Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Ревіна Тетяна Володимирівна

УДК 517.977.14

ПОЗИЦІЙНИЙ СИНТЕЗ ДЛЯ РОБАСТНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Коробов Валерій Іванович,
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна
Міністерства освіти і науки України, м. Харків,
завідувач кафедри прикладної математики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Когут Петро Ілліч,
Дніпровський національний університет
імені О. Гончара
Міністерства освіти і науки України, м. Дніпро,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук,
доцент, старший науковий співробітник
Фардигола Лариса Василівна,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
старший науковий співробітник відділу теорії функцій.

Захист відбудеться «21» квітня 2017 р. о 15:15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи 4.

Автореферат розісланий «__»_____________2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Ігнатович С.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У роботі розглядається задача синтезу для одного класу лінійних систем, тобто задача побудови керування у вигляді функції від фазових координат, такого, що траєкторія системи з цим керуванням, яка починається у довільній початковій точці деякого околу початку координат, закінчується у початку координат у скінченний момент часу. До того ж керування задовольняє наперед заданим обмеженням, що ускладнює задачу. У 2007 році вийшла монографія Коробова В. І. “Метод функции управляемости”, у якій запропоновані методи розв’язку задачі синтезу для керованих систем. На основі цього в дисертаційній роботі запропоновано розв’язок задачі синтезу для лінійної системи з неперервними обмеженими невідомими збуреннями. Розв’язується наступна задача: знайти обмеження на невідомі збурення, при яких керування, яке розв’язує задачу синтезу для лінійної системи без збурень, розв’язує також задачу синтезу і для збуреної системи. Пропонуються різні підходи до визначення меж зміни збурень. Отримані оцінки зверху і знизу на час руху з довільної початкової точки у початок координат.

Дослідження стійкості розв’язків систем розпочалося з робіт Ляпунова О. М. (1892 р, Харків). Одними із перших робіт на тему стійкості за скінченний час були роботи Roxin E. і Weiss L. (1966). В цих роботах під стійкістю за скінченний час розуміється знаходження траєкторії в обмеженій множині простору протягом заданого скінченного інтервалу часу. Ці ідеї отримали розвиток в теорії оптимального керування, зокрема в задачах стабілізації та синтезу керування.

При розв’язанні задач оптимального керування, тобто при знаходженні екстремуму функціоналу, керування шукають або у вигляді функції від часу (програмне керування), або у вигляді функції від фазових координат (синтез керування). У 1979 році Коробовим В. І. у роботі «Общий поход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости» (Матем. сборник, Т. 109 (151), № 4(8)) вперше був запропонований загальний підхід до розв’язку задачі синтезу допустимих керувань для довільної нелінійної автономної керованої системи. Водночас отримана оцінка на час руху з довільної початкової точки у початок координат. Цей метод далі був розвинений у спільних роботах Коробова В. І., Скляра Г. М. та інших авторів. До робіт Коробова В. І. примикають роботи Поляков А. та ін., Rodoumta K. та ін. Виявилося, що метод функції керованості можна застосувати до задач керування хаосом (Bowong S., Moukam Kakmeni F.M. та ін.).

Однією з особливостей методу функції керованості є те, що запропоновано розв’язок задачі синтезу за скінченний час. Значно пізніше задача переходу з довільної початкової точки у початок координат за скінченний час отримала назву “finite-time stabilization”. Розв’язком цієї задачі займалися Haimo V. (1986), Ryan E. P. (1991), Bhat S. P. (1998), Hong Y. (2002), Adamy J. (2004), Du H., Ding S. (2010), Поляков А., Peruquetti W. (2010), Овсеевич А. (2015) та інші автори. Зауважимо, що метод функції керованості може бути застосований у випадку, коли початок координат не є точкою спокою системи.

У теперішній час велика увага приділяється задачам керованості, стійкості і стабілізації робастних систем керування, тобто систем керування, математичні моделі котрих мають невизначеності (термін «робастні системи» див. наприклад Ackermann J. (1980), Поляк Б. Т. (2002)). На практиці велике значення мають неперервні та дискретні моделі динаміки систем керування з невизначенністю (див. наприклад роботи Емельянов С. В., Коровин С. К., Мазко А. Г., Поляков А., Ципкин Я. З., Adamy J., Balakrishnan V., Boyd S., Jaulin L., Ding S., Du H., Hong Y., Li S., Ovseevich A., Perruquetti W.) Модель “невідомих, але обмежених” (“unknown-but-bounded”) збурень вперше була розглянута Schweppe F. C. у 1973 р, а також у роботах Куржанського А. Б. (1977) та Черноусько Ф. Л. (1988).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та керування Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна в рамках державних науково-дослідних робіт за темами “Розв’язання задач керованості, стабілізації, синтезу, ідентифікації для динамічних систем” (номер державної реєстрації 0109U001548), “Розв’язання задач керованості, лінеаризації, синтезу та стабілізації для нелінійних систем” (номер державної реєстрації 0111U010365), на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна в рамках державних науково-дослідних робіт за темою “Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи” (номер державної реєстрації 0116U000823).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв’язок задачі локального і глобального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з одновимірним та багатовимірним керуванням, а також застосування отриманих методів для дослідження механічних об’єктів.

Основним завданням, яке доводиться вирішувати для досягнення зазначеної мети, є пошук таких меж зміни збурень, при яких розв’язок задачі синтезу для системи з невідомими обмеженими збуреннями проводиться за допомогою того ж самого керування, що і для системи без збурень.

Об’єкт дослідження. Об’єктом дослідження є канонічне рівняння з одновимірним та багатовимірним керуванням із невідомими обмеженими збуреннями.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є побудова обмеженого керування, яке розв’язує задачу переходу з довільної початкової точки деякого околу початку координат у початок координат за скінченний час за наявністю збурень. При цьому керування, яке розв’язує задачу синтезу для системи без збурень, має також розв’язувати задачу синтезу для системи зі збуреннями. Також предметом дослідження є знаходження меж зміни збурень для різних типів робастних лінійних систем з одновимірним та багатовимірним керуванням.

Методи дослідження. При роботі над дисертацією використовувалися методи теорії диференціальних рівнянь та методи математичної теорії керування, зокрема метод функції керованості В. І. Коробова, другий метод Ляпунова дослідження стійкості систем. При знаходженні меж зміни збурень використовувалась теорія стійкості інтервальних матриць (Хорн Р. А. (1989), Бобильов Н. А. (2000), Майлибаєв А. А. (2009), Franze G. (2004), Fu M. (1988), Rohn J. (1992), Shalaby M. A. (2000), Wang X. (1994)).

Наукова новизна одержаних результатів.

