Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

НГУЄН ВАН КУІНЬ

УДК 517.574

ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ СУБГАРМОНІЧНИХ ТА ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Харківському національному університеті імені В.Н.Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Наукові керівники:

доктор фізико-математичних наук, професор
Гришин Анатолій Пилипович ,
доктор фізико-математичних наук, професор
Фаворов Сергій Юрійович,
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, завідувач кафедри теорії функцій і функціонального аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Малютін Костянтин Геннадійович,
Сумський державний університет
Міністерства освіти і науки України,
професор кафедри прикладної та обчислювальної математики;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Севостьянов Євген Олександрович,
Житомирський державний університет імені І. Франка,
професор кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться “23” жовтня 2015 р. о 15-15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна за адресою: м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-52.

З дисертацією можна ознайомитись у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий “22” 09. 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Ігнатович С. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним з найважливіших розділів класичного аналізу є теорія субгармонічних функцій і, більш загально, теорія потенціалу в скінченновимірному просторі. Почалася ця теорія з основоположних робіт Ф. Гартогса (1906) і Ф. Рісса (1926). Вона тісно пов'язана з завданнями математичної фізики з одного боку, і теорією аналітичних функцій з іншого. Ми не маємо можливості перераховувати прізвища всіх математиків, які працювали в цій області, відзначимо лише тих, чиї роботи тісно пов'язані з тематикою нашої дисертації: М. Цудзі, Н. С. Ландкоф, У. Хейман, В. С. Азарін, А. П. Гришин, М. Л. Содін, О. Е. Єрьоменко.

Особливо відзначимо тут створену В. С. Азаріним теорію граничних множин субгармонічних функцій. Ця теорія дозволяє звести вивчення асимптотичних властивостей функцій до вивчення локальних властивостей субгармонічних функцій. На цьому шляху В. С. Азаріну і його послідовникам А. П. Гришину, М. С. Содіну, О. Е. Єрьоменко вдалося істотно спростити теорію цілих функцій цілком регулярного зростання, створену раніше в роботах Б. Я. Левіна та А. Пфлюгера, а також вирішити ряд як давно поставлених, так і нових задач теорії цілих і мероморфних функцій.

Відзначимо, що більшість конструкцій в цій теорії спирається на збіжність тих чи інших мір і їх потенціалів у сенсі теорії узагальнених функцій.

Відзначимо також, що подальший розвиток теорії граничних множин вимагав вивчення властивостей так званих δ-субгармонічних функцій (різниць субгармонічних функцій).

Таким чином, дослідження, що проводяться в даній дисертації, є актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрах математичного аналізу та теорії функцій і функціонального аналізу механіко-математичного факультету Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт з тем “Комплексний аналіз в теорії операторів, теорії інтегралів Фур'є та геометрії” (номер державної реєстрації 0111U010366) та “Розробка теоретико-функціональних методів та застосування в теорії операторів та математичній статистиці” (номер державної реєстрації 0115U000481).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження зв'язку збіжності послідовності δ-субгармонічних функцій в сенсі теорії узагальнених функцій з іншими видами збіжності, отримання нових результатів в теорії граничних множин для δ-субгармонічних функцій і мір Радона, а також отримання розв'язку для питання про існування цілої функції нульового уточненого порядку.

Об'єкт дослідження − цілі функції, субгармонічні функції, δ-субгармонічні функції та їх асоційовані міри.

Предметом дослідження є властивості δ-субгармонічних функцій, їх зв'язок з властивостями асоційованих мір, збіжність δ-субгармонічних функцій у різних метриках.

Задачі дослідження. Основні задачі дослідження полягали в наступному:

1. Довести існування цілої функції заданого нульового уточненого порядку.
2. Отримати умови, за яких із збіжності послідовності $v_n(x)$ як послідовності узагальнених функцій випливає її збіжність у просторах Лебега $L_p(\gamma)$.
3. Отримати аналоги теорем Азаріна про представлення для δ-субгармонічних функцій.
4. Побудувати граничні множини для δ-субгармонічних функцій і радонових мір, дослідити їх властивості, узагальнити результати Азаріна на випадок δ-субгармонічних функцій та їх асоційованих мір.

Методами дослідження є методи математичного аналізу, в тому числі методи теорії міри і потенціалу, методи функціонального аналізу, а також деякі елементи теорії динамічних систем.

Наукова новизна одержаних результатів.

У роботі вперше:

1. Повністю вирішено питання про існування цілої функції заданого нульового уточненого порядку.
2. Отримано достатні умови на міру γ з носієм, компактно вкладеним в $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, при яких із збіжності послідовності v_n як послідовності узагальнених функцій випливає її збіжність у просторах $L_p(\gamma)$.
3. Знайдено нові представлення δ-субгармонічних функцій у формі типу Брело.
4. Побудовано граничні множини для класу δ-субгармонічних функцій і радонових мір, доведені три критерії того, щоб задана множина була граничною множиною деякої радонової міри.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в роботі, носять теоретичний характер. Вони знаходять застосування при вивченні теорії цілком регулярного зростання цілих і мероморфних функцій в сенсі Левіна-Пфлюгера, можуть бути використані як в теорії функцій комплексного змінного, так і в інших розділах математики, де використовуються цілі, субгармонічні і δ-субгармонічні функції.

