Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Марченко Віталій Анатолійович

УДК 517.9

ПРО СПЕКТРАЛЬНІ БАЗИСНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України та Фізико-технічному інституті низьких температур імені Б.І. Вєркіна НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Скляр Григорій Михайлович,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна МОН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник;

Офіційні опоненти:

академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Хруслов Євген Якович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б.І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
завідувач відділу диференціальних рівнянь та геометрії;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Храбустовський Володимир Іванович,
Український державний університет залізничного транспорту МОН України, м. Харків,
завідувач кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «23» вересня 2016 р. о 15.15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна МОН України за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна МОН України за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий «___» серпня 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Ігнатович С.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню якісних властивостей лінійних абстрактних диференціальних (або, іншими словами, еволюційних) рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \ t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{1}$$

у банахових просторах X. Рівняння вигляду (1) виникають у теоретичній та математичній фізиці, теоретичній та квантовій механіці, біології та інших науках. Перш за все, при дослідженні рівнянь (1) нас цікавлять питання існування, єдиності та поведінки розв'язків. Одним з ефективних сучасних шляхів дослідження цих питань є застосування методів теорії C_0-напівгруп. Оператор A генерує C_0-напівгрупу у просторі X у тому і тільки тому випадку, коли задача Коші (1) є коректною і резольвентна множина оператора A є непустою. Зокрема, ці умови задовольняються для диференціальних рівнянь, що описують процеси теплопровідності та хвильові процеси, рівнянь електродинаміки Максвелла, систем диференціальних рівнянь із запізненням.

Породження оператором A C_0-групи означає, додатково, що задача (1) коректна також і при $t \leq 0$. Цей феномен характеризує оборотні динамічні процеси та спостерігається, наприклад, в системах із запізненням (чисто) нейтрального типу та хвильових (коливальних) системах.

Серед усього розмаїття операторів A, що відповідають еволюційним рівнянням (1), оператори з точковим спектром займають важливе місце. Найбільш дослідженим є випадок задачі (1) з оператором A, що має точковий спектр, у гільбертовому просторі H. У цій ситуації важливу роль відіграють поняття базису Ріса та базису Ріса з підпросторів H.

Якщо увесь фазовий простір H розпадається у пряму суму A-інваріантних підпросторів, які у своїй сукупності утворюють базис Ріса H, то нам зручно робити висновки щодо поведінки траєкторії системи (1) у всьому просторі H по поведінці проекцій траєкторії у кожному з цих A-інваріантних підпросторів, оскільки ряд із квадратів норм проекцій є збіжним. Даний підхід має важливе застосування у теорії лінійних керованих систем в H при дослідженні властивостей стійкості, керованості, стабілізації, спостережуваності, а також реалізації системи за заданими спектральними даними, див. роботи Р. Рабаха, Г.М. Скляра, А.В. Резуненко, К.В. Скляр, П.Ю Бархаєва, Р. Кертайн, Х. Зварта, А.В. Милославського, Г.К. Ксу, Б.З. Гуо та інших авторів.

Відправним пунктом досліджень, представлених у дисертації, є наступний результат (Г.К. Ксу, С.П. Юнг, 2005 р., Х. Зварт, 2010 р.). Якщо оператор A еволюційного рівняння (1) генерує C_0-групу в гільбертовому просторі H, спектральні проекції оператора A утворюють повну систему в H, а власні числа A задовольняють певним умовам відокремленості, то в H існує базис Ріса з A-інваріантних підпросторів. При цьому ряд питань залишаються недослідженими. А саме, що відбувається у випадку, коли власні числа A не задовольняють цим умовам відокремленості? Зокрема, чи може бути коректною задача Коші для лінійного еволюційного рівняння (1) на осі $t \in \mathbb{R}$ у випадку, який до цього часу не розглядався – коли оператор A має власні числа $\lambda_n = i\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, де $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ є необмеженою та монотонно зростаючою послідовністю, що задовольняє умову $\lim_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0$, а відповідні власні вектори утворюють повну систему, але не утворюють базис Шаудера?

Поняття розкладу Шаудера (базису із підпросторів) узагальнює поняття базису Шаудера та є важливим об'єктом нескінченновимірного аналізу. Серед властивостей розкладів Шаудера відзначимо властивість стійкості, у зв'язку з застосуваннями у теорії збурень лінійних операторів та в теорії лінійних еволюційних рівнянь (1). Так, в 1967 році Т. Като отримав важливу теорему про подібність послідовностей проекторів у просторах Гільберта, яка служить фундаментом досліджень, що присвячені встановленню достатніх умов існування базису Ріса із A-інваріантних підпросторів для різних класів операторів, у тому числі диференціальних операторів, (див., наприклад, роботи Т. Като, К. Кларка, Е. Х'юза, Б. Мітягіна, Дж. Адуччі, П. Сігла).

У банахових просторах, наскільки нам відомо, методи, подібні до тих, що пов'язані з базисами Ріса, розвинуті слабо. Тому актуальною є задача спробувати розповсюдити аналогічні підходи на випадок еволюційних рівнянь (1) у певних класах банахових просторів. При цьому виявляється, що геометрія самого простору Банаха відіграє важливу роль. У зв'язку з цим у дисертації досліджуються властивості розкладів Шаудера та розглядається задача розповсюдження теореми Т. Като на випадок банахових просторів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та керування ХНУ ім. Каразіна у рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування та теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (№ держреєстрації 0111U010364) та у відділі теорії функцій Фізико-технічного інституту ім. Б.І. Вєркіна НАН України, у рамках тематичного плану «Нові методи теорії функцій та їх застосування у спектральній теорії, характеризаційних задачах математичної статистики, теорії керування та ергодичній теорії» (№ держреєстрації 0113U001130), а також за підтримки гранту НАН України для молодих вчених, проект «Лінійні еволюційні рівняння у гільбертовому просторі та рівняння Больцмана» (№ держреєстрації 0115U003845).

Мета і задачі дослідження. *Мета дисертації* – дослідження коректності та стійкості лінійних еволюційних рівнянь (1) у банахових просторах в залежності від спектральних та базисних властивостей відповідних операторів A, а також пов'язане з цим дослідження властивостей розкладів Шаудера.

Об'єктами досліджень є лінійні еволюційні рівняння та пов'язані з ними C_0-напівгрупи лінійних обмежених операторів, інфінітезимальні генератори C_0-напівгруп, власні числа та власні вектори операторів, розклади та базиси Шаудера, а також відповідні розкладам проектори.

Предметом досліджень є зв'язок коректності та стійкості лінійних еволюційних рівнянь вигляду (1) зі спектральними та базисними властивостями відповідних операторів A, властивості розкладів Шаудера та їх застосування до питань коректності та стійкості рівнянь (1) у певних банахових просторах.

Методи досліджень включають в себе методи теорії абстрактних диференціальних рівнянь та C_0-напівгруп, методи теорії лінійних операторів, теорії розкладів Шаудера, теорії банахових просторів, числення скінченних різниць, дискретна нерівність Харді.