У роботі вперше:

1. Побудовано керування, яке задовольняє наперед заданим обмеженням і розв’язує задачу переходу з довільної початкової точки деякого околу початку координат у початок координат за скінченний час для лінійних робастних систем за наявністю збурень.
2. Отримані найширші межі зміни збурення для одного класу збурень для задачі глобального позиційного синтезу і локального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з одновимірним керуванням.
3. Отримані межі зміни збурень у випадку декількох незалежних збурень для задачі глобального позиційного синтезу і локального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з одновимірним керуванням.
4. Отримана загальна межа зміни збурень у випадку декількох незалежних збурень для задачі глобального позиційного синтезу і локального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з багатовимірним керуванням.
5. Отримані оцінки зверху та знизу на час руху з довільної початкової точки у початок координат.
6. Наведені механічні приклади застосування одержаних результатів.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний та практичний характер. Результати дисертації можуть бути використані для подальшого дослідження методів розв’язку задачі позиційного синтезу для лінійних робастних систем. У роботі запропоновано метод побудови керування певним об’єктом, який описується заданим рівнянням. Результати дисертації можуть бути застосовані в задачах керованості та стійкості механічних об’єктів із невідомими невизначеностями.

Особистий внесок автора. У спільних з науковим керівником статтях науковому керівнику Коробову В. І. належать постановки задач, підходи до їх розв’язку та обговорення результатів. Решта результатів отримані автором дисертації самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на: First Karazin scientific readings (Харків, 2004); 7 Кримській Міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Алушта, 2004); 8 Кримській Міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Алушта, 2006); Lyapunov memorial conference (Харків, 2007); 9 Кримській Міжнародній математичній школі «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Алушта, 2008); Міжнародній конференції «Современные проблемы математики и ее приложения» (Харків, 2011); Міжнародній конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харків, 2012); Міжнародній школі-конференції “Тараповские чтения-2013”, «Современные проблемы математики, механики и информатики» (Харків, 2013); II International conference «Analysis and mathematical physics II» (Харків, 2014); III International conference «Analysis and mathematical physics» (Харків, 2015); Міжнародній конференції «Dynamical systems and their applications» (Київ, 2015); Міжнародній школі-конференції “Тараповские чтения-2016”, «Совр. проблемы естественных наук» (Харків, 2016); IV International Conference «Analysis and mathematical physics» (Харків, 2016); Міжнародній конференції «Differential equations and control theory» (Харків, 2016), на науковому семінарі кафедри диференціальних рівнянь та керування (2014 р., 2015 р.) та кафедри прикладної математики (2015 р., 2016 р.) Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (керівник: професор Коробов В. І.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи містяться у статтях [1]–[7], 1 препринті [8] та в 14 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [9]–[22].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел і 43 малюнків. Загальний обсяг дисертації складає 157 сторінок. Список літератури займає 14 сторінок і містить 116 найменувань. Результати, що виносяться на захист, сформульовано та доведено в розділах 2, 3 та 4.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Коробову Валерію Івановичу за постановку і обговорення задач, цікаві ідеї, постійну увагу до роботи та підтримку. Автор також вдячний кандидату фізико-математичних наук, доценту Ігнатович Світлані Юріївні за цінні поради на етапі оформлення роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, наведено зв'язок дисертації з науковими програмами, планами, темами, сформульовано мету та задачі дослідження, описано теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Також відмічено наукову новизну отриманих результатів, наведено їх апробацію та надано відомості про публікації автора за темою дисертації.

У **першому розділі** описано метод функції керованості для довільної нелінійної системи, для довільної лінійної системи, для канонічної системи з одновимірним та багатовимірним керуванням, наведено огляд літератури з розв’язку задачі синтезу за скінченний час та з теми робастності, наведено пояснення термінів «робастна система з одновимірним керуванням» та «робастна система з багатовимірним керуванням», наведено деякі важливі для дисертаційної роботи класичні результати з теорії стійкості інтервальних поліномів та інтервальних матриць.

Наведемо основні поняття методу функції керованості В. І. Коробова. Розглянемо нелінійну систему $\dot{x} = f(x,u)$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $Q -$ деякий окіл початку координат, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, до того ж Ω таке, що $0 \in int\,\Omega$, $f(0,0) = 0$.

Задача *локального синтезу* обмеженого керування полягає у знаходженні керування $u = u(x)$ такого, що:

1. $u(x)$ задовольняє обмеженню $u(x) \in \Omega$;
2. траєкторія замкненої керуванням $u(x)$ системи

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \tag{1}$$

яка починається у довільній точці $x_0 \in Q$ при $t = 0$, закінчується в початку координат в деякий *скінченний* момент часу $T(x_0)$. У випадку, якщо $Q = \mathbb{R}^n$, синтез називається *глобальним*.

Зауваження 1. Відмітимо труднощі розв'язку цієї задачі.

1. Так як через кінцеву точку проходить нескінченна кількість траєкторій та час руху за кожною траєкторією у цю точку є скінченним, то за теоремою про єдність розв'язку права частина рівняння (1) не може задовольняти умові Ліпшиця у даному околі.

2. Керування задовольняє наперед заданим обмеженням.

Канонічною системою з одновимірним керуванням називається система

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, u – скалярне керування, яке задовольняє обмеженню $|u| \leq 1$, матриці A_0 та b_0 мають вигляд

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Зауважимо, що скінченність часу руху призводить до того, що задача синтезу для системи (2) не може бути розв'язана за допомогою лінійного зворотного зв'язку.

Під M^* будемо розуміти матрицю, транспоновану до матриці M. Нехай m_{ij} $-$ елементи матриці M. Позначимо

$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* \, e^{-A_0^* t} dt = \left(\frac{(-1)^{2n-i-j}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)(2n-i-j+2)} \right)_{i,j=1}^{n}, \tag{4}$$

$$\mathrm{D}(\Theta) = diag\left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^{n}. \tag{5}$$

Теорема 1. (Коробов В. І., Скляр Г. М., 1990). Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ для $x \neq 0$ як додатний корінь рівняння

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x), \tag{6}$$

де постійна a_0 задовольняє нерівності

$$0 < a_0 \le \frac{2}{f_{nn}}. \tag{7}$$

Тоді керування вигляду

$$u(x) = -\frac{1}{2} b_0^* D\big(\Theta(x)\big) F D\big(\Theta(x)\big) x \tag{8}$$

розв'язує для системи (2) задачу глобального позиційного синтезу неперервного керування та задовольняє обмеженню $|u(x)| \le 1$. Крім того, виконується рівність $\dot{\Theta}(x) = -1$. У цьому випадку функція керованості є часом руху з довільної початкової точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ у початок координат.

Можна показати, що рівняння (6) має єдиний додатний розв'язок для кожного $x \ne 0$. Покладемо $\Theta(0) = 0$. Введена таким чином функція $\Theta(x)$ є неперервною для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ та неперервно-диференційовною при $x \ne 0$.

