МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина

На правах рукописи

Бебия Максим Отариевич

УДК 517.977

Стабилизация и синтез ограниченных управлений для нелинейных систем с неуправляемым неустойчивым первым приближением

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Коробов Валерий Иванович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Харьков – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{R}^n$	– n-мерное действительное евклидово пространство;
$\|x\|$	– евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$;
(x, y)	– скалярное произведение векторов $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$;
A^*	– матрица транспонированная к матрице A;
$C^i(M)$	– пространство i раз непрерывно дифференцируемых на множестве M функций;
$\sigma(A)$	– спектр матрицы A.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Управляемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений возникают при исследовании большого класса механических, биологических, экономических и других процессов. Основы математической теории управления были заложены Л.С. Понтрягиным [45]. Значительный вклад в ее основы и развитие были внесены Р. Беллманом, Р.В. Гамкрелидзе, В.Г. Болтянским, Р. Каллманом, Н.Н. Красовским, А.Б. Куржанским, В.И. Коробовым и многими другими.

Многие вопросы теории линейных управляемых систем являются хорошо изученными, а сама теория носит завершенный характер [12, 15, 23, 37, 41, 42, 44, 69, 115, 118]. Решены задачи управляемости, синтеза, стабилизации, оптимального быстродействия и многие другие. В то же время большинство реальных динамических систем имеют нелинейную природу. Эти факторы обусловливают возросший интерес к исследованию нелинейных управляемых систем [13,37,60,61,79,81,86,87,90,100,101,106,112,118,120].

Исследование качественных свойств нелинейных систем является интенсивно развивающимся направлением в современной математической теории управления. Наряду с вопросами управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости, отображаемости и др. стоят вопросы о конкретных методах построения управлений для нелинейных систем. В данной диссертации разработаны методы построения позиционных управлений для класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем.

Важной задачей теории управления является задача стабилизации. В основе большинства подходов к решению задачи стабилизации лежит метод функции А.М. Ляпунова. Задача оптимальной стабилизации, в том числе оптимальной стабилизации по первому приближению, была рассмотрена Н.Н. Красовским [40]. На сегодняшний день не существует универсальных методов построения стабилизирующих управлений и функций Ляпунова для нелинейных систем. Вопросы стабилизации некоторых классов нелинейных систем были исследованы, например, в работах [61, 80, 88, 96, 100, 120].

Ещё одной важной проблемой теории управления является задача позиционного синтеза ограниченных управлений. Впервые решение задачи позиционного синтеза для n – мерной линейной системы было получено В.И. Коробовым в [18]. В той же работе была решена задача синтеза по первому приближению. Предложенный в [18] подход, названный методом функции управляемости, является развитием метода функции Ляпунова. Метод функции управляемости позволяет добиться конечности времени попадания в точку покоя. Далее этот подход был развит в работах В.И. Коробова, Г.М. Скляра, а также Г.А. Бессонова, В.А. Скорика и многих других. Упомянем лишь некоторые из этих работ [9, 10, 21, 22, 25, 26, 32, 37, 46, 47, 94, 95, 97].

Другой подход к исследованию нелинейных систем состоит в их отображении на системы более простого вида, свойства которых хорошо изучены. Важным классом таких систем являются треугольные системы, которые впервые были рассмотрены В.И. Коробовым в [17]. В этой работе был предложен конструктивный метод отображения треугольных систем на линейные с помощью замены переменных и управления. Дальнейшее развитие теории отображения нелинейных систем на линейные было достигнуто, например, в работах [28, 48–51, 70, 74, 76, 99, 109, 113].

Несмотря на широкое развитие методов нелинейной теории управления, задача синтеза ограниченных управлений и задача стабилизации требуют дальнейшего исследования для широкого класса нелинейных систем. Для неуправляемых по первому приближению систем известны лишь частные подходы, основанные на особом виде нелинейностей.