Задачами досліджень є наступні задачі:

1) Дослідження коректності задач Коші (1) на осі $t \in \mathbb{R}$ у випадку, коли оператор A діє у гільбертовому просторі, його власні числа мають вигляд $\lambda_n = i\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, де $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – необмежена та монотонно зростаюча послідовність, що задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0$, а відповідні власні вектори утворюють повну систему, але не утворюють базис Шаудера. З цією метою розглядається задача конструювання класу операторів у гільбертових просторах із зазначеними вище властивостями, що генерують C_0-групу у відповідному просторі. Дослідження зв'язку коректності рівняння (1) з характером поведінки спектру оператора на нескінченності. Дослідження питання щодо асимптотичної поведінки розв'язків відповідних коректних еволюційних рівнянь.
2) Розповсюдження результатів пункту 1 на оператори у деяких банахових просторах.
3) Пошук класу банахових просторів та операторів у них із властивостями, подібними до властивостей спектральних за Рісом операторів у гільбертових просторах. Встановлення коректності еволюційних рівнянь (1) для таких операторів.
4) Встановлення властивостей безумовних розкладів Шаудера у банахових просторах з певними геометричними характеристиками. Дослідження стійкості базисів та розкладів Шаудера у банахових просторах, розповсюдження теореми Т. Като на випадок банахових просторів. Застосування отриманих результатів до питання щодо стійкості еволюційних рівнянь (1) у просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, c_0, та у гільбертових просторах.

Наукова новизна одержаних результатів.

У дисертації отримані наступні нові наукові результати:

1. Введено та досліджено класи гільбертових просторів $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, і отримано умови коректності задач Коші у просторах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, та некоректності в $H_1(\{e_n\})$ для еволюційних рівнянь (1) з операторами певного класу в термінах характеру поведінки спектру відповідного оператора на нескінченності. Запропоновано конструкцію класу операторів A_k в $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, що породжують C_0-групу та мають наступні властивості: A_k має власні числа $\lambda_n = i\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, де послідовність $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ задовольняє умовам $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0$, а відповідні їм власні вектори утворюють повну систему, але не утворюють базис Шаудера. Конструкція суттєвим чином ґрунтується на застосуванні дискретної

нерівності Харді. Отримано явний вигляд розв’язків відповідних коректних еволюційних рівнянь та досліджено їх асимптотичну поведінку.

2. Введено та досліджено класи банахових просторів $\ell_{p,k}\left(\{e_n\}\right)$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, для яких, у випадку $p > 1$, отримано результати, аналогічні вказаним у пункті 1.
3. Введено поняття симетрично-спектрального оператора, що узагальнює поняття спектрального за Рісом оператора у гільбертовому просторі, та досліджені його властивості у просторах $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$ та c_0. Встановлені умови коректності та некоректності задач Коші (1) з операторами із введеного класу в цих просторах.
4. Отримано розвиток теореми Т. Като на випадок розкладів Шаудера у просторах Гільберта, просторах послідовностей Орліча та у банахових просторах із розкладами Шаудера, що мають узагальнену властивість ортогональності (у роботі вони названі розкладами Шаудера-Орліча). Встановлено властивості безумовних розкладів Шаудера в залежності від геометричних характеристик простору Банаха. Отримано результати щодо стійкості безумовних розкладів Шаудера, безумовних і симетричних базисів у просторах $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$, c_0, та у просторах Гільберта. Результати застосовано до питання стійкості еволюційних рівнянь (1) у цих просторах.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертаційній роботі, мають теоретичний характер. Отримані результати можуть бути корисними для подальшого розвитку спектральних методів дослідження абстрактних диференціальних рівнянь, спектральної теорії C_0-напівгруп, теорії розкладів і базисів Шаудера, геометрії просторів Банаха, а також у теорії диференціальних рівнянь із запізненням. Отримані результати можуть бути застосовані в дослідженнях стійкості, стабілізації, керованості та спостережуваності лінійних нескінченновимірних систем у певних банахових просторах.

Особистий внесок автора. Ідея конструкції генератора C_0-групи з небазисним сімейством власних векторів (опубліковано у статті [4]), що ґрунтується на застосуванні нерівності Харді, належить науковому керівнику. Автору належить розвиток цієї конструкції на випадок різноманітних сімейств операторів у просторах Гільберта та деяких просторах Банаха. Всі інші результати дисертації отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на VI науковій конференції для студентів та аспірантів «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2010), Міжнародній конференції «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях», присвяченій 50-річчю механіко-математичного факультету (Харків, 2011), IX Міжнародній науковій конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2014), II Міжнародній конференції “Analysis and Mathematical Physics” (Харків, 2014), X Міжнародній науковій конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2015), Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 2015), III Міжнародній конференції “Analysis and Mathematical Physics” (Харків, 2015), Міжнародній конференції “Dynamical Systems and Their Applications” (Київ, 2015), Міжнародній математичній конференції імені В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2015). Результати обговорювались на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь та керування ММФ ХНУ ім. В.Н. Каразіна (керівник – доктор фіз.-мат. наук, проф. Коробов В.І.), наукових семінарах відділу диференціальних рівнянь та геометрії ФТІНТ НАН України (керівник – академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, проф. Хруслов Є.Я.) та на науковому семінарі з аналізу кафедри фундаментальної математики ХНУ ім. В.Н. Каразіна.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 5 статтях у фахових виданнях [1]–[5], 9 тезах міжнародних математичних конференцій [6]–[14], та 1 препринті [15].

Структура і обсяг дисертації. Текст дисертації складається з титульного аркушу, змісту, списку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 163 сторінки. Список використаної літератури включає в себе 158 найменувань та займає 18 сторінок. Результати, що виносяться на захист, сформульовано та доведено у розділах 2, 3 та 4.

Автор дуже вдячний своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Скляру Григорію Михайловичу за постановку цікавих задач, цінні поради, увагу та підтримку. Автор також вдячний кандидатам фізико-математичних наук, доцентам Ігнатович Світлані Юріївні та Бархаєву Павлу Юрійовичу за увагу до тексту роботи та корисні зауваження.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність наукових проблем, що розглядаються в дисертації, визначено мету і завдання дослідження, висвітлено питання наукової новизни, теоретичного та практичного значення отриманих результатів. Подано відомості про апробацію результатів дослідження та публікації автора за темою дисертації.

У *першому* розділі подається огляд літератури за темою дисертаційної роботи і наводиться аргументація щодо вибору напрямків досліджень, формулюються постановки задач та наводиться короткий огляд основних результатів. Висвітлюються основні ідеї, що використовуються у дисертаційній роботі та наводяться основні для роботи означення та відомі факти.

Означення 1.1. Однопараметричне сімейство $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ лінійних обмежених операторів у банаховому просторі X називається C_0-напівгрупою, якщо:

1. $T(t)T(s)=T(t+s)$, для будь-яких $t,s\geq 0$;
2. $T(0)=I$;
3. $\lim\limits_{t\downarrow 0}\|T(t)x-x\|=0,$ для будь-якого $x\in X$.