Під *робастною системою* будемо розуміти систему

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u, \tag{9}$$

де матриці A_0 і b_0 задаються формулою (3), $t \ge 0$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, Q – деякий окіл початку координат, u – скалярне керування, яке задовольняє обмеженню $|u| \le 1$, функція $p(t,x)$ задовольняє обмеженю $d_1 \le p(t,x) \le d_2$ і є *невідомою.* В дисертації розглядаються наступні класи матриць R:

1. $$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

2. $$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

3. $$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ r_{(n-2)1} & r_{(n-2)2} & r_{(n-2)3} & \dots & r_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ r_{(n-1)1} & r_{(n-1)2} & r_{(n-1)3} & \dots & r_{(n-1)(n-1)} & r_{(n-1)n} \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & & r_{n(n-1)} & r_{nn} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $r_2, \dots, r_{n-1}, r_{11}, \dots, r_{nn}$ – деякі відомі числа.

Класичним прикладом такої постановки задачі є керування рухом матеріальної точки з урахуванням невідомого обмеженого тертя. Рух цієї системи описується системою рівнянь $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = p(t, x_1, x_2)x_2 + u$. Доданок $p(t, x_1, x_2)x_2$ – сила тертя, до того ж коефіцієнт нелінійного в'язкого тертя $p(t, x_1, x_2)$ –*невідома* функція, яка задовольняє обмеженню

$$d_1 \le p(t, x_1, x_2) \le d_2.$$

Канонічною системою з багатовимірним керуванням називається система
$$\dot{x} = (A_0 + K)x + B_0 u, \tag{13}$$
де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ – керування, яке задовольняє обмеженню $||u|| \leq 1$; A_0 – $(n \times n)$ матриця вигляду
$$A_0 = diag(A_{01}, \dots, A_{0r}) \ , \tag{14}$$
де A_{0i} – $(n_i \times n_i)$ матриця вигляду
$$A_{0i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ i = 1, \dots, r,$$
$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \geq 1, \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n;$$
B_0 – $(n \times r)$ матриця, елементи котрої
$$(B_0)_{s_i i} = 1, \quad s_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i, \ \ i = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, r, \tag{15}$$
а інші дорівнюють нулю; елементи матриці K, які знаходяться у рядку з номером s_i (тобто у рядку, який містить керування) дорівнюють $k_{s_i j}$, а інші елементи дорівнюють нулю.

У випадку багатовимірного керування матриця F^{-1}, яка визначається формулою (4), має вигляд
$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t) e^{-A_0 t} B_0 B_0^* \, e^{-A_0^* t} dt, \tag{16}$$
а матриця $\mathrm{D}(\Theta)$, яка визначається формулою (5), має вигляд
$$\mathrm{D}(\Theta) = diag(\mathrm{D}_1(\Theta), \dots \ \mathrm{D}_r(\Theta)) \ , \qquad \mathrm{D}_i \, (\Theta) = diag \ \left(\Theta^{-\frac{2n_i - 2i + 1}{2}}\right)_{i=1}^{n_i} . \tag{17}$$

У випадку багатовимірного керування теорема 1 формулюється наступним чином:

Теорема 2. (Коробов В. І., Скляр Г. М., 1990; Коробов В. І., Скорик В. О., 2002). Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ для $x \neq 0$ як додатний корінь рівняння
$$2a_0 \Theta = (D(\Theta) F D(\Theta) x, x), \tag{18}$$
де постійна a_0 задовольняє нерівності
$$0 < a_0 \leq \frac{1}{|| \, F^{-1} || (||B_0^* F|| + 2 \max\{c^{n_1}, c\} ||B_0^* K||)^2} \, , \tag{19}$$
причому область розв'язку задачі є еліпсоїдом $Q = \{x \colon \Theta(\mathrm{x}) \leq \mathrm{c}\}$. Покладемо $\Theta(0) = 0$. Тоді керування вигляду
$$u(x) = \ -(\tfrac{1}{2} B_0^* D\big(\Theta(x)\big) F D\big(\Theta(x)\big) + B_0^* K) x \tag{20}$$
розв'язує для системи (13) задачу локального позиційного синтезу неперервного керування та задовольняє обмеженню $||u(x)|| \leq 1$. Крім того, виконується рівність $\dot{\Theta}(x) = -1$, тобто функція керованості є часом руху з довільної початкової точки $x_0 \in Q$ у початок координат.
У випадку, коли $K = 0$, синтез буде глобальним.

Під робастною системою у випадку багатовимірного керування будемо розуміти систему
$$\dot{x} = (A_0 + K + R(t, x))x + B_0 u, \tag{21}$$

де матриці A_0 і B_0 задаються формулами (14) і (15) відповідно; $t \geq 0$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, Q – деякий окіл початку координат; $u \in \mathbb{R}^r$ – керування, яке задовольняє обмеженню $||u|| \leq 1$; елементи матриці K, які знаходяться у рядку з номером s_i (тобто у рядку, який містить керування) дорівнюють $k_{s_i j}$, а інші елементи дорівнюють нулю,

$$R(t,x) = diag\big(R_1(t,x), \dots R_r(t,x)\big) + \hat{R}(t,x), \qquad (22)$$

де $R_i(t,x) =$

$$\begin{pmatrix} r_{(s_{i-1}+1)1} & r_{(s_{i-1}+1)2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{(s_{i-1}+2)1} & r_{(s_{i-1}+2)2} & r_{(s_{i-1}+2)3} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ r_{(s_i-2)1} & r_{(s_i-2)2} & r_{(s_i-2)3} & \cdots & r_{(s_i-2)(s_i-1)} & 0 \\ r_{(s_i-1)1} & r_{(s_i-1)2} & r_{(s_i-1)3} & \cdots & r_{(s_i-1)(s_i-1)} & r_{(s_i-1)s_i} \\ r_{s_i 1} & r_{s_i 2} & r_{s_i 3} & & r_{s_i(s_i-1)} & r_{s_i s_i} \end{pmatrix};$$

елементи матриці $\hat{R}(t,x)$, які знаходяться у рядку з номером s_i (тобто у рядку, який містить керування) дорівнюють $r_{s_i j}$, а інші елементи дорівнюють нулю, $r_{mj} = r_{mj}(t,x) -$ *невідомі* функції, які задовольняють обмеженню

$$\max_{1 \leq j \leq m+1 \leq n_i,\ i=1,\dots,r} |r_{mj}(t,x)| \leq \Delta. \qquad (23)$$

У **другому розділі** сформульовано постановку задачі глобального синтезу для робастних систем з одним збуренням та доведені теореми, які розв'язують задачу синтезу.

У *підрозділі 2.1* розглянуто випадок з матрицею R вигляду (10).