Особистий внесок здобувача. У спільних з науковим керівником статтях [2], [3], [5] А. П. Гришину належать постановки задач та обговорення результатів. Крім того, І. В. Поєдинцевій належить ідея доведення Теореми 11 в роботі [3]. Решта результатів отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації були представлені та обговорювались на наступних міжнародних наукових конференціях та семінарах:

1. Міжнародна школа-конференція "Тараповські читання – 2013", присвячена 150-річчю кафедри теоретичної та прикладної механіки. Харків, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р.
2. II International Conference "Analysis and Mathematical Physics". Kharkiv, June 16 − 20, 2014.
3. X міжнародна конференція для молодих вчених "Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях". Харків, 24 −25 квітня 2015 р.
4. Міський семінар з теорії функцій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (керівник семінару проф. С. Ю. Фаворов).
5. Семінар з аналізу Сумського державного університету (керівник семінару проф. К. Г. Малютін).

Публікації. Результати дисертації опубліковано в 8 наукових працях, зокрема – в 5 статтях у фахових наукових виданнях [1]-[5] та в 3 тезах доповідей на наукових міжнародних конференціях [6]-[8].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 38 найменувань і займає 5 сторінок. Загальний обсяг дисертації становить 149 сторінок. Основні результати, які винесено на захист, викладено в розділах 2, 3.

Автор вдячний своїм науковим керівникам професорам Гришину Анатолію Пилиповичу і Фаворову Сергію Юрійовичу за увагу і підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, визначено мету і задачі дослідження, вказано на наукову новизну та практичне значення роботи.

У **розділі 1** наведено відомі результати, що мають відношення до дисертаційної работи.

У **розділі 2** вивчаються граничні множини для радонових мір.

Почнемо з необхідних визначень:

Абсолютно неперервна функція $\rho(r)$ на півосі $(0,\infty)$ називається уточненим порядком в сенсі Валірона, якщо виконуються дві умови:

1. існує границя $\rho = \rho(\infty) = \lim_{r\to\infty} \rho(r)$,
2. $\lim_{r\to\infty} r \ln r\, \rho'(r) = 0$.

У загальному випадку вважається, що уточнений порядок $\rho(r)$ задовольняє додатковій умові $\rho = \rho(\infty) > 0$. Надалі ця умова додатково не обмовляється.

Простір радонових мір $\mathcal{M}(G), G \subset \mathbb{R}^m,\ m \geq 2$ визначається як простір неперервних лінійних функціоналів на просторі $\Phi(G)$ усіх неперервних фінітних функцій в G.

Через $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$ позначається множина тих радонових мір μ з $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, для яких виконується нерівність: $|\mu|\big(B(0,r)\big) \leq \sigma r^\rho, r \in (0,\infty)$.

Радонова міра μ називається мірою не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$, якщо

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{|\mu|(B(0,r))}{V(r)} = \sigma < \infty,$$

де $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Ми будемо використовувати в просторі $\mathcal{M}(G)$ наступні відомі метрики. Нехай $\{\varphi_n, n = 1,2,\dots\}$ − зліченна всюди щільна множина в просторі $\Phi\,(G)$. Це означає, що для будь-якої функції $\varphi \in \Phi\,(G)$ існує підпослідовність φ_{n_k} послідовності φ_n така, що $\varphi_{n_k} \to \varphi$ в просторі $\Phi\,(G)$. Далі по послідовності φ_n визначаємо функцію

$$d(\mu_1,\mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\mu_1 - \mu_2, \varphi_n)|}{2^n(1 + |\mu_1 - \mu_2, \varphi_n|)},$$

де $\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{M}(G)$.

Нехай $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m),\ \rho(r)$ − уточнений порядок. Позначимо через $\mu_t\ \ (t > 0)$ наступну міру

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}.$$

Ми будемо також писати $\mu_t = F_t\,\mu$. Відображення $F_t: \mu \to \mu_t$ ми будемо називати відображенням Азаріна (породженим уточненим порядком $\rho(r)$).

Множина $\{\mu_t:\ t > 0\}$ називається траєкторією міри μ.

Множина $\{\mu_t:\ t \geq 1\}$ називається додатною напівтраєкторією міри μ.

Множину мір вигляду $\nu = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}$, де послідовність $t_n \to \infty$, а границя береться в наступному: для будь-якої функції $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^m)$ виконується співвідношення $(\mu_{t_n}, \varphi) \to (\nu, \varphi)$, $(n \to \infty)$, ми будемо називати граничною множиною Азаріна міри μ відносно уточненого порядку $\rho(r)$ і позначати $Fr[\mu]$ або якщо потрібно $Fr[\mu, \rho(r)]$.

Будемо говорити, що радонова міра μ є регулярною (у розумінні Азаріна), якщо множина $Fr[\mu]$ складається з одного елемента.

Нехай μ – радонова міра в $\mathbb{R}^m$. Говорять, що міра μ має конусну (кутову) щільність γ відносно уточненого порядку $\rho\ (r)$, якщо для будь-якої борелівської множини $E \subset S\ (0,1)$, для якої $\gamma(\partial E) = 0$, де $S(0,1)$ – одинична сфера, виконується рівність

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu(K(r,E))}{V(r)} = \gamma(E),$$

де $K(r,E) = \left\{x \in \mathbb{R}^m: \|x\| \leq r, \frac{x}{\|x\|} \in E\right\}$.

Динамічна система в метричному просторі X визначається як однопараметрична система відображень $\Phi_t,\ t \in (0,\infty)$, $\Phi_t\colon X \to X$, що має властивості:

1) якщо $t \to t_0,\ x \to x_0$, то $\Phi_t x \to \Phi_{t_0} x_0$ (умова неперервності по сукупності змінних);

2) $\Phi_1 x = x$ для будь-якого $x \in X$ (початкова умова);

3) $\Phi_{t_1 t_2}\, x = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1} x)$ (групова умова).

У **підрозділі 2.1** наводяться доведені нами теореми про граничні множини мір Радона. Серед основних результатів підрозділу 2.1 виділимо наступні.

