модами типу «прискорення-ущільнення» знайдено конкретний вигляд коефіцієнтних функцій при мінімізації рівномірно-інтегрального відхилу з «однорідною вагою».

4. Запропоновано новий тип відхилу, а саме рівномірно-інтегральний відхил з «неоднорідною вагою», який дозволив суттєво розширити клас явних наближених бімодальних розв’язків рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані в дисертації результати можуть бути використані для подальшого вивчення кінетичних рівнянь і властивостей їх розв'язків. Також результати дисертації можуть бути включені до програм спецкурсів і семінарів, які читаються студентам старших курсів фізико-математичних спеціальностей. Можливе застосування результатів дисертації в деяких прикладних галузях, таких як гідро- і аеродинаміка, метеорологія і т. д., при дослідженні математичних моделей різних процесів, пов'язаних із взаємодією потоків газу.

Особистий внесок автора. Основні результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно. В роботах [1], [2], [3], [4], написаних у співавторстві з науковим керівником, В.Д. Гордевському належить загальне керівництво, постановки задач і обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на міжнародній конференції, присвяченій 150-річчю з дня народження О.М. Ляпунова (Харків, 2007 р.), міжнародній науковій конференції для молодих учених «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках і інформаційних технологіях» (Харків, 2009 р.), 9-тій міжнародній міждисциплінарній науково-практичній школі-конференції «Сучасні проблеми науки та освіти» (Алушта, 2009 р.), XIII міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2010 р.), Internetional conference «Analysis and mathematical physics» (Kharkiv, 2013), міжнародній школі-конференції «Тараповські читання – 2013», присвяченій 150-річчю кафедри теоретичної і прикладної механіки

(Харків, 2013 р.), XV міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014 р.), II Internetional conference «Analysis and mathematical physics» (Kharkiv, 2014); на науковому семінарі кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник семінару – д.ф.-м.н., професор В.І. Коробов, 2016).

Публікації. Результати, що представлені в дисертації, опубліковані в 5 статтях [1]–[5] у наукових фахових виданнях, з них 1 стаття без співавторів. Також результати роботи відображені в 8 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [6]–[13].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п’яти розділів, висновків і списку використаних джерел, що містить 117 найменувань. Повний обсяг роботи складає 124 сторінки, з яких список використаних джерел займає 15 сторінок. Результати, що виносяться на захист, містяться в розділах 3 – 5.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику В.Д. Гордевському за формулювання завдань, постійну увагу до роботи і підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, зроблено огляд існуючого стану проблеми, визначено мету та задачі дослідження, вказано наукову новизну та практичне значення роботи, а також надана інформація про апробацію результатів дисертації та публікації за темою роботи.

У *першому розділі* наведено огляд літератури за темою дисертації та обґрунтовано вибір напрямку досліджень.

У *другому розділі* дається короткий огляд основних понять, означень і найбільш важливих результатів, пов'язаних з дослідженням рівняння Больцмана для моделі твердих куль при рівноважному стані газу, необхідних для постановки задачі та її розв’язку. Також вводиться ряд означень, пов'язаних зі змістом наступних розділів, і формулюється точна постановка задачі, якій присвячена дисертаційна робота.

У *підрозділі 2.1* наведено основні факти про рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Так, рівняння Больцмана розглядається у вигляді:

$$D(f) = Q(f, f); \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right); \tag{2}$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} d\mathbf{v}_1 \int_{\Sigma} d\boldsymbol{\alpha} \left|\left(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \boldsymbol{\alpha}\right)\right| \left(f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'_1\right) f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'\right) - f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1\right) f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}\right)\right), \tag{3}$$

де $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ – функція розподілу молекул; $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ – частинна похідна по часу; $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} f$ – просторовий градієнт функції; $\mathbf{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in R^3$, $\mathbf{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right) \in R^3$ –

відповідно координата і швидкість молекули в момент часу $t \in R^1$; $d > 0$ – діаметр молекули; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор, що належить одиничній сфері $\Sigma \in R^3$; $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$ – швидкості двох молекул після зіткнення, які виражаються через відповідні величини швидкостей до зіткнення $\mathbf{v}$ і $\mathbf{v}_1$ наступним чином:

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \boldsymbol{\alpha}), \\ \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \boldsymbol{\alpha}). \end{cases}$$

Максвеліани (максвелівські розподіли) для моделі твердих куль мають вигляд:

$$M = M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})^2},$$

де $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ – густина числа молекул в точці $\mathbf{x}$ в момент часу t, $\beta(t, \mathbf{x}) = \dfrac{1}{2T(t, \mathbf{x})}$ – обернена температура (T – абсолютна температура) і $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x})$ – масова швидкість течії (якщо $\tilde{\mathbf{v}} = const$, тоді максвеліан називається глобальним, якщо $\tilde{\mathbf{v}}$ залежить від t і $\mathbf{x}$ – максвеліан локальний). Зокрема, максвелівські розв'язки рівняння Больцмана для моделі твердих куль, які відповідають течіям типу «прискорення-ущільнення», мають вигляд:

$$M_i = \rho_i(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}_i)^2}, \ i = 1,2, \tag{4}$$

$$\rho_i(t, \mathbf{x}) = \bar{\rho}_i e^{\beta_i \left(\tilde{\mathbf{v}}_i^2 + 2(\bar{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x}) \right)}, \ i = 1,2, \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t, \ i = 1,2, \tag{6}$$

де $\bar{\rho}_i = const$; $\bar{\mathbf{v}}_i$, $\bar{\mathbf{u}}_i$ – довільні фіксовані вектори в R^3; $\beta_i = \dfrac{1}{2T_i}$ – обернена температура i-ї течії не залежна ні від t, ні від $\mathbf{x}$; $\rho_i = \rho_i(t, \mathbf{x})$ – густина i-ї течії; $\tilde{\mathbf{v}}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i(t)$ – її масова швидкість; $(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}_i)^2$ – скалярний квадрат вектора.