Для пари чисел $d_1 < d_2$ через P_{d_1, d_2} позначимо клас функцій $p(t,x)\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**,** які задовольняють наступним умовам:

1. $p(t,x)$ неперервна по t і x;
2. у кожній області $K_1(t_1,\rho_2) = \{(t,x)\colon 0 \leq t \leq t_1, \|x\| \leq \rho_2\}, \rho_2 > 0, t_1 > 0$ функція $p(t,x)$ задовільняє умові Ліпшиця

$$|p(t,x") - p(t,x')| \leq l_1(t_1,\rho_2)\|x" - x'\|$$

(де $l_1(t_1,\rho_2)$ залежить від функції p);

3. для всіх $(t,x)\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ функція $p(t,x)$ задовільняє обмеженню $d_1 \leq p(t,x) \leq d_2$.

Під (d_1,d_2) *−глобальним позиційним синтезом* обмеженого керування будемо розуміти знаходження таких $d_1 < 0$ і $d_2 > 0$, що для усіх збурень $p(t,x) \in P_{d_1, d_2}$ траєкторія $x(t)$ системи, замкненої керуванням $u = u(x)$, заданим формулою (8)

$$\dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x + b_0 u(x), \qquad (24)$$

яка починається у довільній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $t = 0$, закінчується у початку координат в деякий *скінченний* момент часу $T(x_0, p(t,x))$, тобто $\lim_{t \to T(x_0,p(t,x))} x(t) = 0$. У випадку, якщо початкова точка $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, Q – деякий окіл початку координат, синтез називається *локальним*.

Зауваження 2. Цю задачу можна трактувати з позиції теорії диференціальних ігор. Перший гравець обирає стратегію (керування) $\mathrm{u}(x)$, а другий гравець обирає стратегію (збурення) $p(t,x)$.

Позначимо

$$S(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^{*}D(\Theta)F). \tag{25}$$

Зазначимо, що можна встановити тотожність $\mathrm{D}(\Theta)\mathrm{R}\mathrm{D}^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}\mathrm{R}$ (це пов'язане з тим, що матриця R, яка задається формулою (10), має таку ж саму структуру як і A_0, яка задається формулою (3)), тоді виконано

$$S(\Theta) = S_0 = FR + R^{*}F\ . \tag{26}$$

У наступній теоремі наведені межі зміни збурення у випадку робастної системи з одновимірним керуванням (9) із матрицею R вигляду (10).

Теорема 3. Нехай $\tilde{d}_1^0$ і $\tilde{d}_2^2 -$ найменший і найбільший відповідно корені рівняння $\det(\mathrm{F}^1 - \tilde{p}S_0) = 0$ відносно $\tilde{p}$. Нехай $0 < \gamma_1 < 1, \gamma_2 > 1$. Нехай

$$d_1^0 = \max\{(1-\gamma_1)\tilde{d}_1^0, (1-\gamma_2)\tilde{d}_2^0\},\quad d_2^0 = \min\{(1-\gamma_1)\tilde{d}_2^0, (1-\gamma_2)\tilde{d}_1^0\} \tag{27}$$

Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (6), де постійна a_0 задовольняє нерівності (7).

Тоді для усіх d_1 і d_2 таких, що $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$, керування (8) розв'язує задачу (d_1, d_2) −глобального позиційного синтезу для робастної системи (9) з матрицею R, яка задається формулою (10). До того ж траєкторія $x(t)$ замкненої системи (24), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, d_1, d_2)$, для якого виконана нерівність

$$\frac{\Theta(x_0)}{\gamma_2} \leq T(x_0, d_1, d_2) \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma_1}. \tag{28}$$

Зауваження 3. Зазначимо, що рівняння $\det(\mathrm{F}^1 - \tilde{p}S_0) = 0$ є квадратним відносно $\tilde{p}$.

Наслідок 1. Значення $\tilde{d}_1^0$ і $\tilde{d}_2^2$ можуть бути знайдені у наступному вигляді

$$\tilde{d}_1^0 = \frac{1}{\lambda_{min}((F^1)^{-1}S_0)},\quad \tilde{d}_2^0 = \frac{1}{\lambda_{max}((F^1)^{-1}S_0)}, \tag{29}$$

де $\lambda_{min}((F^1)^{-1}S_0)$ та $\lambda_{max}((F^1)^{-1}S_0)$ – найменше та найбільше відповідно власні значення матриці $(F^1)^{-1}S_0$.

Доведення теореми 3 ґрунтується на тому, що повна похідна від функції керованості в силу збуреної системи (9) має вигляд

$$\dot{\Theta} = \frac{\left((-\mathrm{F}^1 + \mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{x})S_0)y(\Theta,x), y(\Theta,x)\right)}{\left(-\mathrm{F}^1 y(\Theta,x), y(\Theta,x)\right)},$$

де $y(\Theta, x) = D(\Theta)x,\ \mathrm{F}^1 = ((2\mathrm{n} - \mathrm{i} - \mathrm{j} + 2)\mathrm{f}_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{i,j}=1}^{\mathrm{n}} =$

$$= \begin{pmatrix} 2nf_{11} & (2n-1)f_{12} & \cdots & (n+1)f_{1n} \\ (2n-1)f_{21} & (2n-2)f_{22} & \cdots & nf_{2n} \\ & & \cdots & \\ (n+1)f_{1n} & nf_{2n} & \cdots & 2f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Відомо, що матриця F^1 додатно визначена. Доведено, що при $p(t,x) \in (d_1^0,\ d_2^0)$ виконується нерівність

$$-\gamma_2 < \dot{\Theta} < -\gamma_1,$$

звідки, за основною теоремою методу функції керованості (Коробов В. І. "Метод функции управляемости", 2007, теорема 1.2), випливає оцінка на час руху (28).

Зауваження 4. Нехай $\mathrm{p(t,x)} -$ деяка функція з класу $P_{d_1,\, d_2}$. Для знаходження траєкторії, що починається у початковій точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, діємо таким чином. Розв'язуємо рівняння (6) при $x = x_0$ і отримуємо єдиний додатний корінь $\Theta(x_0) = \Theta_0$. Покладемо $\theta(t) = \Theta(x(t))$. Траєкторія задовольняє наступній задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + p(t,x)R)x - \frac{1}{2} b_0 b_0^* D(\theta) F D(\theta) x, \\ \dot{\Theta} = \frac{\left((-\mathrm{F}^1 + \mathrm{p(t,x)} S_0) D(\theta)x, D(\theta)x\right)}{(-\mathrm{F}^1 D(\theta)x, D(\theta)x)}, \\ x(0) = x_0, \qquad \theta(0) = \Theta_0. \end{cases}$$

У *підрозділі 2.2* розглянуто випадок із матрицею R вигляду (11) та $|p(t,x)| \le d$. У наступній теоремі наведені межі зміни симетричного збурення у випадку робастної системи з одновимірним керуванням (9) із матрицею R вигляду (11).