Означення 1.2. Генератором C_0-напівгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ називають лінійний оператор $A: X\supset D(A)\mapsto X$, з областю визначення $D(A)=\left\{x\in X:\ \exists\lim\limits_{t\downarrow 0}\big(T(t)x-x\big)/t\right\}$, що діє за правилом

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0}\big(T(t)x - x\big)/t, \;\; x \in D(A).$$

Означення 1.3. Задача Коші (1) називається коректною, якщо для будь-якого $x_0 \in D(A)$ існує єдиний класичний розв'язок $x(\cdot) = x\big(\;\cdot\;, x_0\big)$ задачі (1). Під класичним розв'язком мається на увазі функція $x \in C^1\big([0,\infty), X\big)$, така, що $x(t) \in D(A)$, для будь-якого $t \geq 0$, та задовольняюча системі (1).

Відомо, що оператор A генерує C_0-напівгрупу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ у тому і тільки тому випадку, коли задача Коші (1) коректна та $\rho(A) \neq \varnothing$. У цій ситуації класичний та слабкий розв'язки задачі (1) визначається єдиною формулою $x\big(\;\cdot\;, x_0\big) = T(t)x_0$. Якщо $x_0 \in D(A)$, то розв'язок називають класичним (або сильним), якщо $x_0 \in X$, то розв'язок називають слабким (або узагальненим).

Якщо існує розширення C_0-напівгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ в банаховому просторі X до C_0-групи $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, то таке розширення єдине. У цьому випадку сімейство $\{S(t) = T(-t)\}_{t\geq 0}$ також є C_0-напівгрупою з генератором $-A$, причому $D(A) = D(-A)$. За цих умов оператор A називають генератором C_0-групи $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, а відповідна задача Коші на осі

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \;\; t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

є коректною у просторі X .

Другий розділ присвячений *пошуку класу банахових просторів та операторів у них із властивостями, подібними до властивостей спектральних за Рісом операторів у гільбертових просторах,* та *дослідженню коректності еволюційних рівнянь (1) для таких операторів.*

У *підрозділі 2.1* наводяться важливі для дисертації означення та вивчаються властивості симетричних базисів, вводиться означення симетрично-спектрального оператора та вказується на зв'язок цього означення із вже існуючими поняттями.

Усюди надалі ми будемо позначати через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ канонічний базис простору ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, тобто $e_n = \big(\delta_i^n\big)$, $n \geq 1$, де δ_i^n - символ Кронекера. Дія функціоналу $f \in X^*$ на елемент простору $x \in X$ буде позначатися таким чином: $\langle f, x\rangle$. В дисертаційній роботі важливу роль відіграють наступні означення.

Означення 2.1. Послідовність $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахового простору X називається базисом Шаудера (або просто базисом), якщо будь-який елемент $x \in X$ має єдиний розклад $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$, що сильно збігається.

Означення 2.3. Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору X називають симетричним, якщо будь-яка перестановка базису $\big\{\phi_{\sigma(n)}\big\}_{n=1}^{\infty}$ сама є базисом, ізоморфним $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Поняття симетричного базису було вперше введено та досліджено І. Зінгером у зв'язку з задачею С. Банаха про замкнені гіперплощини та пов'язаним з нею питанням Ч. Бессаги та А. Пельчинського. Наприклад, канонічний базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ просторів ℓ_p, $1\le p<\infty$, та c_0 є симетричним. Будь-який базис Ріса гільбертового простору також є симетричним. У той же час, у просторі $L_p[0,1]$, $p\ne 2$, не існує симетричних базисів.

Означення 2.4. Припустимо, що A – замкнений лінійний оператор, що діє в банаховому просторі X, наділеному симетричним базисом. Якщо A має прості власні значення $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$, а відповідні цим значенням власні вектори $\{\phi_n\}_{n\ge1}$ утворюють симетричний базис X, то ми будемо називати A симетрично-спектральним оператором.

Поняття симетрично-спектрального оператора є узагальненням поняття спектрального за Рісом оператора на випадок банахових просторів із симетричним базисом.

Підрозділ 2.2 присвячений дослідженню коректності рівнянь (1) у просторах ℓ_p, $1\le p<\infty$, та c_0. Відомо, що в цих просторах існує єдиний, з точністю до ізоморфізму, симетричний базис. Отже, якщо $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ симетричний базис ℓ_p, $1\le p<\infty$, то існують константи $M\ge m>0$, такі що для будь-якого $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n\in\ell_p$ маємо

$$m\|x\|^p\le\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\le M\|x\|^p. \qquad (3)$$

Аналогічне твердження вірне і у просторі c_0. На використанні цих властивостей симетричних базисів у ℓ_p та c_0 ґрунтується доведення основних результатів другого розділу.

Теорема 2.1. Нехай A – симетрично-спектральний оператор у просторі ℓ_p, $1\le p<\infty$, з власними числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ та відповідними власними векторами $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, а $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(\ell_p)^*$ – біортогональна до $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ послідовність. Тоді оператор A має наступні властивості.

(i) $\rho(A)=\{\lambda:\ \inf_n|\lambda_n-\lambda|>0\}$, $\sigma(A)=\overline{\{\lambda_n\}_{n\ge1}}$, і резольвента має вигляд $(A-\lambda I)^{-1}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n$, де $\lambda\in\rho(A)$, $x\in\ell_p$.

(ii) Для будь-якого $x\in D(A)$ оператор A має спектральне представлення $Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle\psi_n,x\rangle\phi_n$, де $D(A)=\left\{x\in\ell_p:\ \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p|\langle\psi_n,x\rangle|^p<\infty\right\}$.

(iii) Оператор A генерує C_0-напівгрупу $\{T(t)\}_{t\ge0}$ тоді і тільки тоді, коли $\sup_n\Re(\lambda_n)<\infty$; при цьому дія C_0-напівгрупи $\{T(t)\}_{t\ge0}$ задається формулою $T(t)x=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n t}\langle\psi_n,x\rangle\phi_n$, де $t\ge0$, $x\in\ell_p$.

(iv) Логарифмічний показник зростання C_0-напівгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ співпадає з $\omega_0 = \sup\limits_n \Re(\lambda_n)$.

Також має місце аналогічний результат щодо властивостей симетрично-спектральних операторів у просторі c_0. Відтак, симетрично-спектральні оператори у просторах ℓ_p, $1\leq p<\infty$, та c_0 мають властивості, що подібні до властивостей спектральних за Рісом операторів у просторах H.

Головним результатом *розділу 2* є наступна теорема про коректність задач Коші у просторах ℓ_p, $1\leq p<\infty$, та c_0.

Теорема 2.2. Нехай A – симетрично-спектральний оператор у просторі ℓ_p, $1\leq p<\infty$, або c_0 з власними числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді вірні твердження:

1) Задача Коші (1) є коректною тоді і тільки тоді, коли $\sup\limits_n \Re(\lambda_n)<\infty$.

2) Якщо $\omega = \sup\limits_n \Re(\lambda_n)<\infty$, то існує константа $C>0$, така що для будь-якого розв'язку задачі (1), $x(t)=T(t)x_0$, $t\geq 0$, справедлива оцінка
$$\|T(t)x_0\|\leq Ce^{\omega t}\|x_0\|,\ t\geq 0.$$

З теорем 2.1 та 2.2 виводяться такі наслідки.