У *підрозділі 2.2* наведено точну постановку задачі пошуку явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль у вигляді бімодальних розподілів, тобто лінійних комбінацій двох максвеліанів:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{7}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(t, \mathbf{x}) \geq 0, \ \varphi_i \in C^1\left(R^4\right), i=1,2,$$

де максвеліани M_i, i = 1,2 відносяться до течій типу «прискорення-ущільнення» (4)-(6), а коефіцієнтні функції $\varphi_i = \varphi_i(t, \mathbf{x})$, i=1,2 треба знайти (разом з поведінкою всіх вхідних до максвеліанів параметрів) так, щоб при досить низьких температурах потоків, тобто коли $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$, були скільки завгодно малими наступні відхили між частинами рівняння Больцмана, взяті в якості ступеня наближеності розв'язків:

- рівномірно-інтегральний («змішаний») відхил

$$\Delta(f) = \Delta = \sup_{(t, \mathbf{x}) \in R^4} \int_{R^3} \left| D(f) - Q(f, f) \right| d\mathbf{v}; \tag{8}$$

- змішаний відхил з «однорідною вагою»

$$\widetilde{\Delta}(f)=\widetilde{\Delta}=\sup_{(t,\mathbf{x})\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\int_{R^3}|D(f)-Q(f,f)|d\mathbf{v}; \tag{9}$$

- змішаний відхил з «неоднорідною вагою»

$$\widetilde{\Delta}_q(f)=\widetilde{\Delta}_q=\sup_{(t,\mathbf{x})\in R^4}\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}\int_{R^3}|D(f)-Q(f,f)|d\mathbf{v}; \tag{10}$$

- інтегральний відхил

$$\Delta_1(f)=\Delta_1=\int_{R^1}dt\int_{R^3}d\mathbf{x}\int_{R^3}|D(f)-Q(f,f)|d\mathbf{v}. \tag{11}$$

Третій розділ присвячено побудові наближених бімодальних розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль виду (1)-(3), які описують низькотемпературний перехідний режим між двома локально-максвелівськими течіями типу (4)-(6). Для опису ступеня наближеності взято рівномірно-інтегральний відхил вигляду (8), для якого знайдено достатні умови довільної малості.

У *підрозділі 3.1* сформульовано задачу, яка досліджена в розділі 3, та наведені шляхи її розв'язання.

Означення 3.1. Позначимо через $P(R^n)$ клас невід'ємних функцій з $C^1(R^n)$, які мають обмежений носій (коротко – фінітні функції) або спадають на нескінченності разом зі своїми частинними похідними першого порядку швидше ніж функція e^{-az^2} (a>0 – деяка константа, $z\in R^n$).

Теорема 3.1. Нехай функції $\varphi_i,\ i=1,2$ в розподілі (7) з модами типу (4)-(6) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x})=\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}C_i\left(\mathbf{x}+\bar{\mathbf{u}}_i\,\frac{(\bar{\mathbf{v}}_i-\bar{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\bar{\mathbf{u}}_i^2}\right),\ i=1,2,$$

де константи $l_i,\ D_i$ задовольняють умови:

$$D_i>0,\ l_i\ge\frac{1}{2},\ i=1,2,$$

а функції $C_i(t,\mathbf{x})$, i=1,2 належать $P(R^3)$.

Нехай, крім того, виконуються умови:

$$\bar{\mathbf{u}}_i=\frac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\qquad \bar{\mathbf{v}}_i=\frac{\bar{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}},\ i=1,2,$$

де $n_i\ge1;\ k_i\ge\frac{1}{2};\ k_i\ge\frac{n_i}{2},\ i=1,2$ і $\bar{\mathbf{u}}_{oi},\bar{\mathbf{v}}_{oi}\in R^3$ – довільні фіксовані вектори.

Тоді має місце твердження:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall D_1,D_2:\ 0<D_1,D_2<\delta; \tag{12}$$

$$\exists\beta_0>0,\ \forall\beta_i>\beta_0\ (i=1,2)$$

$$\Delta<\varepsilon.$$

Низькотемпературний граничний перехід в усіх результатах роботи є необхідним, оскільки при прямуванні обернених температур максвелівських потоків до нескінченості самі максвеліани поводять себе δ-подібно; саме така поведінка максвеліанів дозволяє всі швидкості індивідуальних молекул потоків локалізувати поблизу значень їх масових швидкостей, завдяки цьому інтеграли по змінній $\mathbf{v} \in R^3$ обчислюються, що спрощує подальший аналіз з метою мінімізації відхилу.

Далі наведено результати на основі деяких інших припущень, тобто приведено вигляд коефіцієнтних функцій, які явно залежать від температур потоків, і структуру цих функцій вибрано саме так щоб компенсувати збільшення густини $\rho_i(t,\mathbf{x})$, яка входить до максвеліанів, при $\beta_i \to +\infty,\ i=1,2$.

Теорема 3.2. Нехай коефіцієнтні функції в розподілі (7) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i\left((\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\bar{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\right)\right\},\ i=1,2, \tag{13}$$

де функції $\psi_i(t,\mathbf{x}) \ge 0$ гладкі та такі, що величини

$$\psi_i;\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|;\ \psi_i t;\ t\left(\bar{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right),\ i=1,2 \tag{14}$$

обмежені по t, $\mathbf{x}$ на R^4, крім того, нехай виконується умова

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ i=1,2 \text{ при } n_i \ge \frac{1}{2}.$$

Тоді відхил Δ вигляду (8) коректно визначений, й існує така величина Δ', що $\Delta \le \Delta'$, причому для $n_i > \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \ne j}}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\bar{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) + \psi_1(t,\mathbf{x}) \psi_2(t,\mathbf{x}) \pi d^2 \bar{\rho}_j \,|\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2| \right| +$$

$$+ 2\pi d^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \,|\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} (\psi_1(t,\mathbf{x}) \psi_2(t,\mathbf{x})) = \mathbf{L},$$

а для $n_i = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \mathbf{L} + \tfrac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \,|\bar{\mathbf{u}}_{oi}| \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \psi_i(t,\mathbf{x}).$$

Остаточної мінімізації відхил набуває в наступному наслідку, де вказано вже більш конкретний вигляд функцій $\psi_i(t,\mathbf{x})$, і, крім того, з'являються додаткові умови.