Теорема 2.1. *Нехай μ – радонова міра в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, що має тип σ відносно уточненого порядку $\rho\ (r)$. Нехай міра μ_t побудована за допомогою уточненого порядку $\rho\ (r)$. Тоді справедливі наступні твердження.*

1) $Fr\ [\mu]$ – непустий компакт у просторі $\mathcal{M}\ (\mathbb{R}^m)$;

2) $Fr\ [\mu]$ – зв'язана множина в метричному просторі $(\mathcal{M}\ (\mathbb{R}^m), d)$;

3) Функція F_t $\left((F_t\mu)(E) = \frac{\mu(tE)}{t^\rho}\right)$, *для будь-якого* $t > 0$ *взаємно-однозначно відображає множину* $Fr\,[\mu]$ *на себе;*

4) Для будь-якої міри $\nu \in Fr\,[\mu]$ *і будь-якого* $r > 0$ *виконується нерівність* $|\nu|\big(B\,(0,r)\big) \leq \sigma r^\rho$.

Теорема 2.2. *Нехай* $\mu -$ *радонова міра в* $\mathbb{R}^m$, *що має не вище ніж нормальний тип відносно уточненого порядку* $\rho\,(r)$. *Нехай міра* μ *має конусну (кутову) щільність* γ *відносно уточненого порядку* $\rho\,(r)$. *Тоді виконується рівність*

$$Fr[\mu, \rho(r)] = \{\nu\}, \qquad \nu = dr^\rho \times \gamma.$$

Теорема 2.3. *Нехай* $\mu -$ *радонова міра в* $\mathbb{R}^m$, *що має не вище ніж нормальний тип відносно уточненого порядку* $\rho\,(r)$. Нехай $Fr[\mu, \rho(r)] = \{\nu\}$. Тоді $\nu = dr^\rho \times \gamma$, де γ − борелевска міра на сфері (колі) $S\,(0,1)$, визначена формулою $\gamma(E) = \nu\,\big(K\,(1, E)\big)$.

Підрозділ 2.2. присвячений відстані Хаусдорфа, яка визначається таким чином:

Нехай (X, h) − метричний простір, M_1, M_2 − підмножини X. Введемо наступні величини

$$\delta_1 = \sup_{x \in M_1} h(x, M_2),\ \delta_2 = \sup_{x \in M_2} h(x, M_1), H(M_1, M_2) = \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Величина $H(M_1, M_2)$ називається відстанню Хаусдорфа між множинами M_1 і M_2. На множині компактів в X відстань Хаусдорфа є метрикою.

Твердження 2.3. *Нехай* (X, h) − *метричний компакт. Для того, щоб послідовність компактів* $M_k \subset X$ *збігалася в метриці Хаусдорфа до компакту* $M \subset X$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:*

1) якщо x_k *така послідовність точок, що* $x_k \in M_{n_k}$, $n_k \to \infty$ *і така, що* $x = lim_{k\to\infty} x_k$, *то* $x \in M$ *;*

2) якщо $x \in M$, *то існує послідовність точок* $x_n \in M_n$ *така, що* $x = lim_{n\to\infty} x_n$.

В **підрозділі 2.3** розглядаються властивості граничних множин у просторі з метрикою, яка визначається відстанню Хаусдорфа.

Сформулюємо основні результати підрозділу 2.3.

Теорема 2.4. *Нехай* $\mu -$ *радонова міра в* $\mathbb{R}^m$, *що має тип* $\sigma < \infty$ *відносно уточненого порядку* $\rho\,(r)$. *Нехай* $Fr[\mu, \rho(r)]$ − *її гранична множина. Тоді існують число* $\sigma_1 > 0$ *і послідовність періодичних мір* μ_n *порядку* ρ *такі, що виконуються умови:*

1) $\mu_n \in \mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$,

2) $Fr[\mu, \rho(r)] = H\, lim_{n\to\infty} Fr[\mu_n, \rho(r)]$.

Наступну теорему можна розглядати як обернення попередньої теореми.

Теорема 2.5. *Нехай* μ_n − *послідовність періодичних порядку* ρ *дійсних радонових мір в просторі* $\mathcal{M}\,(\mathbb{R}^m)$ *з класу* $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$ *і нехай послідовність* $Fr[\mu_n,\rho(r)]$ *збігається в метриці Хаусдорфа до компакту* M. *Тоді для будь-якого уточненого порядку* $\rho\,(r)$ *такого, що* $\rho\,(\infty)=\rho$, *існує радонова міра* μ *не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку* $\rho\,(r)$ *така, що* $Fr[\mu,\rho(r)]=M$.

В **підрозділі 2.4** використовуються наступні означення.

Нехай $\Phi_t,\ t\in(0,\infty)$ – динамічна система в метричному просторі (X,d). Послідовність $p_0=p,\ p_1,\dots,\ p_k=q$ точок з X називається (ω,ε)-ланцюгом, що з'єднує точки p і q, якщо існує послідовність $t_l,\ l\in\overline{0,k-1}$, така, що $t_l\geq\omega$ і $d\,(\Phi_{t_l}\,p_l,p_{l+1})\ <\varepsilon$.

Динамічна система Φ_t в метричному просторі (X,d) називається ланцюговою рекурентністю, якщо для будь-яких точок p і q з X і для будь-яких $\omega>0$ і $\varepsilon>0$ існує (ω,ε)-ланцюг, що з'єднує точки р і q.

Основним результатом підрозділу 2.4 є наступна теорема.