Наслідок 2.1. Нехай A – симетрично-спектральний оператор у просторі ℓ_p, $1<p<\infty$. Тоді задача Коші (1) для оператора A коректна тоді і тільки тоді, коли є коректною задача (1) для оператора A^* у просторі ℓ_q, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Наслідок 2.2. Нехай A – симетрично-спектральний оператор у просторі c_0 та задача Коші (1) для оператора A є коректною. Тоді задача Коші (1) для оператора A^* у просторі ℓ_1 також є коректною.

У *розділі 3* розглядається центральна задача дисертації: *задача конструювання класу операторів у гільбертових просторах, для яких задача Коші (1) буде коректною, із власними числами* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset i\mathbb{R}$, що задовольняють
$$\lim_{n\to\infty} i\lambda_n=-\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|=0, \tag{4}$$
а відповідні власні вектори утворюють повну систему, але не утворюють базис Шаудера. Паралельно розглядається задача дослідження зв'язку поведінки власних чисел оператора на нескінченності із коректністю/некоректністю відповідного еволюційного рівняння.

У *розділі 3* представлено клас генераторів C_0-груп із вищенаведеними властивостями у спеціальних гільбертових просторах та банахових просторах особливої структури, що вводяться в роботі.

Підрозділ 3.1 містить допоміжні конструкції та попередні результати, що використовуються у розділі 3. Нехай $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Ріса простору H, а T – оператор в H, визначений формулою $T\phi_n=\phi_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Введемо на множині усіх $x\in H$ нову норму наступним чином,
$$\|x\|_k=\|(I-T)^k x\|,\ k\in\mathbb{N},$$

та позначимо множину $x \in H$ з цією нормою символом $H_k^0(\{\phi_n\})$. Відзначимо, що $0 \in \sigma\left((I-T)^k\right)$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Отже $H_k^0(\{\phi_n\})$ – лінійний нормований простір, але неповний. Через $H_k(\{\phi_n\})$ позначимо поповнення простору $H_k^0(\{\phi_n\})$ за нормою $\|\cdot\|_k$. Виявляється, що простір $H_k(\{\phi_n\})$ складається з усіх формальних рядів $(f)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$, таких, що $\left\{c_n - C_k^1 c_{n-1} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} c_{n-k+1} + (-1)^k c_{n-k}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, де покладено $c_{1-j} = 0$ для $j \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $H_k(\{\phi_n\})$ – гільбертів простір з нормою

$$\|x\|_k = \left\|(f)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n\right\|_k = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - C_k^1 c_{n-1} + \ldots + (-1)^k c_{n-k}\right)\phi_n\right\|, \ x \in H_k(\{\phi_n\}),$$

та скалярним добутком $\langle x, y\rangle_k = \left\langle (I-T)^k x, (I-T)^k y\right\rangle, \ x, y \in H_k(\{\phi_n\})$.

Наприклад, для будь-якого параметра $\alpha \in [0, 1/2)$, $(f)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\phi_n \in H_k(\{\phi_n\})$.

Відмітимо, що $H_k(\{\phi_n\}) = \left\{x = (f)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n : \ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta^k)\right\}, \ k \in \mathbb{N}$, де $\ell_2(\Delta^k) = \left\{\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} : \ \Delta^k\alpha \in \ell_2\right\}, \ k \in \mathbb{N}$, а Δ – різницевий оператор.

Твердження 3.1. Простір $H_k(\{\phi_n\})$ має наступні властивості:

1. $\overline{Lin}\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} = H_k(\{\phi_n\})$, але $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є базисом простору $H_k(\{\phi_n\})$;
2. $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ має єдину біортогональну послідовність $\left\{\chi_n = (I-T)^{-k}\left(I-T^*\right)^{-k}\phi_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ у просторі $H_k(\{\phi_n\})$, де $\langle \phi_m, \phi_n^*\rangle = \delta_n^m$;
3. $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно мінімальною послідовністю в $H_k(\{\phi_n\})$, а $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімальною, але не рівномірно мінімальною у просторі $H_k(\{\phi_n\})$;
4. $H \subset H_1(\{\phi_n\}) \subset H_2(\{\phi_n\}) \subset H_3(\{\phi_n\}) \subset \ldots$;
5. $H_k(\{\phi_n\})$ – гільбертів простір, ізоморфний ℓ_2.

Аналогічним чином у розгляд вводиться простір Банаха

$$\ell_{p,k}(\{\phi_n\}) = \left\{x = (f)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n : \ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta^k)\right\}, \ k \in \mathbb{N}, \ p \ge 1,$$

де тепер $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симетричний базис простору ℓ_p, $p \ge 1$. Зауважимо, що наші простори $H_k(\{\phi_n\})$ та $\ell_{p,k}(\{\phi_n\})$ по є суті таким ж, як і простори $\ell_p(\Delta^k)$, що раніше вивчались Б. Алтаєм, Ф. Башаром, М. Іманінеджадом та М. Мірі. Деякі властивості простору $\ell_{p,k}(\{\phi_n\})$ зібрані у наступному твердженні.

Твердження 3.2. Простір $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$ має наступні властивості:

1. Якщо $p>1$, то $\overline{Lin}\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}=\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$;
2. $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є базисом простору $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$;
3. Якщо $p>1$, то $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ має єдину біортогональну послідовність $\left\{\chi_n=\left(I-T\right)^{-k}\left(I-T^*\right)^{-k}\phi_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ в $\left(\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)\right)^*$, де $\left\{\phi_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ – біортогональний до $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ базис простору ℓ_q, $p^{-1}+q^{-1}=1$;
4. Якщо $p>1$, то $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно мінімальною послідовністю у просторі $\left(\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)\right)^*$, в той час як $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімальною, але не рівномірно мінімальною послідовністю у просторі $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$;
5. $\ell_p\subset\ell_{p,1}\left(\{\phi_n\}\right)\subset\ell_{p,2}\left(\{\phi_n\}\right)\subset\ell_{p,3}\left(\{\phi_n\}\right)\subset\ldots$;
6. $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$ – простір Банаха, ізоморфний ℓ_p.

У підрозділі 3.2 представлено конструкцію генератора C_0-групи у просторі $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$ з власними числами $\lambda_n=i\ln n,\ n\in\mathbb{N}$, та з повним, мінімальним, але небазисним сімейством власних векторів. Визначимо оператор $A:H_1\left(\{\phi_n\}\right)\supset D(A)\mapsto H_1\left(\{\phi_n\}\right)$ формулою

$$Ax=A(f)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n=(f)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n\phi_n, \tag{5}$$

де $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – необмежена послідовність в $\mathbb{C}$, з областю визначення

$$D(A)=\left\{x=(f)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n\in H_1\left(\{\phi_n\}\right):\ \{\lambda_n c_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_2\left(\Delta\right)\right\}. \tag{6}$$

Центральним результатом дисертації є наступна теорема.