Наслідок 3.1. Нехай виконуються вимоги теореми 3.2, і функції $\psi_i = \psi_i(t,\mathbf{x})$ мають вигляд:

$$\psi_i = D_i C_i(t),\ i=1,2,$$

де $D_i > 0$, а гладкі, невід'ємні функції $C_i(t)$ такі, що вирази $tC_i(t)$ і $C_i'(t)$ обмежені на R^1.

Тоді:

1) для $C_1,\ C_2,\ \bar{\mathbf{v}}_1,\ \bar{\mathbf{v}}_2$, які задовольняють наступні умови

$$\mathrm{supp}\ C_1 \cap \mathrm{supp}\ C_2 = \varnothing$$

або

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2,$$

справедливе твердження (12).

2) для довільних $C_1,\ C_2,\ \bar{\mathbf{v}}_1,\ \bar{\mathbf{v}}_2$ дійсне наступне твердження:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall D_1, D_2, d:\ 0 < D_1, D_2, d < \delta;$$

$$\exists \beta_0 > 0,\ \forall \beta_1, \beta_2 > \beta_0$$

$$\Delta < \varepsilon.$$

Існують також ще два можливих варіанти, коли показник ступеня в функціях $\varphi_i(t,\mathbf{x})$ вигляду (13) містить в собі не обидва доданки, а тільки якийсь один з них. Перший з таких варіантів описує наступна теорема.

Теорема 3.3. Нехай в бімодальному розподілі (7) функції $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}),\ i = 1,2$ мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i \left(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t\right)^2\right\},\ \ i = 1,2,$$

де функції $\psi_i(t,\mathbf{x}) \geq 0$ гладкі і такі, що добутки величин (14) на множники $e^{2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}$ обмежені по t, $\mathbf{x}$ на R^4.

Крім того, нехай виконується умова $\bar{\mathbf{u}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ i = 1,2,$ де $n_i \geq 1$.

Тоді справедливим є твердження $\Delta \leq \Delta'$, причому для $n_i > 1$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left| \mu_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\bar{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) + \psi_1(t,\mathbf{x}) \psi_2(t,\mathbf{x}) \mu_1(\mathbf{x}) \mu_2(\mathbf{x}) \pi d^2 \bar{\rho}_j \,|\, \bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2 \,| \right| +$$

$$+ 2\pi d^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \,|\, \bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2 \,| \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left(\mu_1(\mathbf{x}) \mu_2(\mathbf{x}) \psi_1(t,\mathbf{x}) \psi_2(t,\mathbf{x}) \right) = \Omega,$$

а для $n_i = 1$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \Omega + 2 \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \,|\, (\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \bar{\mathbf{v}}_i) \,| \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \{ \mu_i(\mathbf{x}) \psi_i(t,\mathbf{x}) \},$$

при $\mu_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & n_i > 1, \\ \exp\{2(\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \mathbf{x})\}, & n_i = 1. \end{cases}$

Наведемо наслідок з цієї теореми.

Наслідок 3.2. Нехай виконані умови теореми 3.3, і функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$, i=1,2 мають вигляд:

$$\psi_i(t,\mathbf{x}) = \frac{D_i}{(1 + \mathrm{t}^2)^{l_i}} C_i([\mathbf{x} \times \bar{\mathbf{v}}_i]),\ \ i = 1,2, \tag{15}$$

якщо

$$(\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{u}}_i) = 0,\ \ i = 1,2;$$

та

$$\psi_i(t,\mathbf{x}) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(\mathbf{x}), \;\; i = 1,2 \tag{16}$$

для довільних $\bar{\mathbf{v}}_1, \; \bar{\mathbf{v}}_2$, де виконуються умови $D_i > 0, \; l_i \geq \frac{1}{2}, \; i = 1,2$, й функції $C_i, \; i = 1,2$ належать $P(R^3)$.

Тоді обидва твердження наслідку 3.1 залишаються вірними.

Вирази (15) і (16) схожі, але вони не замінюють один одного. Дійсно, $C_i([\mathbf{x} \times \bar{\mathbf{v}}_i])$ описує функцію від $\mathbf{x}$, яка є постійною уздовж вектора $\bar{\mathbf{v}}_i$ («циліндр»), а (16) відповідає деякому «згустку» газу, зосередженому на обмеженому в R^3 носії.

Результат використання в якості коефіцієнтних функцій виразів аналогічних (13), але тепер показники експонент коефіцієнтних функцій містять в собі лише доданок з $\mathbf{x}$, наведено в наступному твердженні.

Теорема 3.4. Нехай функції $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}), \; i = 1,2$ в бімодальному розподілі (7) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) \exp\{-2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\}, \;\; i = 1,2,$$

і вимоги $\bar{\mathbf{u}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \; \bar{\mathbf{v}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}$ справедливі при $n_i \geq \frac{1}{2}, \; k_i \geq \frac{1}{2}, \; i = 1,2$; $\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \bar{\mathbf{v}}_{oi} \in R^3$ – довільні фіксовні вектори.

Крім того, нехай гладкі, невід'ємні функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ гарантують обмеженість на R^4 добутків величин (14) на множники вигляду $e^{\beta_i(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t)^2}$.

Тоді оцінка $\Delta \leq \Delta'$ залишається вірною, при цьому:

1. Якщо $n_i > \frac{1}{2}, \; k_i > \frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum\limits_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \sup\limits_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left| \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|$.

2. Якщо $n_i > \frac{1}{2}, \; k_i = \frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum\limits_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i e^{\bar{\mathbf{v}}_{oi}^2} \sup\limits_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left| \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|$.