Теорема 4. Нехай $0 < \gamma_1 < 1$, матриці $Q = \int_0^\infty e^{2(\gamma_1 - 1)F^1 t}\, dt$, $Z(\gamma_1) = |U^*| \cdot |S_0| \cdot |U|$, де $U -$ ортогональна матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $(\gamma_1 - 1)F^1$. Нехай виконана одна із наступних умов:

1. $$d_0 = \frac{(1-\gamma_1)\,\lambda_{min}(F^1)}{\rho(S_0)},$$
2. $$d_0 = \frac{1}{2||Q||_\infty ||S_0||_\infty},$$
3. $$d_0 = (1-\gamma_1) \min_{1 \le i \le n} \frac{\lambda_i(F^1)}{\sum_{j=1}^n z_{ij}(\gamma_1)},$$
4. $$d_0 = \frac{(1-\gamma_1)}{\rho(|(F^1)^{-1}| \cdot |S_0|)},$$

де $|M| = (|m_{ij}|)_{i,j=1}^n -$ матриця, яка складається з модулів елементів матриці M; $\rho(M) -$ спектральний радіус матриці M; $\lambda_i(M) -$ власні значення матриці M; $||M||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| -$ норма матриці M. Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (6), де постійна a_0 задовольняє нерівності (7).

Тоді для усіх d таких, що $0 \leq d < d_0$ керування (8) розв'язує задачу $(-d, d)$ −глобального позиційного синтезу для робастної системи (9). Водночас траєкторія $x(t)$ замкненої системи (24), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, d)$, для якого виконана нерівність

$$T(x_0, d) \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma_1}. \tag{30}$$

У *підрозділі 2.3* наведено розв'язок задачі глобального синтезу для тривимірної робастної системи.

У **третьому розділі** доведені теореми про знаходження найбільшого відрізку меж зміни збурення для робастної системи з одновимірним керуванням.

У *підрозділі 3.1* розглянуто випадок із матрицею R вигляду (11).

Теорема 5. Нехай $\tilde{d}_1^0$ і $\tilde{d}_2^0$ задовольняють умові (29), $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$, d_1^0 і d_2^0 задовольняють умові (27). Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (6), де постійна a_0 задовольняє нерівності (7).

Тоді для усіх d_1 і d_2 таких, що $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ керування (8) розв'язує задачу (d_1, d_2) −глобального позиційного синтезу для робастної системи (9) із матрицею R, яка задається формулою (11). До того ж траєкторія $x(t)$ замкненої системи (24), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, d_1, d_2)$, для якого виконана нерівність (28).

Зауважимо, що хоча межі зміни збурення для матриць R вигляду (10) і (11) однакові, розглянуті задачі значно відрізняються методом розв'язку.

Зауваження 5. $d_2^0 - d_1^0$ монотонно спадає за γ_1 та монотонно зростає за γ_2.

У *підрозділі 3.2* розглянуто випадок матриці R вигляду (12). Тоді елементи матриці $S(\Theta)$, яка задається формулою (25), це поліноми від Θ ступеня не вище ніж n. Припустимо, що λ_{min} − найменше власне значення матриці $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$ є алгебраїчно простим. Нехай x_{min} − власний вектор матриці $(F^1)^{-1}S_0$, а y_{min} − власний вектор транспонованої матриці $((F^1)^{-1}S_0)^*$, які відповідають λ_{min}, водночас виконана умова $y_{min}^* x_{min} = 1$. Припустимо, що λ_{max} − найбільше власне значення матриці $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$ є алгебраїчно простим. Нехай x_{max} − власний вектор матриці $(F^1)^{-1}S_0$, а y_{max} − власний вектор транспонованої матриці $((F^1)^{-1}S_0)^*$, які відповідають λ_{max}, до того ж виконана умова $y_{max}^* x_{max} = 1$. Позначимо

$$\lambda_1 = \begin{cases} \lambda_{min}, & \text{якщо } y_{min}^*(F^1)^{-1}\dot{S}(0)\, x_{min} \geq 0, \\ \lambda_{min} + y_{min}^*(F^1)^{-1}\dot{S}(0)\, x_{min}, & \text{якщо } y_{min}^*(F^1)^{-1}\dot{S}(0)\, x_{min} < 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_{max} + y_{max}^*(F^1)^{-1}\dot{S}(0)\, x_{max}, & \text{якщо } y_{max}^*(F^1)^{-1}\dot{S}(0)\, x_{max} \geq 0, \\ \lambda_{max}, & \text{якщо } y_{max}^*(F^1)^{-1}\dot{S}(0)\, x_{max} < 0. \end{cases}$$

Теорема 6. Нехай $\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_1$, $\tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_2$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$, d_1^0 і d_2^0 задовольняють умові (27). Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (6), де постійна a_0 задовольняє нерівності (7).

Тоді існує $c \leq 1$, таке, що в області Q, яка задається рівністю $Q = \{x\colon \Theta(x) \leq c\}$ для усіх d_1 і d_2 таких, що $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ керування (8) розв'язує задачу (d_1, d_2) −локального позиційного синтезу для робастної системи (9) із матрицею R, яка задається формулою (12). Водночас траєкторія $x(t)$ замкненої системи (24), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in Q$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, d_1, d_2)$, для якого виконана нерівність (28).

Також у *підрозділі 3.2* доведено теорему про розв'язок задачі глобального синтезу у випадку з матрицею R вигляду (12). Оберемо довільну початкову точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, нехай $\Theta(x_0) = \Theta_0$. Оцінимо елементи матриці $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ при $0 \leq \Theta \leq \Theta_0$: $\underline{m}_{ij} \leq ((F^1)^{-1}S(\Theta))_{ij} \leq \overline{m}_{ij}$. Нехай матриці $\underline{M}$ та $\overline{M}$ складені з елементів $\underline{m}_{ij}$ та $\overline{m}_{ij}$ відповідно.

Теорема 7. (Rohn J., 1998). Нехай $A_c = \frac{1}{2}\left(\underline{M} + \overline{M}\right)$, $\widetilde{\Delta} = \frac{1}{2}\left(\underline{M} - \overline{M}\right)$, $M_c = \frac{1}{2}(A_c + A_c^*)$, $M_\Delta = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^*\right)$. Тоді спектр інтервальної матриці $[\underline{M}; \overline{M}]$ (тобто матриці, ij елемент якої належить відрізку $[\underline{m}_{ij}; \overline{m}_{ij}]$) належить відрізку $[\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$, де $\underline{\lambda} = \lambda_{min}(M_c) - \rho(M_\Delta)$, $\overline{\lambda} = \lambda_{max}(M_c) + \rho(M_\Delta)$.

Теорема 8. Нехай $\tilde{d}_1^0 = 1/\underline{\lambda}$, $\tilde{d}_2^0 = 1/\overline{\lambda}$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$, d_1^0 і d_2^0 задовольняють умові (27). Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (6), де постійна a_0 задовольняє нерівності (7).