Теорема 3.1. Оператор A, визначений формулою (5), з областю визначення (6), де $\lambda_n=i\ln n,\ n\in\mathbb{N}$, генерує C_0-групу $\left\{e^{At}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ у просторі $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$, дія якої визначається формулою

$$e^{At}x=e^{At}(f)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n=(f)\sum_{n=1}^{\infty}e^{it\ln n}c_n\phi_n,\ t\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

У *підрозділі 3.3* встановлено, що, якщо ми розглянемо спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A, визначеного співвідношеннями (5), (6), що задовольняє (4), то A не обов'язково буде породжувати навіть C_0-напівгрупу в $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$.

Твердження 3.3. Оператор A, визначений формулою (5), з областю визначення (6), де $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset i\mathbb{R}$ задовольняє умовам (4) та $\exists\alpha\in\left(0,1/2\right]:\ \liminf_{n\to\infty}n^{\alpha}\left|\lambda_n-\lambda_{n-1}\right|>0$, не генерує C_0-напівгрупу в $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$.

Використовуючи теорему 3.1 та твердження 3.3, ми можемо зробити висновки щодо коректності відповідних задачі Коші у просторі $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$.

Наслідок 3.1. Задача Коші (2) для оператора A з теореми 3.1 є коректною в $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$ і її розв'язок дається формулою (7), де $x = x_0$. Задача Коші (1) для оператора A з твердження 3.3 не є коректною в $H_1\left(\{\phi_n\}\right)$.

Підрозділ 3.4 присвячений розвитку основної конструкції, яка наведена в *підрозділі 3.2,* у двох напрямках. А саме, по-перше, *ми презентуємо подібну конструкцію у будь-якому з просторів* $H_k\left(\{\phi_n\}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. По-друге, *ми розглядаємо більш загальний випадок поведінки спектра інфінітезимального оператора*. Надалі буде вважатися, що, якщо $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числова послідовність, то $u_{-n} = 0$, коли $n \geq 0$. Нагадаємо, що, якщо Δ – різницевий оператор, то

$$\Delta^k u_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j u_{n-j}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для узагальнення теореми 3.1 введемо у розгляд наступні класи послідовностей.

Означення 3.1. Нехай $k \in \mathbb{N}$ і $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Тоді визначимо

$$S_k = \left\{ \{f(n)\}_{n=1}^{\infty} : \ \lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty; \ \left\{ n^j \Delta^j f(n) \right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty, \ 1 \leq j \leq k \right\}.$$

Наприклад, для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty} \in S_k$, $\{\ln \ln (n+1)\}_{n=1}^{\infty} \in S_k$, $\left\{\ln\ln\sqrt{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \in S_k$, а $\left\{\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \notin S_k$. Якщо $m \leq k$, то $S_k \subseteq S_m$.

Перейдемо до формулювання одного з основних результатів дисертації – *узагальнення теореми 3.1*.

Теорема 3.2. Оператор $A_k : H_k\left(\{\phi_n\}\right) \supset D(A_k) \mapsto H_k\left(\{\phi_n\}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, визначений формулою

$$A_k x = A_k (f) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n = (f) \sum_{n=1}^{\infty} i f(n) c_n \phi_n,$$

де $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in S_k$, з областю визначення

$$D(A_k) = \left\{ x = (f) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \in H_k\left(\{\phi_n\}\right) : \ \{f(n) c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2\left(\Delta^k\right) \right\},$$

генерує C_0-групу $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $H_k\left(\{\phi_n\}\right)$, дія якої визначається формулою

$$e^{A_k t} x = e^{A_k t} (f) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n = (f) \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n \phi_n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Теорема 3.3. Нехай A_k – оператор з теореми 3.3. Тоді $\sigma(A_k) = \sigma_p(A_k) = \{if(n)\}_1^{\infty}$, і, якщо $x = (f) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \in H_k\left(\{\phi_n\}\right)$, то

$$\left(A_k-\lambda I\right)^{-1}x=\left(f\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\phi_n}{if(n)-\lambda},\ \lambda\in\rho(A_k)=\mathbb{C}\setminus\left\{if(n)\right\}_1^{\infty}. \qquad (9)$$

З теореми 3.3 випливає коректність відповідних задач Коші.

Наслідок 3.2. Для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ задача Коші (2) для оператора A_k з теореми 3.3 є коректною у просторі $H_k\left(\{\phi_n\}\right)$, а її розв'язок дається формулою (8), де $x=x_0$.

З наслідків 3.1 та 3.2 можна зробити висновок, що *визначальним фактором коректності задач Коші (1) та (2) для нашого класу операторів є асимптотична поведінка власних чисел оператора на нескінченності.*

Ключову роль у доведенні теорем 3.1 та 3.2 відіграє застосування класичної *дискретної нерівності Харді*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p \qquad (10)$$

для $p=2$. Також в *підрозділі 3.4* отримано результати щодо асимптотичної поведінки сконструйованих C_0-груп $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Твердження 3.4. Нехай $k\in\mathbb{N}$ та $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ – C_0-група з теореми 3.2. Тоді справедливі наступні твердження:

1. $\left\|e^{A_k t}\right\|\to\infty$, коли $t\to\pm\infty$;
2. Існує поліном p_k з позитивними коефіцієнтами степеня $\deg p_k=k$, такий, що для всіх $t\in\mathbb{R}$ має місце оцінка

$$\left\|e^{A_k t}\right\|\le p_k\left(|t|\right). \qquad (11)$$

Таким чином, наш клас C_0-напівгруп належить до множини поліноміально обмежених C_0-напівгруп, що вивчався Х. Звартом, Т. Ейснер, М. Малейкі та іншими.

В підрозділі 3.5 представлено розвиток основної ідеї з *підрозділу 3.4*. А саме, представлено клас генераторів C_0-груп у просторах Банаха $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$ з чисто уявними власними числами, що задовольняють (4), та з повним, мінімальним, але небазисним сімейством власних векторів. З цією метою ми використовуємо симетричні базиси та їх властивості у просторах ℓ_p.

Теорема 3.4. Нехай $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симетричний базис простору ℓ_p, $p>1$, і $k\in\mathbb{N}$. Тоді $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не утворює базис простору $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$ та оператор $A_k:\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)\supset D(A_k)\mapsto\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$, визначений формулою

$$A_k x=A_k\left(f\right)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n=\left(f\right)\sum_{n=1}^{\infty}if(n)c_n\phi_n,$$

де $\left\{f(n)\right\}_{n=1}^{\infty}\in S_k$, з областю визначення

$$D(A_k)=\left\{x=\left(f\right)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n\in\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right):\ \left\{f(n)c_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_p\left(\Delta^k\right)\right\},$$

генерує C_0-групу $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$, дія якої визначається формулою (8).

Теорема 3.5. Нехай A_k – оператор з теореми 3.4. Тоді $\sigma(A_k)=\sigma_p(A_k)=\{if(n)\}_1^\infty$, і, якщо $x=(f)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n\in\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$, то має місце формула для резольвенти (9).

Наслідок 3.3. Для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ задача Коші (2) для оператора A_k з теореми 3.4 є коректною у просторі $\ell_{p,k}\left(\{\phi_n\}\right)$, а її розв'язок дається формулою (8), де $x=x_0$.