Теорема 2.6. *Нехай* $\rho(r)$ − *довільний уточнений порядок. Нехай* M − *компакт у просторі* $\mathcal{M}\,(\mathbb{R}^m)$, *інваріантний відносно перетворення* F_t *і такий, що належить множині* $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$. *Нехай динамічна система* F_t *на метричному просторі* (M,d) *є ланцюговою рекурентністю. Тоді існує радонова міра* $\mu\in\mathcal{M}\,(\mathbb{R}^m)$, *що є мірою не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку* $\rho(r)$ *така, що* $Fr[\mu\,,\rho(r)]\ =\ M$.

В **підрозділі 2.5** використовуються наступні означення.

Нехай (X,h) – метричний простір. Відображення $\lambda(t)\colon(0,\infty)\to X$ (не обов'язково неперервне) ми будемо називати кривою в метричному просторі X.

Крива $\lambda(t)$ називається всюди щільною на нескінченності в просторі X, якщо для будь-якої точки $x\in X$ існує послідовність $t_n\to\infty$ така, що $x\ =\ \lim_{n\to\infty}\lambda(t_n)$.

Відображення $\lambda(t)$ будемо називати кусково неперервним, якщо множина точок розриву цього відображення не має скінченних граничних точок.

Нехай Φ_t – динамічна система на метричному просторі (X,h). Крива $\lambda(t)$ називається псевдотраєкторією, якщо для будь-якого $\tau>0$ виконується рівність

$$\lim_{t\to\infty}h\big(\Phi_\mathrm{t}\lambda(t),\lambda(t\tau)\big)=0,$$

і ця границя рівномірна на будь-якому сегменті $[a,b]\subset(0,\infty)$.

Основними результатами підрозділу 2.5 є наступні теореми.

Теорема 2.7. *Нехай $\rho(r)$ − уточнений порядок. Нехай μ − радонова міра в просторі $\mathbb{R}^m$ не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$, нехай $M = Fr[\mu, \rho(r)]$. Тоді система F_t, $t \in (0, \infty)$ є динамічною системою в метричному просторі (M, d) і в цьому просторі є кусково неперервна псевдотраєкторія, всюди щільна на нескінченності в множині M.*

Теорема 2.8. *Нехай $\rho(r)$ − уточнений порядок. Нехай μ − радонова міра в просторі $\mathbb{R}^m$ не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$, нехай $M = Fr[\mu, \rho(r)]$. Тоді динамічна система F_t, $t \in (0, \infty)$ на метричному просторі (M, d) є ланцюговою рекурентністю.*

Теорема 2.9. *Нехай M − компакт, що лежить в метричному просторі $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$, інваріантний відносно перетворення F_t і такий, що належить множині $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$ з деяким $\sigma > 0$. Нехай на множині M існує кусково неперервна псевдотраєкторія $\lambda(t)$, щільна на нескінченності в множині M. Тоді динамічна система F_t, $t \in (0, \infty)$ на метричному просторі (M, d) є ланцюговою рекурентністю.*

На закінчення розділу 2 формулюються три критерії того, що множина M з простору $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ представлялється у вигляді $M = Fr\,[\mu, \rho(r)]$.

Теорема 2.10. *Нехай $\rho(r)$ − уточнений порядок. Нехай M – компакт, що лежить в метричному просторі $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$, інваріантний відносно перетворення F_t і такий, що належить множині $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$ з деяким $\sigma > 0$. Для того, щоб існувала радонова міра μ в просторі $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, що є мірою не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$ і така, що $M = Fr\,[\mu, \rho(r)]$, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність періодичних мір μ_n порядку ρ з множини $\mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$ з деяким σ_1 така, що в метриці Хаусдорфа H виконується рівність*

$$Fr[\mu, \rho(r)] = H \lim_{n\to\infty} Fr[\mu_n, \rho(r)].$$

Теорема 2.11. *Нехай функція $\rho(r)$ і множина M задовольняють умови попередньої теореми. Для того, щоб існувала радонова міра μ в просторі $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, що є мірою не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$ і така, що $M = Fr\,[\mu, \rho(r)]$, необхідно і достатньо, щоб динамічна система F_t, $t \in (0, \infty)$ на метричному просторі (M, d) була ланцюговою рекурентністю.*

Теорема 2.12. *Нехай функція $\rho(r)$ і множина M задовольняють умови теореми 4.10. Для того, щоб існувала радонова міра μ в просторі $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, що є мірою не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$ і така, що $M = Fr\,[\mu, \rho(r)]$, необхідно і до-*

статньо, щоб в множині M існувала кусково неперервна псевдо-траєкторія $\lambda(t)$, щільна на нескінченності в множині M.

В **розділі 3** вивчаються деякі властивості δ-субгармонічних функцій.

В **підрозділі 3.1** розглядаються деякі властивості ядра $h_m(x-y)=\|x-y\|^{2-m}, m>2$.

Твердження 3.1. Нехай $a(x)$ – неперервна фінітна функція в $\mathbb{R}^m$ і нехай

$$b(y)=\int a(x)h_m(x-y)dx.$$

Тоді $b(y)$ – неперервна функція в $\mathbb{R}^m$.

Твердження 3.2. *Нехай $p\geq 1$ – довільне фіксоване число. Нехай γ – додатна скінченна борелівська міра така, що*

$$\sup\left\{\int_{B(y,\delta)}|h_m(x-y)|^p d\gamma(x): y\in\mathbb{R}^m\right\}\to 0\ \ (\delta\to o).$$

Тоді функція $F(y)=\left(\int\|x-y\|^{p(2-m)}\,d\gamma(x)\right)^{1/p}$ є рівномірно неперервною.

В **підрозділі 3.2** обговорюється означення δ-субгармонічної функції і вивчається питання про зв'язок збіжності послідовності δ-субгармонічних функцій в сенсі теорії узагальнених функцій з іншими видами збіжності.