Тоді для усіх d_1 і d_2 таких, що $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$ керування (8) розв'язує задачу (d_1, d_2) −глобального позиційного синтезу для робастної системи (9) із матрицею R, яка задається формулою (12). До того ж траєкторія $x(t)$ замкненої системи (24), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, d_1, d_2)$, для якого виконана нерівність (28).

У *підрозділі 3.3* розв'язана задача синтезу для двовимірної робастної системи. У *підрозділі 3.4* наведено розв'язок задачі *керування рухом матеріальної точки з урахуванням невідомого обмеженого тертя*. Рух цієї системи описується системою рівнянь

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p(t, x_1, x_2)x_2 + u. \tag{31}$$

Доданок $p(t, x_1, x_2)x_2 -$ сила тертя, до того ж коефіцієнт нелінійного в'язкого тертя $p(t, x_1, x_2) -$ *невідома* функція, яка задовольняє обмеженню $d_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq d_2$. Випадок $p(t, x_1, x_2) = const < 0$ відповідає в'язкому тертю, яке пропорційне першому ступеню швидкості. Обмеження на $p(t, x_1, x_2)$ не виключають випадку «від'ємного» тертя. Рівняння (6), яке визначає функцію керованості $\Theta(x_1, x_2)$, має вигляд

$$\Theta^4 = 54\, x_1^2 + 36\, \Theta\, x_1 x_2 + 9\Theta^2 x_2^2. \qquad (32)$$

(тут враховано, що $a_0 = 1/3$). Керування (8) набуває вигляду

$$u(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}. \qquad (33)$$

У дисертаційній роботі отриманий наступний результат.

Нехай $0 < \gamma_1 < 1$. Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатній корінь рівняння (32). Нехай область розв'язку задачі синтезу – еліпсоїд, який задається рівністю $Q = \{x\colon \Theta(x) \leq c\}$. Нехай коефіцієнт нелінійного в'язкого тертя задовольняє нерівності

$$\frac{(1-\gamma_1)3}{(3-2\sqrt{3})c} \leq p(t, x_1, x_2) \leq \frac{(1-\gamma_1)3}{(3+2\sqrt{3})c}$$

Тоді керування (33) розв'язує задачу локального позиційного синтезу для робастної системи (31). Водночас траєкторія $x(t)$ замкненої системи (24), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in Q$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0)$, для якого виконана нерівність (30).

У *підрозділі 3.5* наведено розв'язок задачі синтезу для робастної коливальної системи. У *підрозділі 3.6* розв'язана задача синтезу для зв'язаного осцилятора.

У **четвертому розділі** розглянуто випадок декількох незалежних збурень. У *підрозділі 4.1* наведено розв'язок задачі синтезу для робастної системи у випадку одновимірного керування. У *підрозділі 4.2* розв'язана задача синтезу для лінійної системи у випадку багатовимірного керування. У *підрозділі 4.3* доведені теореми про розв'язок задачі синтезу для робастної системи у випадку багатовимірного керування.

Множиною припустимих збурень $\mathcal{R}$ називається множина матриць $R(t, x)$, що складаються з функцій $r_{ij}(t, x)\colon [0, +\infty) \times Q \to \mathbb{R}$, що задовольняють наступним умовам:

1. $r_{ij}(t, x)$ неперервна по t і x;
2. у кожній області $K_1(t_1, \rho_2) = \{(t, x)\colon 0 \leq t \leq \infty,\ \|x\| \leq \rho_2\}$, $\rho_2 > 0$ вектор функція $R(t, x)x$ задовільняє умові Ліпшиця

$$|R(t, x'')x'' - R(t, x')x'| \leq l_1(\rho_2)\|x'' - x'\|;$$

3. для всіх (t,x): $[0,+\infty) \times Q$ функції $r_{ij}(t,x)$ задовільняють обмеженню (23).

Під *локальним позиційним синтезом* обмеженого керування для робастних систем у випадку *декількох незалежних збурень* будемо розуміти знаходження такої межі зміни збурення Δ, що для усіх збурень $R(t,x) \in \mathcal{R}$ траєкторія $x(t)$ системи, замкненої керуванням $u = u(x)$, заданим формулою (20)

$$\dot{x} = (A_0 + K + R(t,x))x + B_0 u(x), \tag{34}$$

яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in Q$, закінчується у початку координат у деякий *скінченний* момент часу $T(x_0, \mathcal{R})$, тобто $\lim_{t \to T(x_0,\mathcal{R})} x(t) = 0$. У випадку, якщо $Q = \mathbb{R}^n$, синтез називається *глобальним*.

У підрозділі 4.3.1 розглянуто випадок, коли у матриць $R_i(t,x)$ тільки елементи главної наддіагоналі не дорівнюють нулю, а $\hat{R}(t,x) = 0$. Нехай матриця $\tilde{R}$ дорівнює матриці $R(t,x)$ при $r_{mj}(t,x) = 1$. Позначимо

$$\tilde{G} = |(F^1)^{-1}| \cdot (F\tilde{R} + \tilde{R}^* F). \tag{35}$$

Теорема 9. Нехай $0 < \gamma_1 < 1$. Нехай

$$\Delta = \frac{1-\gamma_1}{\rho(\tilde{G})} \tag{36}$$

Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (18), де постійна a_0 задовольняє нерівності (19).

Тоді в області Q, яка задається рівністю $Q = \{x\colon \Theta(x) \leq c\}$, керування (20) розв'язує задачу локального позиційного синтезу для робастної системи (21). До того ж траєкторія $x(t)$ замкненої системи (34), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in Q$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, \mathcal{R})$, для якого виконана нерівність (30). У випадку, коли $K = 0$, синтез буде глобальним.

У підрозділі 4.3.2 розглянуто випадок, коли матриця $R(t,x)$ має загальний вигляд (22).

Теорема 10. Нехай $0 < \gamma_1 < 1$. Визначимо функцію керованості $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння (18), де постійна a_0 задовольняє нерівності (19). Нехай область розв'язку задачі синтезу – еліпсоїд, який задається рівністю $Q = \{x\colon \Theta(x) \leq c\}$. Нехай матриця $\tilde{G}$ задається формулою (35). Нехай

$$\Delta = \frac{1-\gamma_1}{\max\{c^{n_1}, c\}\rho(\tilde{G})} \tag{37}$$

Тоді в області Q керування (20) розв'язує задачу локального позиційного синтезу для робастної системи (21) з матрицею R, яка задається формулою (22). Водночас траєкторія $x(t)$ замкненої системи (34), яка починається у довільній початковій точці $x(0) = x_0 \in Q$, закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу $T(x_0, \mathcal{R})$, для якого виконана нерівність (30).