Доведення теореми 3.4 суттєво ґрунтується на багаторазовому застосуванні *нерівності Харді* (10) для $p>1.$ Справедливе твердження, аналогічне пункту 2 твердження 3.4.

Твердження 3.5. Нехай $k\in\mathbb{N}$ та $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ – C_0-група з теореми 3.4. Тоді існує поліном p_k з позитивними коефіцієнтами степеня $\deg p_k=k$, такий, що для всіх $t\in\mathbb{R}$ має місце оцінка (11).

Визначимо оператор $A:\ell_{p,1}\left(\{\phi_n\}\right)\supset D(A)\mapsto\ell_{p,1}\left(\{\phi_n\}\right)$ формулою

$$Ax=A(f)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n=(f)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n\phi_n, \tag{12}$$

де $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ – необмежена послідовність в $\mathbb{C}$, з областю визначення

$$D(A)=\left\{x=(f)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n\in\ell_{p,1}\left(\{\phi_n\}\right):\ \{\lambda_n c_n\}_{n=1}^\infty\in\ell_p(\Delta)\right\}. \tag{13}$$

Твердження 3.6. Нехай $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ – симетричний базис ℓ_p, $p\ge1.$ Нехай оператор A визначений формулою (12), з областю визначення (13), де спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty\subset i\mathbb{R}$ задовольняє умовам (4) та $\exists\alpha\in(0,1/p]$: $\liminf\limits_{n\to\infty}n^\alpha|\lambda_n-\lambda_{n-1}|>0.$ Тоді A не генерує C_0-напівгрупу в просторі $\ell_{p,1}\left(\{\phi_n\}\right)$ і задача Коші (1) для оператора A не є коректною у просторі $\ell_{p,1}\left(\{\phi_n\}\right)$.

Розділ 4 присвячений дослідженню стійкості розкладів Шаудера у банахових просторах та розповсюдженню теореми Като на випадок банахових просторів. Паралельно, в контексті результатів *2 розділу*, розглядається питання: *За яких умов деяка біортогональна система у просторі* ℓ_p, $1\le p<\infty$, c_0, *чи у гільбертовому просторі є симетричним базисом?* Результати найбільш загального характеру отримані для просторів послідовностей Орліча та для просторів із розкладами Шаудера-Орліча, що вводяться в роботі.

Означення 4.1. Розклад Шаудера $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^\infty$ з проекторами $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ у банаховому просторі X будемо називати розкладом Шаудера-Орліча, якщо

$$\forall x\in X,\quad \inf\left\{\rho>0:\ \sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{\|P_n x\|}{\rho}\right)\le1\right\}=\|x\|,\ \text{де } \Phi-\text{ функція Орліча.}$$

Поняття розкладу Шаудера-Орліча можна розглядати як природнє узагальнення поняття ортогонального розкладу на випадок банахових просторів.

Теорема 4.1. Нехай X має розклад Шаудера-Орліча $\{\mathrm{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ з проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, де $\dim F_0 < \infty$, та нехай $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Ψ-гільбертовий (∞-гільбертовий) розклад Шаудера в X з константою C та проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, де $P_0 = F_0$. Нехай $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність ненульових проекторів в X, така що $J_n J_m = \delta_n^m J_m$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$. Якщо для всіх $x \in X$ маємо

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| P_n \left(J_n - P_n \right) x \right\| e_n \right\|_* \le \varsigma \|x\|, \text{ де } \varsigma \in \left[0, C^{-1}\right),$$

то $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ та $\{J_n X\}_{n=0}^{\infty}$ – ізоморфні розклади Шаудера в X.

Символом $\|\cdot\|_*$ позначається норма у просторі ℓ_Ψ, якщо $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Ψ-гільбертовий розклад, або норма у c_0, якщо $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ∞-гільбертовий.

В *підрозділі 4.1* вводяться поняття типу, котипу, інфратипу та M-котипу Орліча-Радемахера простору Банаха та вивчаються властивості безумовних розкладів Шаудера в залежності від цих геометричних характеристик. Отримані результати дозволяють *у підрозділі 4.4* вивести з теореми 4.1 теорему про стійкість безумовних розкладів в ℓ_p.

Теорема 4.2. Нехай $\{\mathrm{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – розклад Шаудера-Орліча в ℓ_p, $1 \le p < \infty$, з функцією Орліча $\Phi(t) = t^p$ та проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, де $\dim F_0 < \infty$. Нехай $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безумовний розклад Шаудера в ℓ_p з константою M та проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, де $P_0 = F_0$. Припустимо, що $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність ненульових проекторів в ℓ_p, така що $\dim J_0 = \dim P_0$, $J_n J_m = \delta_n^m J_m$, $n,m \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $\forall x \in \ell_p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| P_n \left(J_n - P_n \right) x \right\|^p \le \varsigma_1^p \|x\|^p, \text{ де } \varsigma_1 \in \left[0, (2M)^{-1}\right), \text{ коли } 1 \le p \le 2, \text{ або}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| P_n \left(J_n - P_n \right) x \right\|^2 \le \varsigma_2^2(p) \|x\|^2, \text{ де } \varsigma_2(p) \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{8}M} \left(\frac{\Gamma\left((p+1)/2\right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{-1/p} \right),$$

Γ – гама-функція Ейлера, коли $2 \le p < \infty$, то $\{J_n \ell_p\}_{n=0}^{\infty}$ – також безумовний розклад Шаудера, ізоморфний $\{\mathrm{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Зазначимо, що в теоремі 4.2 важливу роль відіграють найкращі константи нерівності Хінчина. Використовуючи теореми 4.1 та 4.2, ми виводимо низку результатів щодо стійкості безумовних базисів та розкладів Шаудера, а також симетричних базисів, у просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, c_0, та у гільбертових просторах. Результати щодо стійкості симетричних базисів у просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, формулюються наступним чином.

Твердження 4.1. Нехай $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – симетричний базис ℓ_p, $p \geq 1$, з константою M та біортогональною послідовністю $\{\phi_n^*\}_0^{\infty} \subset \ell_p^*$, такий що для всіх $x \in \ell_p$ маємо $\langle \phi_0^*, x \rangle \phi_0 = F_0 x$, де $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ – проектори розкладу Шаудера-Орліча з функцією Орліча t^p. Припустимо, що $\left(\{\psi_n\}_0^{\infty}, \{\psi_n^*\}_0^{\infty}\right)$ – біортогональна система в ℓ_p, що задовольняє умові $0 < \inf_n \|\psi_n\| \leq \sup_n \|\psi_n\| < \infty$. Якщо $\forall x \in \ell_p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \psi_n^*, x \rangle \langle \phi_n^*, \psi_n \rangle - \langle \phi_n^*, x \rangle \right|^p \|\phi_n\|^p \leq \varsigma_1^p \|x\|^p, \text{ де } \varsigma_1 \in \left[0, \frac{1}{2M}\right), \text{ коли } 1 \leq p \leq 2, \text{ або}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \psi_n^*, x \rangle \langle \phi_n^*, \psi_n \rangle - \langle \phi_n^*, x \rangle \right|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \varsigma_2^2(p) \|x\|^2, \text{ де } \varsigma_2(p) < \frac{M^{-1}}{\sqrt{8}} \left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{-\frac{1}{p}},$$

коли $2 \leq p < \infty$, то $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – також симетричний базис ℓ_p.