Функція w в області $G\subset\mathbb{R}^m, m\geq 2$ називається δ-субгармонічною, якщо виконуються наступні три умови.

1. Існує множина F ємності нуль така, що на множині $G\setminus F$ справджується представлення

$$\mathrm{w}(x)=v_1(x)-v_2(x),$$

де $v_1(x)$ і $v_2(x)$ – субгармонічні функції в області G.

За допомогою цього представлення визначається рісівська міра μ функції w за формулою $\mu=\mu_1-\mu_2$, де μ_1 і μ_2 – рісівські міри функцій v_1 і v_2.

Визначальна множина H функції w – це множина таких точок $x\in G$, для яких знайдеться $\delta>0$ таке, що виконується нерівність

$$\int_0^\delta\frac{|\mu|(B(0,t))}{t^{m-1}}dt<\infty.$$

2. Для будь-якої точки $x\in H$ виконується рівність

$$\mathrm{w}(x) = \lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\sigma_{m-1}\delta^{m-1}} \int\limits_{S(0,\delta)} \mathrm{w}(x+y)d\sigma_{m-1}(y).$$

де σ_{m-1} – площа одиничної сфери в просторі $\mathbb{R}^m$, $d\sigma_{m-1}$– це міра Лебега на сфері.

3. $\mathrm{w}(x) = 0$ для $x \in G \setminus H$.

Збіжність послідовності $v_n(x)$ до $v(x)$ в просторі $L_p(\gamma)$ означає наступне

$$\int |v_n(x) - v(x)|^p d\gamma(x) \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Теорема 3.1. *Нехай $v_n(x)$ – послідовність субгармонічних функцій в області $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, яка збігається як послідовність узагальнених функцій до узагальненої функції* w. *Тоді*

1) *узагальнена функція* w *є регулярною узагальненою функцією, яка представляється субгармонічною функцією* w (x) *в області G;*

2) *якщо μ_n, μ – рісівські міри функцій v_n,* w, *то* $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ *(збіжність в сенсі теорії узагальнених функцій)*

3) *якщо β – фінітна борелівська міра в G така, що функція $b(y) = \int h_m(x-y)d\beta(x)$ неперервна, а функція $\int h_m(x-y)d|\beta|(x)$ локально обмежена, то*
$$\lim_{n\to\infty} \int v_n(x)d\beta(x) = \int \mathrm{w}(x)d\beta(x).$$

4) *нехай $p \geq 1$, якщо γ – додатна скінченна фінітна борелівська міра в G така, що функція $F(y) = \left(\int \|x-y\|^{p(2-m)}\, d\gamma(x)\right)^{1/p}$ є рівномірно неперервною, то*
$$\int |v_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p d\gamma(x) \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Твердження 1) і 2) були відомі раніше, а тут вони наводяться з міркувань зручності і у зв'язку з наступним узагальненням на випадок δ-субгармонічних функцій.

Теорема 3.2. *Нехай $v_n(x)$ – послідовність δ-субгармонічних функцій в області $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, яка збігається як послідовність узагальнених функцій до узагальненої функції* w, *причому послідовність рісівськіх мір μ_n функцій v_n слабо обмежена. Тоді*

1) *узагальнена функція* w *є регулярною узагальненою функцією, яка представляється δ -субгармонічною функцією* w (x) *в області G;*

2) *якщо* μ *– рісівська міра функції* w, *то* $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ *(збіжність в сенсі теорії узагальнених функцій)*

3) *якщо* β *– фінітна борелівська міра в* G *така, що функція* $b(y) = \int h_m(x-y)d\beta(x)$ *неперервна, а функція* $\int h_m(x-y)d|\beta|(x)$ *локально обмежена, то*
$$\lim_{n\to\infty} \int v_n(x)d\beta(x) = \int \mathrm{w}(x)d\beta(x).$$

4) *нехай* $p \geq 1$, *якщо* γ *– додатна скінченна фінітна борелівська міра в* G *така, що функція* $F(y) = \left(\int \|x-y\|^{p(2-m)}\, d\gamma(x)\right)^{1/p}$ *є рівномірно неперервною, то*
$$\int |v_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p d\gamma(x) \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

З теорем 3.1 та 3.2 випливають наступні наслідки.

Наслідок 3.1. *Нехай послідовність* $v_n(x)$ δ*-субгармонічних функцій в області* $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, *збігається як послідовність узагальнених функцій до узагальненої функції* w. *Нехай послідовність* μ_n *рісівських мір функцій* v_n *слабо обмежена. Тоді для будь-якої області* G_1, *компактно вкладеної в* G, *і будь-якого* $p \in \left[1, \frac{m}{m-2}\right)$ *виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G_1} |v_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p dx = 0.$$

Наслідок 3.2. *Нехай послідовність* $v_n(x)$ δ*-субгармонічних функцій в області* $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, *збігається як послідовність узагальнених функцій до узагальненої функції* w. *Нехай послідовність* μ_n *рісівських мір функцій* v_n *слабо обмежена. Тоді, якщо сфера* $S(x_0, r)$ *лежить в області* G *і* $p \in \left[1, \frac{m-1}{m-2}\right)$, *то виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S(x_0,r)} |v_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p ds = 0.$$

Наслідок 3.3. *Нехай послідовність* $v_n(x)$ δ*-субгармонічних функцій в області* $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, *збігається як послідовність узагальнених функцій до узагальненої функції* w. *Нехай послідовність* μ_n *рісівських мір функцій* v_n *слабо обмежена. Тоді, якщо* σ *– компакт, що лежить в*

$(m-1)$ *-мірній площині і міститься в* G, *і* $p \in \left[1, \frac{m-1}{m-2}\right)$, *то виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma} |v_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p ds = 0.$$

В **підрозділі 3.3** пропонується посилення варіанта Азаріна теореми про представлення δ-субгармонічних функцій.