3. Якщо $n_i = \frac{1}{2}, \; k_i > \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left\{ e^{t^2 \bar{\mathbf{u}}_{oi}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2t\bar{\mathbf{u}}_{oi}^2 \psi_i(t,\mathbf{x}) \right| \right\} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \, |\bar{\mathbf{u}}_{oi}| \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left\{ e^{t^2 \bar{\mathbf{u}}_{oi}^2} \psi_i(t,\mathbf{x}) \right\}.$$

4. Якщо $n_i = k_i = \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left\{ e^{(\bar{\mathbf{v}}_{oi} - \bar{\mathbf{u}}_{oi} t)^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2t\bar{\mathbf{u}}_{oi}^2 \psi_i(t,\mathbf{x}) \right| \right\} +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \left(\frac{2\,|\bar{\mathbf{u}}_{oi}|}{\sqrt{\pi}} + |(\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \bar{\mathbf{v}}_{oi})| \right) \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \left\{ e^{(\bar{\mathbf{v}}_{oi} - \bar{\mathbf{u}}_{oi} t)^2} \psi_i(t,\mathbf{x}) \right\}.$$

Наступний наслідок для теореми 3.4 доводить можливість досягнення довільної малості відхилу Δ.

Наслідок 3.3. Нехай зберігаються всі умови теореми 3.4. Тоді твердження (12) справедливе, якщо функції $\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$ мають вигляд:

$$\psi_i(t,\mathbf{x}) = D_i C_i(t) E_i(\mathbf{x}),\ \mathrm{i}=1,2,$$

де $D_i > 0,\ C_i(t) \in P(R^1)$, а $E_i(\mathbf{x}) \geq 0$ – гладкі та обмежені разом з $\nabla_{\mathbf{x}} E_i(\mathbf{x})$ функції від $\mathbf{x} \in R^3$.

У *четвертому розділі* продовжено вивчення взаємодії між локально-максвелівськими течіями типу «прискорення-ущільнення» в газі з твердих куль, але з використанням нових «модифікованих» відхилів.

Підрозділ 4.1 присвячено пошуку бімодальних розподілів вигляду (7), де максвеліани відповідають течіям типу «прискорення-ущільнення» (4)-(6).

У випадку рівномірно-інтегрального відхилу з «однорідною вагою» вигляду (9) доведено такі твердження.

Теорема 4.1. Нехай коефіцієнтні функції $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$ в розподілі (7) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = C_i\left(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}}_i \frac{(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\bar{\mathbf{u}}_i^2}\right),$$

де $C_i \in P(R^3)$.

Нехай, крім того,

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \qquad \bar{\mathbf{v}}_i = \frac{\bar{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}},\ i=1,2,$$

де $\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \bar{\mathbf{v}}_{oi} \in R^3$ – довільні та фіксовані вектори, а числа $n_i,\ k_i$ такі, що $n_i \geq 1;\ k_i \geq \frac{1}{2};\ k_i \geq \frac{n_i}{2},\ i=1,2$.

Тоді має місце твердження:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \tilde{\Delta} = 0. \tag{17}$$

Теорема 4.2. Нехай функції $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$ в розподілі (7) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i\left((\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right)\right\},\ i=1,2,$$

де гладкі функції $\psi_i(t,\mathbf{x}) \geq 0$ такі, що вирази

$$t\psi_1\psi_2;\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t};\ t\psi_i;\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|;\ t\left(\bar{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right),\ i=1,2$$

обмежені на R^4 після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Нехай до того ж виконується умова

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ i=1,2 \text{ при } n_i > \frac{1}{2}.$$

Тоді справедлива оцінка $\tilde{\Delta} \leq \tilde{\Delta}'$, причому існує скінченна границя:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\widetilde{\Delta}'=\sum_{\substack{i,j=1,\\i\neq j}}^{2}\overline{\rho}_i\sup_{(t,\mathbf{x})\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)+\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})\pi d^2\overline{\rho}_j\,|\,\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2\,|\right|+$$

$$+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\,|\,\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2\,|\sup_{(t,\mathbf{x})\in R^4}\frac{1}{1+|t|}(\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})). \qquad (18)$$

Далі наведено наслідок з цієї теореми, який дає одну з можливих достатніх умов довільної малості відхилу (9).

Наслідок 4.1. Нехай виконуються всі умови теореми 4.2, і функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ мають вигляд:

$$\psi_i=C_i(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{v}}_i t),\ \ i=1,2 \qquad (19)$$

або

$$\psi_i=C_i([\mathbf{x}\times\overline{\mathbf{v}}_i]),\ \ i=1,2, \qquad (20)$$

де $C_i\geq 0$ – фінітні гладкі функції.

Тоді:

1) якщо $C_1,\ C_2,\ \overline{\mathbf{v}}_1,\ \overline{\mathbf{v}}_2$ задовольняють наступні умови:

$$\text{supp}\ C_1\cap\text{supp}\ C_2=\varnothing$$

або

$$\overline{\mathbf{v}}_1=\overline{\mathbf{v}}_2,$$

то має місце твердження (17);

2) при довільних $C_1,\ C_2,\ \overline{\mathbf{v}}_1,\ \overline{\mathbf{v}}_2$ маємо:

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\widetilde{\Delta}=0.$$

Наступне твердження розглядається як деяке «проміжкове» між теоремою 4.1 і теоремою 4.2, оскільки показник експоненти залежить тепер тільки від часу *t*.

Теорема 4.3. Нехай в розподілі (7) функції φ_i мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x})=\psi_i(t,\mathbf{x})\exp\left\{-\beta_i\left(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t\right)^2\right\},\ \ i=1,2,$$

причому вирази

$$t\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x})+2\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})};\ \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})};\ \ t\psi_i e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})};\ \ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})};\ \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}$$

обмежені з вагою $\frac{1}{1+|t|}$, а припущення $\overline{\mathbf{u}}_i=\dfrac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ \ i=1,2$ виконується для $n_i\geq 1$.

Тоді справедлива оцінка $\widetilde{\Delta}\leq\widetilde{\Delta}'$, причому існує скінченна границя величини $\widetilde{\Delta}'$, яка дорівнює виразу (18) при $n_i>1$, а при $n_i=1$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}' =$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{2} \bar{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \mu_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\bar{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) + \psi_1(t,\mathbf{x}) \psi_2(t,\mathbf{x}) \mu_1(\mathbf{x}) \mu_2(\mathbf{x}) \pi d^2 \bar{\rho}_j \, | \bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2 \, | \right| +$$

$$+ 2\pi d^2 \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \, | \bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2 \, | \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \frac{1}{1+|t|} (\mu_1(\mathbf{x}) \mu_2(\mathbf{x}) \psi_1(t,\mathbf{x}) \psi_2(t,\mathbf{x})) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \, | (\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \bar{\mathbf{v}}_i) | \sup_{(t,\mathbf{x}) \in R^4} \frac{1}{1+|t|} (\mu_i(\mathbf{x}) \psi_i(t,\mathbf{x})),$$

де $\mu_i(\mathbf{x}) = e^{2(\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \mathbf{x})}$, $i = 1,2$.