Зауваження 6. Δ монотонно спадає за γ_1, при цьому оцінка (30) на час руху $T(x_0, \mathcal{R})$ також монотонно спадає за γ_1. Величина $\Delta \rightarrow max$ при $\gamma_1 \rightarrow 0$, до того ж $T(x_0, \mathcal{R}) \rightarrow +\infty$ при $\gamma_1 \rightarrow 0$.

У *підрозділі 4.4* розв'язана задача зупинки коливань керованого руху системи двох зв'язаних маятників.

ВИСНОВКИ

В дисертації отримані наступні результати:

1. Побудовано керування, яке задовольняє наперед заданим обмеженням і розв'язує задачу переходу з довільної початкової точки деякого околу початку координат у початок координат за кінцевий час для лінійних робастних систем при наявності збурень. Побудова керування базується на методі функції керованості В. І. Коробова.
2. Межі зміни збурення знаходяться з умови того, що повна похідна від функції керованості в силу збуреної системи має бути від'ємною.
3. Запропоновано декілька підходів до визначення меж зміни збурення. Доведення засновано на застосуванні теорії стійкості інтервальних матриць.
4. Знайдено найширший інтервал зміни збурень у випадку винесення спільного множника для задачі глобального позиційного синтезу і локального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з одновимірним керуванням. У випадку, коли матриця збурень містить ненульові елементи тільки на головній наддіагоналі, синтез буде глобальним, до того ж межа зміни збурення залежить від найбільшого та найменшого власних значень допоміжної матриці. У випадку матриці збурень загального виду синтез, взагалі кажучи, буде локальним, причому межа зміни збурення залежить від найбільшого та найменшого власних значень допоміжної матриці, елементи котрої поліноміально залежать від параметру. Для оцінки власних значень цієї матриці застосовуються теореми інтервального аналізу.
5. Отримані межі зміни збурень у випадку декількох незалежних збурень для задачі глобального позиційного синтезу і локального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з одновимірним керуванням.
6. Отримана загальна межа зміни збурень у випадку декількох незалежних збурень для задачі глобального позиційного синтезу і локального позиційного синтезу для лінійних робастних систем з багатовимірним керуванням. Межа залежить від спектрального радіусу допоміжної матриці та розмірів еліпсоїда, у якому проводиться розв'язок задачі синтезу.
7. Отримані оцінки зверху та знизу на час руху з довільної початкової точки у початок координат.
8. Наведені механічні приклади застосування отриманих результатів: керування рухом матеріальної точки з урахуванням невідомого обмеженого тертя; задача синтезу для робастної коливальної системи; задача синтезу для зв'язаного осцилятора; зупинка коливань керованого руху системи двох зв'язаних маятників.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Коробов В. И. Функция управляемости в случае многомерного управления / В. И. Коробов, Т. В. Куприянова // Вісник Харківського університету, Сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2004. – № 645. – вип. 54. – С. 153-162.

2. Ревина Т. В. Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости / Т. В. Ревина // Динамические системы. Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского. – Симферополь. – 2008. – Вып. 25. – С. 83-93.

3. Ревина Т. В. Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального робастного синтеза / Т. В. Ревина // Вісник Харківського університету, Сер. «Математика, прикладна математика і механіка» – 2014. – № 1133. – Вип. 70. – С. 140-155.

4. Korobov V. I. Robust feedback synthesis problem for systems with a single perturbation / V. I. Korobov, T. V. Revina // Communications in Mathematical Analysis. – 2014. – Vol. 17, no. 2. – pp. 217 – 230.

5. Коробов В. И. Решение задачи робастного позиционного синтеза для канонической системы / В. И. Коробов, Т. В. Ревина // Доповіді Національної академії наук України, рубрика Математика. - 2015. – №6. – С. 13-18.

7. Коробов В. И. Робастный позиционный синтез для канонической системы / В. И. Коробов, Т. В. Ревина // Український математичний журнал. – 2016. – Т. 68, № 3, С. 341-356.

8. Коробов В. И. Управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения / В. И. Коробов, Т. В. Ревина // Механика. Исследования и инновации. – Вып. 9. – Гомель. – 2016. – С. 61-66.

9. Korobov V. I. On robust feedback synthesis for systems with multidimensional control / V. I. Korobov, T. V. Revina // Preprint arXiv.org, Cornell University Library, 2 Nov 2016. – 19 p. – (Availiable at http://arxiv.org/abs/1611.00581).

10. Korobov V. I. The controllability function as the time of motion / V. I. Korobov , T. V. Kupriyanova // First Karazin scientific readings. Book of abstracts. Kharkiv: Karazin Kharkiv National University. – 2004. – pp. 17-18.

11. Коробов В. И. Функция управляемости как время движения / В. И. Коробов, Т. В. Куприянова // 7 Крым. Межд. мат. школа «Метод функций Ляпунова и его прилож.»: тез докл. – Тавр. национ. ун-т. – Симф. – 2004. – С. 76.

12. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для линейных систем на основе допустимого принципа максимума / В. И. Коробов, Т. В. Ревина // 8 Крым. Межд. мат. школа «Метод функций Ляпунова и его прилож.»: тез. докл. – Тавр. национ. ун-т. – Симф.: ДиАйПи. – 2006. – С. 145.

13. Revina T. V. One method of synthesis problem numeral solution for the linear systems / T. V. Revina // Lyapunov memorial conference. Book of abstracts. – Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. – 2007. – p. 127.

14. Ревина Т. В. Численное решение одной задачи синтеза для линейной системы с помощью разрывного управления / Т. В. Ревина // 9 Крым. Межд. мат. школа «Метод функций Ляпунова и его прилож.»: тез докл. – Тавр. национ. ун-т. – Симф. – 2008. – С. 143.

15. Ревина Т. В. Один метод решения задачи синтеза управления для робастных систем / Т. В. Ревина // «Совр. проблемы математики и ее приложения»: тез. докл. межд. конф. – Харьков. – 2011. – С. 165.

16. Ревина Т. В. Решение задачи синтеза управления для одной робастной двумерной системы / Т. В. Ревина // «Совр. проблемы математики и ее приложения в естеств. науках и информац. технологиях»: тез. докл. межд. конф. – Харьков. – 2012. – С. 91.

17. Ревина Т. В. Решение одной задачи робастного синтеза / Т. В. Ревина // «Совр. проблемы математики, механики и информатики»: тез. докл. межд. школы-конф. "Тараповские чтения-2013" – Харьков. – 2013 г. – С. 110.

18. Revina T. V. Robust feedback synthesis problem for a system with two perturbations / T. V. Revina // II International conference «Analysis and mathematical physics II»: Book of abstracts. – Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. – 2014. – p. 39.

19. Korobov V. I. Feedback control for a robust canonical system / V. I. Korobov, T. V. Revina // III International conference «Analysis and mathematical physics»: Book of abstracts. – Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU. – 2015. – p. 26.