Використовуються наступні означення:

Через $\delta\, S^{(0)}$ позначається клас δ-субгармонічних в $\mathbb{C}$ функцій $\mathrm{w}(z)$ таких, що нуль входить у визначальну множину функції w і виконується рівність $\mathrm{w}(0) = 0$.

Нехай w $\in \delta\, S^{(0)}$, $\mu-$ рісівська міра функції w. Функція $T(r,\mathrm{w}) = m(r,\infty,\mathrm{w}) + N(r,\infty,\mathrm{w})$, де

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}_+\left(re^{i\varphi}\right)d\varphi, \qquad N(r,\infty,\mathrm{w}) = \int_0^r \frac{\mu_-(B(0,t))}{t}dt.$$

називається неванліннівською характеристикою δ-субгармонічної функції w.

Величина

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r,\mathrm{w})}{\ln r}$$

називається порядком функції $T(r,\mathrm{w})$, а також порядком δ-субгармонічної функції w.

Якщо w $-$ довільна δ-субгармонічна функція в $\mathbb{C}$ з рісівською мірою μ, то утворюється функція

$$\mathrm{w}_1(z) = \int_{B(0,1)} \ln|z-\zeta|d\mu(\zeta) + c, \qquad \mathrm{w}_2(z) = \mathrm{w}(z) - \mathrm{w}_1(z),$$

де число c вибирається з умови $\mathrm{w}_2(0) = 0$. Функція w_2 належить класу $\delta\, S^{(0)}$. Порядок функції w називається порядком функції w_2.

Основним результатом підрозділу 3.3 є теореми про представлення δ-субгармонічних функцій у формі типу Брело.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mathrm{w}(z)$ $-$ δ*-субгармонічна функція порядку* ρ *в площині* $\mathbb{C}$ *із класу* $\delta\, S^{(0)}$, μ $-$ *її рісівська міра,* $p = [\rho]$. *Тоді справеджується представлення*

$$\mathrm{w}(z) = \int Re\left(\ln\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+\cdots+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta)+\sum_{n=0}^{p} Re\, c_n z^n,$$

причому мають місце формули

$$c_n = \lim_{R\to\infty} Re\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}(\mathrm{R}e^{i\varphi})e^{-in\varphi}\,d\varphi + \frac{1}{n}\int_{B(0,R)}\left(\frac{\bar{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right).$$

Теорема 3.4. *Нехай* $\mathrm{w}(z)$ *–* δ*-субгармонічна функція порядку* ρ *в площині* $\mathbb{C}$*,* μ *– її рісівська міра,* $p=[\rho]$*. Тоді справджується представлення*

$$\mathrm{w}(z) = \int_{B(0,1)} \ln|z-\zeta|\,d\mu(\zeta)$$

$$+\int_{CB(0,1)} Re\left(\ln\left(1+\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+\cdots+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta)+\sum_{n=0}^{p} Re\, c_n z^n,$$

причому мають місце формули

$$c_n = \lim_{R\to\infty} Re\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}(\mathrm{R}e^{i\varphi})e^{-in\varphi}\,d\varphi + \frac{1}{n}\int_{B(0,R)\setminus B(0,1)}\left(\frac{\bar{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right).$$

В **підрозділі 3.4.** використовуються наступні означення.

Говоримо, що δ-субгармонічна $\mathrm{w}(z)$ функція в $\mathbb{C}$ є функцією не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$, якщо

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,\mathrm{w})}{V(r)} = \sigma < \infty.$$

Нехай $\mathrm{w}(z)$ – δ-субгармонічна функція в $\mathbb{C}$, $\rho(r)$ – уточнений порядок. Нехай $(\mathrm{w})_t(z) = \frac{\mathrm{w}(tz)}{V(t)}$. Множина δ-субгармонічних функцій вигляду $u(z) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{w}_{t_n}(z)$, де $t_n \to \infty$, а границя береться в наступному: для будь-якої функції $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^m)$ виконується співвідношення $(u,\varphi) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{w}_{t_n},\varphi)$, називається граничною множиною функції w відносно уточненого порядку $\rho(r)$ і позначається $Fr[\mathrm{w};\rho(r)]$ або коротше $Fr[\mathrm{w}]$.

Позначимо через $L(\alpha)$, $\alpha > 0$ лінійний нормований простір, що складається з локально інтегровних в $\mathbb{C}$ функцій $g(z)$, для яких скінченна величина

$$\|g\|_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int \frac{|g(z)|}{1+|z|^\alpha}\,dxdy,$$

яка називається нормою функції $g\ (z)$.

Серед основних результатів підрозділу 3.4 виділимо наступні.

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathrm{w}(z)$ − δ*-субгармонічна функція в* $\mathbb{C}$ *не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку* $\rho(r)$. *Тоді множина* $Fr[w] = Fr[w;\rho(r)]$ *має такі властивості*:

1. $Fr[\mathrm{w}]$ − *непорожній зв'язний компакт в нормованому просторі* $L(\alpha)$, $\alpha > \rho + 2$, *що складається з* δ*-субгармонічних в* $\mathbb{C}$ *функцій.*

2. *Множина* $Fr[\mathrm{w}]$ *інваріантна щодо перетворень* F_t ,

$$(F_t v)(z) = \frac{v(tz)}{t^\rho}.$$

3. *Існує стала* $\sigma_1 > 0$ *така, що для будь-якої функції* $v \in Fr[w]$ *і будь-якого* $r >\ 0$ *виконується нерівність* $T(r,v) \le \sigma_1 r^\rho$.