Наслідок 4.2. Нехай виконуються умови теореми 4.3, і крім того, виконується додаткова умова:

$$\bar{\mathbf{u}}_i \perp \bar{\mathbf{v}}_i, \ i = 1,2,$$

а також зберігаються припущення щодо вигляду функцій $\psi_i(t,\mathbf{x})$ з наслідку 4.1, а саме:

$$\psi_i = C_i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t), \ i = 1,2$$

або

$$\psi_i = C_i([\mathbf{x} \times \bar{\mathbf{v}}_i]), \ i = 1,2,$$

де $C_i \geq 0$ – фінітні гладкі функції.

Тоді обидва твердження наслідку 4.1 залишаються в силі.

Таким чином, відхил з вагою $\widetilde{\Delta}(f)$ вигляду (9) дозволив здобути низку нових наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль, які описують перехідний режим між течіями типу «прискорення-ущільнення» та суттєво відрізняються від побудованих в розділі 3 за допомогою «звичайного» рівномірно-інтегрального відхилу $\Delta(f)$. Так, коефіцієнтні функції в теоремі 4.1 тепер не містять не тільки окремого множника, спадаючого з часом на $+\infty$, а й мультиплікативної константи, без довільної малості якої в розділі 3 не вдається здобути результат аналогічний (17), а лише значно слабкіше твердження, де в правій частині відповідної рівності замість нуля фігурує деяка величина, яка потребує подальшої мінімізації за рахунок інших параметрів розподілу. Те ж саме стосується і аналогів наслідків 4.1, 4.2, де завдяки новому відхилу вдається суттєво розширити класи знайдених розв'язків.

У *підрозділ 4.2* досліджуються нестаціонарні максвелівські розподіли, які моделюють потоки в газі з твердих куль, що прискорюються та ущільнюються, у випадку рівномірно-інтегрального відхилу з «неоднорідною вагою» вигляду (10). Основні результати підрозділу 4.2 являють собою твердження аналогічні до тверджень підрозділу 4.1. Але на відміну від відхилу (9), цей новий відхил містить додатковий множник $q(\mathbf{x})$, за допомогою якого вдалося послабити умови, які накладаються на функції C_i, i=1,2, що з точки зору фізичного сенсу дає можливість розглядати не тільки «згустки», які описуються співвідношенням (19), і «циліндри» вигляду (20), але й деякі потоки у всьому просторі, тим самим розширивши клас отриманих розв’язків.

У *п'ятому розділі* побудовано бімодальні розподіли з різними гідродинамічними параметрами мод, що описують процес взаємодії між двома максвелівськими течіями в газі з твердих куль, які прискорюються і ущільнюються, і при цьому задовольняють рівнянню Больцмана (1)-(3) з яким завгодно ступенем точності. Знайдено граничні випадки, в яких цей розподіл мінімізує інтегральний відхил $\Delta_1(f)$ вигляду (11).

У *підрозділі 5.1* сформульовано основні результати розділу 5, які істотно відрізняються від результатів попередніх розділів за рахунок вибору коефіцієнтних функцій у вигляді «δ-плато».

Означення 5.1. Нехай $\mathcal{G}$ – така обмежена область в R^n, що число компонент зв'язності перетину $\mathcal{G}$ з будь-якою прямою, паралельною якій-небудь з координатних осей, скінченно. Для будь-якого $\delta > 0$ позначимо через $\mathcal{G}_\delta$ множину точок з R^n, які відстоять від $\mathcal{G}$ не більше ніж на δ.

Якщо $n = 4$ і координати позначаються як $t,\ x^k\ (k = 1,2,3)$, то через $\mathcal{G}^{\mathbf{x}}$ – позначимо проекцію $\mathcal{G}$ на гіперплощину *t=0*, а через $\mathcal{G}^k$ – проекцію $\mathcal{G}$ на гіперплощину $x^k = 0\ (k = 1,2,3)$.

Позначимо об'єми (міри) відповідної розмірності буквою *m*.

Означення 5.2. Фінітним «δ-плато» над областю $\mathcal{G} \subset R^4,\ \delta > 0$ називається така функція $\varphi_\delta(\mathcal{G},t,\mathbf{x}) \in C^1(R^4)$, що

$$\varphi_\delta(\mathcal{G},t,\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{l} 1,\ (t,\mathbf{x}) \in \mathcal{G}, \\ 0,\ (t,\mathbf{x}) \in R^4 \setminus \mathcal{G}_\delta, \\ 0 \le \varphi_\delta \le 1,\ (t,\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_\delta \setminus \mathcal{G}, \end{array}\right. \tag{21}$$

і, крім цього, на будь-якій прямій, паралельній одній з координатних осей, функція φ_δ має не більше ніж скінченну кількість строгих екстремумів.

В наступних твердженях наведено різні достатні умови довільної малості відхилу $\Delta_1(f)$ при певному виборі функцій φ_i (*i*=1,2) з розподілу (7) і умов, що накладаються на гідродинамічні параметри мод типу «прискорення-ущільнення».

Теорема 5.1. Нехай $\mathcal{G}_1,\ \mathcal{G}_2 \subset R^4$ – обмежені області з означення 5.1, і $\delta_1, \delta_2 > 0$ такі, що $\mathcal{G}_{1,\delta_1} \cap \mathcal{G}_{2,\delta_2} = \varnothing$. Нехай функції φ_i, *i*=1,2 з розподілу (7) мають вигляд «δ-плато» (21), причому $\varphi_{\delta_1}(\mathcal{G}_1,t,\mathbf{x})$ і $\varphi_{\delta_2}(\mathcal{G}_2,t,\mathbf{x})$ такі, що загальна кількість їх екстремумів з означення 5.2, обмежена рівномірно відносно всіх аргументів константою $\mathcal{K}>0$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$.