20. Revina T. V. Robust feedback synthesis for a disturbed canonical system / T. V. Revina // International conference «Dynamical systems and their applications»: Book of abstracts. – Kyiv, National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics. – 2015. – p. 47.

21. Ревина Т. В. Решение задачи робастного позиционного синтеза в случае нескольких возмущений / Т. В. Ревина // «Совр. проблемы естественных наук»: тез. докл. межд. школы-конф. "Тараповские чтения-2016" – Харьков. – 2016 г. – С. 65-66.

22. Revina T. V. On robust feedback synthesis for the perturbed double integrator / T. V. Revina // IV International Conference «Analysis and mathematical physics»: Book of abstracts, Kharkiv: B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU, 2016. – pp. 28-29.

23. Revina T. V. On robust feedback synthesis for the system of two coupled pendulums/ T. V. Revina // International conference «Differential equations and control theory»: Book of abstracts, Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 2016. – p. 27.

АНОТАЦІЯ

Ревіна Т. В. Позиційний синтез для робастних лінійних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задачі синтезу для одного класу лінійних систем, тобто побудові керування у вигляді функції від фазових координат, і такого, що воно задовольняє наперед заданим обмеженням, і траєкторія системи з цим керуванням, яка починається у довільній початковій точці деякого околу початку координат, закінчується у початку координат у скінченний момент часу. На основі підходу, запропонованого В. І. Коробовим та розвиненого В. І. Коробовим та Г. М. Скляром, в дисертаційній роботі запропоновано розв’язок задачі синтезу для лінійної робастної системи з неперервними обмеженими невідомими збуреннями. Розглядаються випадки як одновимірного, так і багатовимірного керування. Знайдено межі невідомих збурень, при яких керування, яке розв’язує задачу синтезу для лінійної системи без збурень, розв’язує також задачу синтезу і для збуреної системи. Пропонуються різні підходи до визначення границь зміни збурень. Отримані оцінки зверху і знизу на час руху з довільної початкової точки у початок координат. Наведені механічні приклади застосування одержаних результатів: керування рухом матеріальної точки з урахуванням невідомого тертя; задача синтезу для робастної коливальної системи; задача синтезу для зв’язаного осцилятора; зупинка коливань керованого руху системи двох зв'язаних маятників.

Ключові слова: метод функції керованості, задача позиційного синтезу, канонічна система, обмежене керування, невідоме обмежене збурення, робастні системи, попадання за скінченний час, неточні системи.

АННОТАЦИЯ

Ревина Т. В. Позиционный синтез для робастных линейных систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, 2017.

Диссертационная работа посвящена исследованию задачи синтеза для одного класса линейных систем – задаче построения управления в виде функции от фазовых координат, такого, что траектория системы с этим управлением, начинающаяся в произвольной начальной точке некоторой

окрестности начала координат, оканчивается в начале координат в конечный момент времени. При этом управление удовлетворяет заранее заданным ограничениям, что усложняет задачу. На основании подхода, предложенного В. И. Коробовым и развитого В. И. Коробовым и Г. М. Скляром, в диссертационной работе получено решение задачи синтеза для линейной робастной системы с непрерывными ограниченными неизвестными возмущениями. Рассматриваются случаи как одномерного управления, так и многомерного управления. Решается следующая задача: найти ограничения на неизвестные возмущения, при которых управление, решающее задачу синтеза для линейной системы без возмущений, решает также задачу синтеза и для возмущенной системы. Границы изменения возмущений находятся из условия, что полная производная от функции управляемости в силу возмущенной системы является отрицательной. Также из этого условия в силу основной теоремы метода функции управляемости В. И. Коробова получены оценки сверху и снизу на время движения из произвольной начальной точки в начало координат.

Предложены разные подходы к определению границ изменения возмущений. Найден наибольший интервал изменения возмущений в случае вынесения общего множителя для задачи глобального и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем с одномерным управлением. В случае, если матрица возмущений содержит ненулевые элементы только на главной наддиагонали, синтез будет глобальным, причем граница изменения возмущения зависит от наибольшего и наименьшего собственных значений вспомогательной матрицы. В случае матрицы возмущений общего вида синтез, вообще говоря, будет локальным, причем границы изменения возмущения зависят от наибольшего и наименьшего собственных значений вспомогательной матрицы, элементы которой полиномиально зависят от параметра. Для оценки собственных значений этой матрицы применяются теоремы интервального анализа. Получена граница изменения возмущений в случае нескольких независимых возмущений для задачи глобального и локального позиционного синтеза для линейных робастных систем с одномерным и многомерным управлением. Она зависит от спектрального радиуса вспомогательной матрицы и размеров эллипсоида, в котором производится решение задачи синтеза.

Приведены механические примеры применения полученных результатов: управление движением материальной точки с учетом неизвестного трения; задача синтеза для робастной колебательной системы; задача синтеза для связанного осциллятора; остановка колебаний управляемого движения системы двух связанных маятников. В некоторых из указанных примеров показано, что полученные границы возмущений можно расширить.

Ключевые слова: метод функции управляемости**,** задача позиционного синтеза, каноническая система, ограниченное управление, неизвестное ограниченное возмущение, робастные системы, попадание за конечное время, неточные системы.

ABSTRACT

T. V. Revina. On Positional Synthesis for Robust Linear Systems. – Manuscript.

The thesis for obtaining the degree of candidate of sciences (Ph.D.) in physics and mathematics, area of research (speciality): 01.01.02 – Differential Equations. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, – 2017.

The PhD thesis deals with solving a synthesis problem for one class of linear systems. The problem lies in constructing such a control as a function of the phase coordinates, that the trajectory of the system with this control, starting at an arbitrary initial point from some neighborhood of the origin, ends at the origin at a finite time. Besides, the control should satisfy the predetermined constraints. On the basis of an approach proposed by V. I. Korobov and developed by V. I. Korobov and G. M. Sklyar, we deduce a solution of the synthesis problem for a robust linear system with unknown continuous bounded perturbations. We consider cases both with a one-dimensional control and with multi-dimensional controls. In the thesis, we find such constraints for unknown perturbations that the control which solves the synthesis problem for a system without perturbation also solves the synthesis problem for a perturbed system. Several approaches to determining the ranges of perturbations are proposed. The time of motion (settling-time function) from an arbitrary initial point to the origin is estimated both from below and from above. As an example, we consider the following mechanical systems: a control over the motion of a car on the surface with an unknown bounded friction; a synthesis problem for the robust oscillatory system; a synthesis problem for the connected oscillator; stopping the oscillations of the system of two coupled pendulums.

Keywords: controllability function method, feedback synthesis problem, canonical system (integrator system), bounded control, unknown bounded perturbation, robust systems, finite-time stabilization, uncertain systems.