Теорема 3.6. *Нехай* $\mathrm{w}(z)$ − δ*-субгармонічна в* $\mathbb{C}$ *функція не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку* $\rho(r)$, *причому* $\rho = \rho(\infty) > 0$ *– ціле число. Нехай* μ − *рісівська міра функції* w. *Нехай множини* $Fr[\mathrm{w}]$ *і* $Fr[\mu]$ *побудовані за допомогою уточненого порядку* $\rho(r)$. *Для того, щоб* δ*-субгармонічна функція* $v(z)$ *належала множині* $Fr[\mathrm{w}]$, *необхідно і достатньо, щоб існували міра* $\nu \in Fr[\mu]$ *і функція a(r) вигляду*

$$a(|z|) = \lim_{n\to\infty}\frac{t_n^\rho}{V(t_n)}\left(c_\rho + \frac{1}{\rho}\int\limits_{B(0,|z|t_n)}\frac{d\mu(\varsigma)}{\varsigma^\rho}\right), \qquad (t_n \to \infty)$$

такі, що

$$v(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\varsigma)d\nu(\varsigma) + \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\varsigma)d\nu(\varsigma) + Re\, a(|z|)z^\rho,$$

де

$$K_\rho(z,\varsigma) = Re\left(\ln\left(1+\frac{z}{\varsigma}\right) + \frac{z}{\varsigma} + \cdots + \frac{1}{\rho}\frac{z^\rho}{\varsigma^\rho}\right).$$

Теорема 3.7. *Нехай* $\mathrm{w}(z)$ − δ*-субгармонічна в* $\mathbb{C}$ *функція не вище ніж нормального типу відносно уточненого порядку* $\rho(r)$, *причому* $\rho = \rho(\infty) > 0$ *– неціле число. Нехай* μ − *рісівська міра функції* w. *Нехай* *множини $Fr[\mathrm{w}]$ і $Fr[\mu]$ побудовані за допомогою уточненого порядку $\rho(r)$. Для того, щоб δ-субгармонічна функція $v(z)$ належала множині $Fr[\mathrm{w}]$, необхідно і достатньо, щоб існувала міра $\nu \in Fr[\mu]$ така, що*

$$v(z) = \int K_p(z, \varsigma) d\nu(\varsigma), \qquad p = [\rho].$$

Підрозділ 3.5 присвячений питанню про існування цілої функції $f(z)$ нульового уточненого порядку $\rho(r)$. Вивчається питання: "Який повинен бути нульовий уточнений порядок $\rho(r)$, щоб він був уточненим порядком цілої трансцендентної функції ?"

Теорема 3.9. *Нехай $\rho(r)$ − заданий нульовий уточнений порядок. Для того, щоб існувала ціла трансцендентна функція $f(z)$, для якої уточнений порядок $\rho(r)$ був би уточненим порядком цієї функції, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{V(r)} = 0.$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчалися завдання, що виникають в теорії субгармонічних, дельта-субгармонічних функцій та їх асоційованих мір.

У дисертації отримані такі нові результати:

1. Повністю вирішено питання про існування цілої функції заданого нульового уточненого порядку.

2. Побудовано граничні множини для дельта-субгармонічних функцій і радонових мір, описані їх основні властивості, отримано зв'язок між регулярною радоновою мірою і існуванням кутової щільності, доведені три критерії того, щоб задана множина була граничною множиною деякої радонової міри;

3. Отримано достатні умови на міру γ з носієм, компактно вкладеним в $G \subset \mathbb{R}^m, m > 2$, при яких із збіжності послідовності v_n як послідовності узагальнених функцій випливає її збіжність у просторах $L_p(\gamma)$.

4. Знайдено нові представлення δ-субгармонічних функцій у формі типу Брело.

Для обґрунтування результатів дисертації застосовуються загальні методи математичного аналізу, в тому числі методи теорії міри і потенціалу, методи функціонального аналізу, а також деякі елементи теорії динамічних систем. Результати дисертації знаходять застосування в теорії цілком регулярного зростання цілих і мероморфних функцій в сенсі Левіна-Пфлюгера, можуть бути використані як в теорії функцій комплексного змінного, так і в інших розділах математики, де використовуються цілі, субгармонічні і δ-субгармонічні функції.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Нгуен Ван Куинь. Об одном свойстве функции $\|x-y\|^{2-m}$ / Нгуен Ван Куинь // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». – 2013. – № 1081. – С. 4–9.

2. Гришин А. Ф. Целые функции с напередё заданным нулевым уточнённым порядком. / А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь // Записки научных семинаров ПОМИ. − 2014. − Т. 424, № 42. − С. 141–153.

3. Гришин А. Ф. Теоремы о представлении δ-субгармонических функций / А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь, И. В. Поединцева // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». – 2014. – № 1133. – С. 56–75.

4. Nguyen Van Quynh. Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions / Nguyen Van Quynh // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. − 2015. − V. 11, № 1. − P. 63–74.

5. Гришин А. Ф. Предельные множества Азарина для мер Радона. I / А. Ф. Гришин, Н. В. Куинь // Математичні Студії. − 2015. − V. 43, №1. − С. 94–99.

6. Нгуен Ван Куинь. Об одном свойстве функции $\|x-y\|^{2-m}$ / Нгуен Ван Куинь // Тараповские чтения − 2013: Межд. научн. шк.-конф., 29.09 − 04.10. 2013г.: Сб. докл. − Харьков. − 2013. − С. 103.