Крім того, нехай виконуються наступні умови:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \qquad \bar{\mathbf{v}}_i = \frac{\bar{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}},\ i = 1,2,$$

де $\bar{\mathbf{u}}_{oi}, \bar{\mathbf{v}}_{oi} \in R^3$ – довільні фіксовані вектори, а числа $n_i,\ k_i$ задовольняють нерівностям $n_i \ge 1,\ k_i \ge \dfrac{1}{2}\ (i = 1,2)$.

Тоді існує таке Δ_1', для якого вірно $\Delta_1 \le \Delta_1'$. Причому при будь-якому фіксованому *d>0*

$$\lim_{\substack{m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}})\to 0\\(i=1,2)}} \lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \Delta_1' = 0,$$

де $m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}), i=1,2$ – об'єм (міра) проекції множини $\mathcal{G}_i$ на підпростір *t=0*.

Теорема 5.2. Нехай функції $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$ в розподілі (7) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x})\exp\left\{-\beta_i\left((\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right)\right\},\ i=1,2,$$

де функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ такі, що вирази

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|;\ \psi_1\psi_2;\ \psi_i;\ t\psi_i;\ t\left(\bar{\mathbf{u}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right),\ i=1,2 \qquad (22)$$

належать простору $L_1(R^4)$.

Крім того, нехай виконується умова $\bar{\mathbf{u}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ i=1,2$ при $n_i > \dfrac{1}{2}$.

Тоді справедлива оцінка $\Delta_1 \le \Delta_1'$, причому існує така скінченна границя:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i \int_{R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\bar{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right| dt d\mathbf{x} + 4\pi d^2\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2\,|\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2|\int_{R^4}\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})dtd\mathbf{x}. \qquad (23)$$

Звідси випливає такий наслідок.

Наслідок 5.1. Нехай мають місце всі припущення теореми 5.2, а функції $\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$ мають вигляд «δ-плато» (21), причому $\psi_{\delta_1}(\mathcal{G}_1,t,\mathbf{x})$ і $\psi_{\delta_2}(\mathcal{G}_2,t,\mathbf{x})$ такі, що загальна кількість їх екстремумів з означення 5.2 обмежена рівномірно відносно всіх аргументів константою $\mathcal{K}_1>0$ при $\delta_1,\delta_2 \to 0$.

Тоді рівність

$$\lim_{\substack{m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}})\to 0\\ m(\mathcal{G}_i^k)|\bar{v}_i^k|\to 0\\(i=1,2;k=1,2,3)}} \lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\beta_1,\beta_2\to+\infty} \Delta_1' = 0 \qquad (24)$$

справедлива, якщо має місце хоча б одна з таких умов:

1) для будь-яких $\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$, які задовольняють умови (22):

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2;$$

2) $$\operatorname{supp}\psi_1 \cap \operatorname{supp}\psi_2 = \varnothing;$$

3) для довільних $\bar{\mathbf{v}}_1,\ \bar{\mathbf{v}}_2$ і $\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$, з урахуванням (22),

$$d \to 0.$$

Крім того знайдено достатні умови прямування інтегрального відхилу до нуля при виборі коефіцієнтних функцій з експонентами залежними або тільки від часу *t*, або тільки від координати молекули **x**.

Теорема 5.3. Нехай в бімодальному розподілі (7) коефіцієнтні функції мають наступний вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x})\exp\left\{-\beta_i\left(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t\right)^2\right\}, \ i=1,2,$$

де функції $\psi_i(t,\mathbf{x}), \ i=1,2$ такі, що вирази

$$\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1(\bar{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x})+2\beta_2(\bar{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})}; \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}e^{2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}; \ \psi_i e^{2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})};$$
$$t\psi_i e^{2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}; \ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right| e^{2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}; \ t\left(\bar{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}$$

належать простору $L_1(R^4)$, а припущення $\bar{\mathbf{u}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \ i=1,2,$ виконується для $n_i \geq 1$.

Тоді існує Δ_1, визначене у відповідності з (11), таке, що виконується $\Delta_1 \leq \Delta_1'$, причому скінченна границя величини Δ_1' існує і дорівнює виразу (23) для $n_i > 1$, а при $n_i = 1$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i \int_{R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2(\bar{\mathbf{u}}_{oi},\bar{\mathbf{v}}_i)\psi_i(t,\mathbf{x}) + \left(\bar{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right| e^{2(\bar{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}dtd\mathbf{x} +$$

$$+4\pi d^2\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2\,|\,\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2\,| \int_{R^4}\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})e^{2(\bar{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})}e^{2(\bar{\mathbf{u}}_{o2},\mathbf{x})}dtd\mathbf{x}.$$

Наслідок 5.2. Нехай виконані всі припущення теореми 5.3, й функції $\psi_i(t,\mathbf{x}), \ i=1,2$ мають вигляд «δ-плато» (21), причому $\psi_{\delta_1}(\mathcal{G}_1,t,\mathbf{x})$ і $\psi_{\delta_2}(\mathcal{G}_2,t,\mathbf{x})$ такі, що загальна кількість їх екстремумів з означення 5.2 обмежена рівномірно відносно всіх аргументів константою $\mathcal{K}_1>0$ при $\delta_1,\delta_2 \to 0$.

Крім того, нехай виконується додаткова умова

$$(\bar{\mathbf{u}}_i,\bar{\mathbf{v}}_i) = 0, \ i=1,2.$$

Тоді твердження (24) залишається в силі при виконанні хоча б однієї з умов 1)-3) наслідку 5.1.

Теорема 5.4. Нехай в розподілі (7) для коефіцієнтних функцій $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}), \ i=1,2$ виконується наступна рівність:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x})\exp\{-2\beta_i(\bar{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\}, \ i=1,2, \qquad (25)$$

і зберігаються припущення $\bar{\mathbf{u}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \ \bar{\mathbf{v}}_i = \dfrac{\bar{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}$ для параметрів $n_i > \dfrac{1}{2}, \ k_i \geq \dfrac{1}{2}, \ i=1,2$.