Задачи построения управлений для нелинейных систем являются актуальными по сей день. Настоящая диссертация посвящена решению задач стабилизации и синтеза для класса нелинейных систем с неуправляемым, неустойчивым первым приближением. Эти системы не отображаются на линейные системы известными методами. Для одного класса таких нелинейных систем в явном виде построено стабилизирующее управление и функция Ляпунова. Для другого класса таких систем построена функция управляемости и ограниченное позиционное управление, обеспечивающее попадание в точку покоя за конечное время. Также, в работе предложены и исследованы классы сингулярных треугольных систем, которые отображаются на нелинейную систему специального вида.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертация выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и управления Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина в рамках государственной научно-исследовательской работы по теме «Решение задач управляемости, линеаризации, синтеза и стабилизации для нелинейных систем» (номер государственной регистрации 0111U010365), а также на кафедре прикладной математики Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина в рамках государственной научно-исследовательской работы по теме «Исследования качественных свойств динамических систем» (номер государственной регистрации 3-11-16).

Цель и задачи исследования. *Целью* диссертационной работы является построение управлений, которые решают *задачи* стабилизации и синтеза, для классов нелинейных систем с неуправляемым неустойчивым первым приближением.

Объектами исследования данной диссертационной работы являются классы нелинейных систем с неуправляемым неустойчивым первым приближением, классы сингулярных треугольных систем, а также сингулярное уравнение Ляпунова специального вида.

Предмет исследования. Методы построения классов стабилизирующих управлений, а также управлений, обеспечивающих конечность времени попадания в точку покоя. Условия отображаемости сингулярных треугольных систем на нелинейные системы специального вида. Условия разрешимости и описание класса положительно определенных решений сингулярного уравнения Ляпунова, возникающего при решении поставленных задач.

Методы исследования. Для решения поставленных в работе задач применялся метод стабилизации и синтеза по нелинейному приближению. Для систем нелинейного приближения применялись метод функции Ляпунова и метод функции управляемости.

Научная новизна полученных результатов. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Построен класс стабилизирующих управлений для канонической системы со многими степенными нелинейностями при дополнительном ограничении на степени в правой части системы.

2. Решена задача стабилизации для класса нелинейных систем, нелинейным приближением которых является каноническая система со многими степенными нелинейностями.

3. Построено ограниченное позиционное управление, которое обеспечивает конечность времени попадания в точку покоя траекторий канонической системы с одной степенной нелинейностью.

4. Решена задача синтеза для класса нелинейных систем, нелинейным приближением которых является каноническая системы с одной степенной нелинейностью.

5. Исследован вопрос об отображаемости сингулярных треугольных систем на каноническую систему с одной степенной нелинейностью с помощью замены координат и управления. Такое отображение построено в явном виде. Предложены широкие классы сингулярных треугольных систем, для которых обратное отображение найдено в явном виде.

Причем, исходное управление явно выражается через новое управление. На основе такого отображения для этих систем построены стабилизирующие и синтезирующие управления.

6. Получены условия разрешимости и описан класс положительно определенных решений одного сингулярного уравнения Ляпунова.

Практическое значение полученных результатов. Работа носит, в основном, теоретический характер. Результаты диссертационной работы развивают теорию нелинейных управляемых систем. Также полученные результаты могут быть использованы для исследования более широких классов нелинейных систем, которые могут возникать и в ряде практических задач теории управления.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и общее руководство работой принадлежат научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору В.И. Коробову. Важно отметить, что общий метод решения задачи синтеза был предложен В.И. Коробовым [18]. Применяя этот метод, автор диссертации построил класс управлений для нелинейных неуправляемых по первому приближению систем. Формулировки и доказательства результатов диссертации получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Международная школа-конференция «Тараповские чтения: „Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях“», посвященная 50-летию механико-математического факультета, Харьков, 17- 22 апреля 2011 г.;

2. Международная школа-конференция «Тараповские чтения: „Современные проблемы математики, механики и информатики“», Харьков, 29