Твердження 4.2. Нехай $\left(\{\psi_n\}_1^{\infty}, \{\psi_n^*\}_1^{\infty}\right)$ – біортогональна система в ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, що задовольняє умові $0 < \inf_n \|\psi_n\| \leq \sup_n \|\psi_n\| < \infty$. Якщо $\forall x \in \ell_p$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \langle \psi_n^*, x \rangle \langle e_n^*, \psi_n \rangle - \langle e_n^*, x \rangle \right|^p \leq \varsigma^p \|x\|^p, \text{ де } \varsigma \in [0,1),$$

то $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симетричний базис ℓ_p.

Результати *розділу 4*, у поєднанні з результатами *розділу 2*, застосовуються до питання щодо стійкості еволюційних рівнянь (1) у просторах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, а також у гільбертових просторах.

Твердження 4.3. Нехай A – симетрично-спектральний оператор у просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, або у гільбертовому просторі H, з власними числами $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тоді справедливі наступні твердження:

1. Якщо $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ маємо $\Re(\lambda_n) \leq 0$, то еволюційне рівняння (1) – стійке.
2. Якщо $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ маємо $\Re(\lambda_n) \leq \alpha$, де $\alpha < 0$, то еволюційне рівняння (1) – експоненціально стійке.
3. Якщо $p > 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ маємо $\Re(\lambda_n) < 0$, та $\overline{\{\lambda_n\}_1^{\infty}} \cap i\mathbb{R}$ – не більш ніж зліченна множина, то рівняння (1) – асимптотично стійке.

Твердження 4.1 та 4.2, а також інші результати щодо стійкості симетричних базисів, *можна застосовувати для перевірки того, чи є певний оператор симетрично-спектральним оператором*. Після цього ми можемо застосовувати твердження 4.3. Керуючись цими ідеями, в роботі ми отримуємо результати зі стійкості систем вигляду (1) з операторами A конкретного вигляду в ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, або c_0, що діють на елементи $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ наступним чином,

$$Ae_j = \lambda_j e_j + (f) \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}{(n-1)!} e_n, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

де $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність попарно різних точок комплексної площини.

Твердження 4.4. Нехай (1) – система з оператором A вигляду (14) у просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$, або c_0. Тоді справедливі пункти 1-3 твердження 4.3.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено дослідження якісних властивостей лінійних еволюційних рівнянь у банахових просторах у залежності від спектральних та базисних властивостей відповідних (необмежених) лінійних операторів. Основні результати дисертації полягають у наступному.

1) Отримано результати щодо коректності задач Коші для еволюційних рівнянь вигляду (1) у випадку, коли оператор A має власні числа $\lambda_n = i\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, де $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – необмежена послідовність, що задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0$, і повне, але небазисне сімейство власних векторів. Ці результати суттєвим чином ґрунтуються на застосуванні дискретної нерівності Харді (10). Встановлено, що коректність задач Коші в цьому випадку суттєвим чином залежить від характеру асимптотичної поведінки спектра оператора A на нескінченності.
2) З метою дослідження коректності задач Коші для еволюційних рівнянь (1), де оператор A задовольняє умовам пункту 1, введено спеціальні класи гільбертових просторів $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, та банахових просторів $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$. Отримано результати щодо асимптотичної поведінки розв'язків відповідних коректних еволюційних рівнянь (1).
3) Введено поняття симетрично-спектрального оператора, що узагальнює поняття спектрального за Рісом оператора у гільбертовому просторі, та досліджені його властивості у просторах $\ell_p (1 \le p < \infty)$ та c_0. Встановлені умови коректності та некоректності задач Коші (1) з симетрично-спектральними операторами у цих просторах.
4) Отримано розвиток класичної теореми Т. Като на випадок розкладів Шаудера у просторах послідовностей Орліча та у просторах із розкладами Шаудера-Орліча, що вводяться в роботі. Встановлено властивості безумовних розкладів Шаудера в залежності від геометричних характеристик простору Банаха. Отримано результати щодо стійкості безумовних розкладів та базисів Шаудера у просторах $\ell_p (1 \le p < \infty)$, c_0, а також у гільбертових просторах. Результати застосовано до питання стійкості рівнянь (1).

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Марченко В. А. Симметрически-спектральные операторы в пространствах $\ell_p (1 \le p < \infty)$ и c_0 / В. А. Марченко // Вісник Харківського національного універ-

ситету ім. В.Н. Каразіна, Серія «Математика, прикладна математика і механіка» – 2013. – № 1081. – С. 33 – 44.

2. Marchenko V. A. Stability of unconditional Schauder decompositions in Hilbert spaces / V. A. Marchenko // Visnyk of Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2014. – № 1133. – P. 103 – 113.

3. Marchenko V. Isomorphic Schauder decompositions in certain Banach spaces / V. Marchenko // Central European Journal of Mathematics – 2014. – Vol. 12, № 11. – P. 1714 – 1732.

4. Скляр Г. М. Нерівність Харді та конструкція генератора C_0-групи з власними векторами, що не утворюють базис / Г. М. Скляр, В. А. Марченко // Доповіді НАН України – 2015. – №9. – с. 13 – 17.

5. Marchenko V. Stability of unconditional Schauder decompositions in ℓ_p spaces / V. Marchenko // Bulletin of the Australian Mathematical Society – 2015. – Vol. 92, № 3. – P. 444 – 456.

6. Марченко В. А. К базисности Рисса спектрального семейства генератора C_0-группы в гильбертовом пространстве / В. А. Марченко // IV научная конференция для студентов и аспирантов «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» / Тезисы докладов. – 14-15 мая, 2010. – Харьков, Украина. – С. 16–17.

7. Марченко В. А. Безусловная базисность системы собственных подпространств генератора сильно непрерывной группы / В. А. Марченко // Международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», посвященная 50-летию механико-математического факультета / Тезисы докладов. – 17-22 апреля, 2011. – Харьков, Украина. – С. 163.

8. Марченко В. А. Симетрично-спектральні оператори та їх властивості у просторах ℓ_p / В. А. Марченко // Тези доповідей IX Міжнародної наукової конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях». – Харків, Україна. – 25-26 квітня. – 2014. – С. 14-15.

9. Sklyar G. Hardy inequality and an example of infinitesimal operator with non-Riesz basis family of eigenvectors / G. Sklyar, V. Marchenko // II International Conference Analysis and Mathematical Physics / Book of Abstracts. – June 16-20, 2014. – Kharkiv, Ukraine. – P. 42–43.

10. Марченко В. А. Устойчивость безусловных разложений Шаудера в гильбертовых пространствах / В. А. Марченко // X международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» / Тезисы докладов. – 24-25 апреля, 2015. – Харьков, Украина.– С. 41–42.

11. Marchenko V. Spaces with Schauder-Orlicz decompositions and isomorphic Schauder decompositions / V. Marchenko // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "International Conference of Young Mathematicians". – Київ, Україна. – 3-6 червня. – 2015. – P. 56.