Крім того, нехай функції $\psi_i(t,\mathbf{x}), \ i=1,2$ такі, що добутки величин (22) на множник $e^{\beta_i(\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i t)^2}$ належать простору $L_1(R^4)$.

Тоді дійсна оцінка $\Delta_1 \leq \Delta_1'$, де

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\sigma_i \int_{R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right| dtd\mathbf{x},$$

$$\text{та}\quad \sigma_i = \begin{cases} 1, & n_i > \frac{1}{2}, k_i > \frac{1}{2}; \\ e^{\bar{\mathbf{v}}_{oi}^2}, & n_i > \frac{1}{2}, k_i = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Якщо в рівності (25) в якості функцій $\psi_i(t,\mathbf{x})$, i=1,2 розглядати фінітні «δ-плато», то виходить результат ідентичний результату теореми 5.1.

У *підрозділі 5.2* проведено детальний аналіз розв’язків, які було отримано в наслідку 5.1 теореми 5.2.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено дослідження математичної моделі газу з твердих куль у всьому просторі на основі кінетичного рівняння Больцмана. Запропоновано і розвинено новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків цього нелінійного інтегро-диференціального рівняння. Такі розв'язки наближено описують процес взаємодії між максвелівськими течіями газу з твердих куль і мають вигляд бімодальних розподілів, які забезпечують довільну малість того чи іншого відхилу між частинами рівняння Больцмана.

Основними результатами, які отримано в роботі, є наступні положення.

- Знайдено явні наближені розв'язки кінетичного рівняння Больцмана для моделі твердих куль у вигляді двопотокових розподілів, які описують взаємодію двох течій, що прискорюються та ущільнюються, з використанням рівномірно-інтегрального відхилу.
- Досліджено бімодальні розподіли з модами типу «прискорення-ущільнення» з використанням рівномірно-інтегрального відхилу з «однорідною вагою».
- Запропоновано новий тип відхилу між частинами рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль, а саме рівномірно-інтегральний відхил з «неоднорідною вагою», за допомогою якого виділено новий клас явних наближених розв'язків вищезгаданого рівняння. На відміну від розв'язків, отриманих у випадку змішаного відхилу з «однорідною вагою», які описують «згустки» і «циліндри», побудовані бімодальні наближені розв'язки з модами типу «прискорення-ущільнення» у випадку змішаного відхилу з «неоднорідною вагою» описують потоки газу з твердих куль у всьому просторі.
- Встановлено достатні умови довільної малості інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана, а саме знайдені такі нетривіальні умови, що накладаються на коефіцієнтні функції бімодальних розподілів з локальними максвелівськими модами типу «прискорення-ущільнення», які забезпечують мінімізацію зазначеного відхилу.

Результати дисертації носять теоретичний характер і можуть бути використані при подальшому вивченні рівняння Больцмана як для моделі твердих куль, так і для деяких інших моделей, наприклад, моделі шорсткуватих куль. Також дисертаційні дослідження можуть використовуватися при вивченні схожих з рівнянням Больцмана кінетичних рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гордевський В.Д. Перехідний режим між деякими локально-максвелівськими течіями / В.Д. Гордевський, Н.В. Андріяшева // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 51-57.

2. Gordevskyy V.D. Interaction between «accelerating-packing» flows in a low-temperature gas / V.D. Gordevskyy, N.V. Andriyasheva // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – Vol. 5, N 1. – P. 38-53.

3. Гордевський В.Д. Перехідний режим між течіями типу «прискорення-ущільнення» / В.Д. Гордевський, Н.В. Лемешева // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2010. – № 931. – С. 49-58.

4. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение в газе из твердых сфер с модами типа «ускорение-уплотнение» / В.Д. Гордевский, Н.В. Лемешева // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2014. – № 1133 – С. 114-130.

5. Lemesheva N.V. Bimodal distributions in the space of a non-uniform weight / N.V. Lemesheva // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2015. – Vol. 11, N 3. – P. 267-278.

6. Gordevskyy V.D. Some local approximate solutions of the Boltzmann equation / V.D. Gordevskyy, N.V. Andrijasheva // International conference on the occasion of the 150-th birthday of Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 24-30 June 2007: book of abstracts. – Kharkiv, 2007. – P. 53.

7. Лемешева Н.В. Взаимодействие ускоряющихся и уплотняющихся потоков в газе из твердых сфер / Н.В. Лемешева // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: международная научная конференция для молодых ученых, 24-26 апреля 2009 г.: тезисы докладов. – Харьков, 2009. – С. 74-76.

8. Лемешева Н.В. Переходный режим между потоками типа «ускорение-уплотнение» / Н.В. Лемешева // Современные проблемы науки и образования: 9-я международная междисциплинарная научно-практическая школа-конференция, 30 апреля – 10 мая 2009 г.: материалы конференции. – Алушта, 2009. – С. 91-92.

9. Лемешева Н.В. Описание взаимодействия потоков типа «ускорение-уплотнение» в пространстве с весом / Н.В. Лемешева // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня 2010 р.: тези доповідей. – Київ, 2010. – С. 169.

10. Lemesheva N. Bimodal approximate solutions of the Boltzmann equation in the weighted spaces / N. Lemesheva // Analysis and mathematical physics: international conference, 24-28 June 2013: book of abstracts. – Kharkiv, 2013.– P. 29-30.

11. Гордевский В.Д. Бимодальные приближенные решения нелинейного уравнения Больцмана / В.Д Гордевский, Н.В. Лемешева / Современные проблемы математики, механики и информатики: международная школа-конференция «Тараповские чтения - 2013», посвященная 150-летию кафедры теоретической и прикладой механики, 29 сентября – 4 октября 2013 г.: тезисы докладов. – Харьков, 2013. – С. 92-93.

12. Лемешева Н.В. Приближенные решения уравнения Больцмана в пространстве с неоднородным весом / Н.В. Лемешева // Пятнадцатая международная научная конференция имени академика Михаила Кравчука, 15-17 мая 2014 г.: тезисы докладов. – Киев, 2014. – С. 192-193.