7. Нгуен Ван Куинь. Целые функции с наперёд заданным нулевым уточнённым порядком / Нгуен Ван Куинь // Студенческое научное общество механико-математического факультета ХНУ имени В. Н. Каразина.: X межд. научн. конф. 24 − 25.04.2015.: Тезисы докл. − Харьков − 2015. − С. 37–38.

8. Nguyen Van Quynh. Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions / Nguyen Van Quynh // II International Conference “Analysis and Mathematical Physics”. − June 16 – 20, 2014.: Book of Abstracts. − Kharkiv. − 2014. − P. 37–38.

АНОТАЦІЯ

Нгуєн Ван Куінь. Задачі теорії субгармонічних та дельта-субгармонічних функцій. − Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2015.

Об’єктом дослідження дисертаційної роботи є цілі, субгармонічні та δ-субгармонічні функції у скінченновимірному евклідовому просторі.

У дисертаційній роботі доведено існування цілої функції заданого нульового уточненого порядку.

Отримано достатні умови на міру γ з носієм, компактно вкладеним в $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, при яких із збіжності послідовності v_n як послідовності узагальнених функцій випливає її збіжність у просторах $L_p(\gamma)$.

У дисертаційній роботі побудовані граничні множини для більш широкого класу δ-субгармонічних функцій і радонових мір, доведені три критерії того, щоб задана множина була граничною множиною деякої радонової міри. Раніше ці результати були відомі лише для більш вузьких класів субгармонічних функцій і невід'ємних мір.

Ключові слова: ціла функція, δ-субгармонічна функція, міра Радона, збіжність у сенсі узагальнених функцій.

АННОТАЦИЯ

Нгуен Ван Куинь. Задачи теории субгармонических и дельта-субгармонических функций. − Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 2015.

Объектом исследования диссертационной работы являются целые, субгармонические и δ-субгармонические функции в конечномерном евклидовом пространстве.

В работе изучается вопрос: "Какой должен быть уточнённый порядок $\rho(r)$, чтобы он был уточнённым порядком целой трансцендентной функции?". Известно, что если уточнённый порядок $\rho(r)$ такой, что $\lim \rho(r) = \rho > 0 \ (r \to \infty)$, то существует целая функция $f(z)$ уточнённого порядка $\rho(r)$. В случае, когда $\rho = 0$, вопрос о существовании такой целой функции оставался открытым до настоящего времени. В диссертационной работе доказано существование целой функции заданного нулевого уточнённого порядка.

Созданная Азариным и получившая развитие в трудах других математиков теория предельных множеств субгармонических функций и мер находит применение в теории роста целых функций, в других разделах математики. В этой теории каждой субгармонической функции нормального типа при некотором уточнённом порядке ставится в соответствие набор субгармонических функций, а мере Рисса исходной субгармонической фун-

кции ставится в соответствие некоторый набор мер. Функции вполне регулярного роста − это как раз те, для которых эти наборы состоят в точности из одного элемента. Субгармонические функции не образуют линейного пространства, так как уже разность двух таких функций может не быть субгармонической. Минимальное линейное пространство над полем вещественных чисел, содержащее субгармонические функции, есть пространство δ-субгармонических функций. Ассоциированной мерой δ-субгармонической функции является мера Радона. В диссертационной работе построена теория предельных множеств для более широкого класса δ-субгармонических функций и радоновых мер, доказаны три критерия того, чтобы заданное множество было предельным множеством некоторой радоновой меры. Ранее эти результаты были известны лишь для более узких классов субгармонических функций и неотрицательных мер.

В теории субгармонических и δ-субгармонических функций существенную роль играют теоремы о представлении. В диссертационной работе предлагается усиление варианта Азарина теоремы о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка.

Пусть $v_n(x)$ − последовательность δ-субгармонических функций в области G. Изучаются условия, при которых из сходимости последовательности $v_n(x)$ как последовательности обобщённых функций следует её сходимость в пространствах Лебега $L_p(\gamma)$. Результаты, наиболее близкие к нашим, были получены ранее в работах Хёрмандера, а также Гришина и Шуиги. В работе Хёрмандера исследовался случай, когда γ − некоторое ограничение m-мерной меры Лебега, а в работе Гришина и Шуиги рассматривался случай $m = 2$. В диссертационной работе найдены достаточные условия на меру γ с носителем, компактно вложенным в $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, при которых из сходимости последовательности v_n как последовательности обобщённых функций следует её сходимость в пространствах с интегральной метрикой с мерой γ.

Ключевые слова: целая функция, δ-субгармоническая функция, мера Радона, сходимость в смысле обобщённых функций.

ABSTRACT

Nguyen Van Quynh. Problems in the theory of subharmonic and delta-subharmonic functions. − Manuscript.

Thesis for degree of candidate in phisical and mathematical sciences by speciality 01.01.01 − Mathematical Analysis. – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2015.

The subject of study are entire, subharmonic, and δ-subharmonic functions in finite-dimensional Euclidean space. In the thesis, the existence of an entire

function of a given zero proximate order is proved. Sufficient conditions for a measure γ with compact support $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, such that the convergence of a sequence of subharmonic functions v_n to v in the sense of distributions implies the convergence in the space $L_p(\gamma)$ are obtained.

In the thesis, limit sets for a wider class of δ-subharmonic functions and Radon measures are constructed, three criterions for a given set to be a limit set of some Radon measure are proved. Previously, these results were known only for smaller classes of subharmonic functions and nonnegative measures.

Keywords: entire function, δ-subharmonic function, Radon measure, convergence in the sense of distributions.

Підписано до друку 17.09.15. Формат 60х84х16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 0.9. Тир. 100 прим. Зам.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009