12. Marchenko V. Stability theorem for unconditional Schauder decompositions in ℓ_p spaces / V. Marchenko // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "III International Conference Analysis and Mathematical Physics". – Харків, Україна. – 15-19 червня. – 2015. – P. 29-30.
13. Marchenko V. One special construction in the spectral theory of C_0-semigroups / V. Marchenko // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "International Conference Dynamical Systems and Their Applications ". – Київ, Україна. – 22-26 червня. – 2015. – P. 38.
14. Sklyar G. Generators of linearly growing C_0-groups with simple purely imaginary eigenvalues / G. Sklyar, V. Marchenko // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "International V. Skorobohatko Mathematical Conference". – Дрогобич, Україна. – 25-28 серпня. – 2015. – P. 154.
15. Sklyar G. M. Hardy inequality and the construction of infinitesimal operators with non-basis family of eigenvectors, / G. M. Sklyar, V. Marchenko – Preprint arXiv.org, Cornell University Library, 3 Nov 2014. – 27 p. – (Availiable at http://arxiv.org/abs/1405.2731).

АНОТАЦІЯ

Марченко В.А. Про спектральні базисні властивості операторів еволюційних рівнянь. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню якісних властивостей лінійних еволюційних рівнянь у банахових просторах в залежності від спектральних властивостей відповідних операторів A. Розглянуто випадок, коли оператор A має власні числа $\lambda_n = i\mu_n,\ n \in \mathbb{N},$ де послідовність $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ задовольняє умовам $\lim_{n\to\infty}\mu_n = +\infty,$ $\lim_{n\to\infty}|\mu_n - \mu_{n-1}| = 0,$ і повне, але небазисне сімейство власних векторів. Отримано результати щодо коректності та некоректності задач Коші в залежності від поведінки спектру A на нескінченності. Результати ґрунтуються на застосуванні дискретної нерівності Харді.

В дисертації досліджено коректність задач Коші для еволюційних рівнянь певного класу в $\ell_p\left(1 \le p < \infty\right)$ та c_0. Отримано розвиток теореми Т. Като на випадок розкладів Шаудера у просторах послідовностей Орліча та у просторах із розкладами Шаудера-Орліча, що вводяться в роботі. Отримано результати щодо стійкості безумовних розкладів Шаудера, безумовних і симетричних базисів в $\ell_p\left(1 \le p < \infty\right),$ c_0 та в просторах Гільберта. Результати застосовано до питання стійкості рівнянь у цих просторах.

Ключові слова: еволюційне рівняння, C_0-напівгрупа, коректність, генератор, базис Ріса, спектр, стійкість, розклад Шаудера, симетричний базис, власні вектори.

АННОТАЦИЯ

Марченко В.А. О спектральных базисных свойствах операторов эволюционных уравнений . – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 2016.

Диссертация посвящена исследованию качественных свойств линейных эволюционных уравнений в банаховых пространствах в зависимости от спектральных свойств операторов A. Рассмотрен случай, когда A имеет собственные числа $\lambda_n = i\mu_n,\ n \in \mathbb{N},$ где последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0,$ и полное, но небазисное семейство собственных векторов. Получены результаты о корректности и некорректности задач Коши в зависимости от поведения спектра A на бесконечности. Результаты основаны на применении дискретного неравенства Харди.

В диссертации получены условия корректности задач Коши для эволюционных уравнений некоторого класса в $\ell_p(1 \le p < \infty)$ и c_0. Получено развитие теоремы Т. Като на случай разложений Шаудера в пространствах последовательностей Орлича и в пространствах с разложениями Шаудера-Орлича, которые вводятся в работе. Получены результаты об устойчивости безусловных разложений Шаудера, безусловных и симметричных базисов в пространствах $\ell_p(1 \le p < \infty)$, c_0, и в пространствах Гильберта. Результаты применены к вопросу об устойчивости уравнений в этих пространствах.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, C_0-полугруппа, корректность, генератор, базис Рисса, спектр, устойчивость, разложение Шаудера, симметричный базис, собственные векторы.

ABSTRACT

Marchenko V.A. On spectral basis properties of operators of evolution equations. – Manuscript.

PhD thesis for the degree of candidate in physical and mathematical sciences, specialty 01.01.02 – differential equations. – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2016.

The thesis is devoted to the study of qualitative properties of linear evolution equations on Banach spaces, depending on the spectral properties of the corresponding (unbounded) operators A.

We consider the case when the operator A has eigenvalues $\lambda_n = i\mu_n,\ n \in \mathbb{N},$ where $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ is an unbounded sequence satisfying $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_{n-1}| = 0,$ and complete family of eigenvectors not forming a Schauder basis. The results on the well/ill-posedness of Cauchy problems depending on the character of asymptotic behavior of the

spectrum of A at infinity, as well as the results concerning explicit form of solutions of corresponding well-posed evolution equations and their asymptotic behavior, were obtained. For these purposes we introduce special classes of Hilbert spaces $H_k\left(\{e_n\}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, and Banach spaces $\ell_{p,k}\left(\{e_n\}\right)$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, consider special classes of real sequences

$$S_k = \left\{ \{f(n)\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty;\ \left\{ n^j \Delta^j f(n) \right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty},\ 1 \leq j \leq k \right\},$$

and apply discrete Hardy inequality. Space $H_k\left(\{e_n\}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, is constructed on the basis of initial separable Hilbert space H and arbitrarily chosen Riesz basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ of H. Space $\ell_{p,k}\left(\{e_n\}\right)$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, is constructed on the basis of initial $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$ space and arbitrarily chosen symmetric basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ of ℓ_p.

We introduce the notion of the symmetrically-spectral operator, which relies on the notion of symmetric basis and generalizes the notion of the Riesz-spectral operator to the case of Banach spaces, and study the properties of symmetrically-spectral operators in $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$ and c_0 spaces. We obtain results concerning the well/ill-posedness of Cauchy problems for such operators in these spaces. Also we obtain an estimate from the above for the norm of the corresponding C_0-semigroup. Thereby we extend the results obtained by R. Curtain in 1984 to the case of Banach spaces $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$ and c_0.

We extend the theorem of T. Kato concerning the similarity for sequences of projections in a Hilbert space to the case of ℓ_{Ψ}-Hilbertian (∞-Hilbertian) Schauder decompositions in Orlicz sequence spaces and spaces with Schauder decompositions, which have generalized property of orthogonality (in our work they are called by Schauder-Orlicz decompositions). We obtain stability results for unconditional Schauder decompositions, unconditional and symmetric bases in $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$, c_0 spaces, and in Hilbert spaces. The results obtained for the case of $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$ spaces are based on the use of the best constants in the Khintchine inequality. These results are applied to the question of stability of evolution equations in $\ell_p\left(1 \leq p < \infty\right)$, c_0 spaces, and in Hilbert spaces.

Keywords: evolution equation, C_0-semigroup, well-posedness, generator, Riesz basis, spectrum, stability, Schauder decomposition, symmetric basis, eigenvectors.