13. Gordevskyy V. Interaction between the two «accelerating-packing» flows in a gas of hard spheres / V. Gordevskyy, N. Lemesheva // Analysis and mathematical physics: II international conference, 16-20 June 2014: book of abstracts. – Kharkiv, 2014. – P. 32.

АНОТАЦІЯ

Лемешева Н.В. Взаємодія локально-максвелівських течій в розрідженому газі. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2016.

Дисертаційна робота присвячена пошуку явних наближених розв'язків нелінійного кінетичного інтегро-диференціального рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Ці розв'язки шукаються у вигляді бімодальних розподілів, тобто лінійних комбінацій двох максвеліанів спеціального типу, які відповідають неоднорідним нестаціонарним течіям і описують прискорення та ущільнення газу в деякому напрямку.

Здобуто наближене описання процесу взаємодії між двома течіями типу «прискорення-ущільнення» для моделі твердих куль, якщо обидві температури є досить малими, шляхом побудови бімодальних розподілів з різними коефіцієнтними функціями за допомогою рівномірно-інтегрального та інтегрального відхилів. Знайдені двопотокові розподіли, які забезпечують довільну малість ріномірно-інтегрального відхилу з «однорідною вагою» та рівномірно-інтегрального відхилу з «неоднорідною вагою» між частинами рівняння Больцмана для моделі твердих куль при відповідному виборі коефіцієнтних функцій і поведінки всіх параметрів, які входять до максвеліанів. Деякі, отримані за допомогою інтегрального відхилу, наближені розв'язки проаналізовано з точки зору їх фізичного сенсу та геометричної структури.

Ключові слова: рівняння Больцмана, тверді кулі, максвеліан, бімодальний розподіл, наближені розв'язки, «прискорення-ущільнення», відхил, низькі температури.

АННОТАЦИЯ

Лемешева Н.В. Взаимодействие локально-максвелловских течений в разреженном газе. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 2016.

Диссертационная работа посвящена поиску явных приближенных решений нелинейного кинетического интегро-дифференциального уравнения Больцмана для модели твердых сфер. Эта модель описывает газ, молекулы которого неразличимы и

представляются в виде одинаковых абсолютно гладких сфер, которые имеют одинаковую массу (равную единице), одинаковый диаметр; взаимодействие между молекулами происходит по законам классической механики исключительно в момент соударения и представляет собой абсолютно упругий удар. Несмотря на большое количество методов и подходов в различных направлениях исследования уравнения Больцмана и его решений для данной модели, никаких точных решений полного трехмерного нелинейного уравнения Больцмана, кроме максвелловских (равновесных распределений Максвелла), в явном виде найти на сегодняшний день так и не удалось. Так же как не удается найти даже приближенные решения в виде бимодальных распределений (попытки построить решения такого типа были связанны с построением моделей ударных волн и задачами об испарении-конденсации). Таким образом, возникла проблема поиска новых приближенных решений в явном виде, которые имеют вид бимодальных распределений, то есть линейных комбинаций двух максвеллианов специального вида и при этом удовлетворяют уравнению Больцмана в случае модели твердых сфер с какой угодно степенью точности, иными словами обеспечивают произвольную малость какой-нибудь подходящей невязки (нормы разности между левой и правой частями указанного уравнения).

В диссертации построены двухпотоковые приближенные решения уравнения Больцмана в случае локальных максвеллианов типа «ускорение-уплотнение», которые соответствуют неоднородным нестационарным потокам и описывают ускорение и уплотнение газа из твердых сфер в некотором направлении. Путем построения таких бимодальных распределений с различными коэффициентными функциями, которые явно либо неявно зависят от температур потоков, получено приближенное описание процесса взаимодействия между двумя течениями указанного выше типа с помощью равномерно-интегральной невязки, при условии, что обе температуры достаточно малы.

Также в диссертации предложены еще две невязки, которые являются модификацией известной раннее равномерно-интегральной невязки, взятые в качестве норм разности между частями уравнения Больцмана, а именно равномерно-интегральная невязка с «однородным весом» и равномерно-интегральная невязка с «неоднородным весом». Приведен явный вид бимодальных распределений с ускоряющимися и уплотняющимися максвеллианами и указаны достаточные условия для минимизации этих невязок.

Найдены двухпотоковые распределения с модами типа «ускорение-уплотнение» и коэффициентными функциями типа «δ-плато», которые обеспечивают произвольную малость интегральной невязки, взятой в качестве степени приближенности между правой и левой частями уравнения Больцмана для модели твердых сфер. Проведен анализ физического смысла и особенностей геометрической структуры некоторых решений, полученных с помощью этой невязки.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, твердые сферы, максвеллиан, бимодальное распределение, приближенные решения, «ускорение-уплотнение», невязка, низкие температуры.

ABSTRACT

Lemesheva N.V. The interaction of local-maxwells flows in the rarefied gas. – Manuscript.

Thesis submitted the degree of Candidate of Sciences (Ph.D.) in physics and mathematics, specialty 01.01.03 – Mathematical Physics. – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 2016.

The thesis is devoted to explicit approximate solutions of nonlinear integral-differential kinetic Boltzmann equation for the model of hard spheres. These solutions are sought in a form of bimodal distributions, i.e., linear combinations of the two Maxwellians of a special type, which correspond to inhomogeneous, nonstationary flows and describe the acceleration and packing of gas along some direction.

The approximate description of interaction between the two flows of the «accelerating-packing» type for the model of hard spheres, when the both temperatures are sufficiently small, was obtained by building of bimodal distributions with various coefficient functions with the help of the mixed error and of the integral error.

The distributions, which minimize the mixed error with «uniform weight» and the mixed error with «non-uniform weight» between the left- and the right-hand sides of the Boltzmann equation for hard spheres, are found. It was made possible with an appropriate choice of coefficient functions and behavior of all Maxwellians parameters. The analysis in terms of the physical sense and geometrical structure of some approximate solutions, which are obtained with help of the integral error, was done.

Keywords: Boltzmann equation, hard spheres, Maxwellian, bimodal distribution, approximate solutions, "accelerating-packing", error, low temperatures.