сентября - 4 октября 2013 г.;

3. IX международная конференция для молодых ученых: „Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях“, Харьков, 25-26 апреля, 2014 г.;

4. II International conference „Analysis and Mathematical Physics“, Kharkiv, June 16-20, 2014;

5. Городской семинар по математической теории управления ХНУ им. В.Н. Каразина (руководитель семинара – проф. Г.М. Скляр), Харьков, май 2015 г.;

6. III International conference „Analysis and Mathematical Physics“, Kharkiv, June 15-19, 2015;

7. International conference „Dynamical Systems and Their Applications“, Kyiv, June 22-26, 2015;

8. Научный семинар кафедры прикладной математики ХНУ им. В.Н. Каразина (руководитель семинара – проф. В.И. Коробов), Харьков, октябрь 2015 г.;

9. Международная конференция «Тараповские чтения: „Современные проблемы естественных наук“», Харьков, 1-15 марта 2016 г.;

10. IV International conference „Analysis and Mathematical Physics“, Kharkiv, June 13-17, 2016.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 14 научных публикациях, в том числе в 6 статьях [1, 5, 6, 39, 65, 66] в специализированных журналах (1 статья опубликована в журнале с импакт-фактором, который включен в международные наукометрические базы данных Scopus и Web of Science) и в 8 тезисах выступлений на международных научных конференциях [2–4, 7, 62–64, 67].

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, выводов и списка использованных источников, который содержит 120 наименований и занимает 14 страниц. Общий объем диссертации составляет 117 страниц. Основные результаты, вынесенные на защиту, изложены в разделах 2, 3, 4 и 5.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Валерию Ивановичу Коробову за постановку задач, внимание и поддержку при написании работы.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

В настоящем разделе дан обзор литературы по теме диссертации и обоснован выбор направлений исследования.

1.1. Обзор литературы и выбор направления исследований

Данная диссертация посвящена решению задач стабилизации и позиционного синтеза ограниченных управлений для нелинейных неуправляемых по первому приближению систем.

Под задачей стабилизации для системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$

где $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемая функция, $f(0, 0) = 0$, понимается задача построения такого управления $u = u(x)$ ($u(0)$=0), что нулевая точка покоя замкнутой системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ будет асимптотически устойчива в смысле Ляпунова. В случае, когда управление $u(x)$ является гладкой (непрерывно дифференцируемой) функцией будем говорить о гладкой стабилизации.

Ставшая классической, задача стабилизации линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r$$

изучалась во многих работах. Вспомним, например, монографии [12,13,61, 69, 81, 115, 118]. Хорошо известно, что в случае когда пара (A, B) является управляемой, т.е. $rg(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$, стабилизирующее управление может быть найдено в виде линейной обратной связи $u = Px$, где P – $n \times r$-матрица. Более того, доказано (см. [118, стр. 44, теорема 2.9.]), что для произвольного полинома $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$, где $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$, найдется матрица $P \in \mathbb{R}^{n\times r}$, такая что $p(\lambda) = \det(\lambda I - A - BP)$. Это дает возможность смотреть на задачу стабилизации, как на задачу перемещения спектра. Действительно, для того, чтобы управление $u = Px$ было стабилизирующим достаточно выбрать коэффициенты p_i, $i = 1, \ldots, n$, так, чтобы корни полинома $p(\lambda)$ лежали в левой полуплоскости. При таком выборе полинома $p(\lambda)$ мы имеем, что $Re\ \sigma(A + BP) < 0$ и замкнутая система $\dot{x} = (A + BP)x$ асимптотически устойчива.

Один из подходов к исследованию задачи стабилизации нелинейных управляемых по первому приближению систем опирается на теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению (см. [90, стр. 139, теорема 4.7]). Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 1.1. Рассмотрим нелинейную систему вида

$$\dot{x} = Ax + g(t, x), \quad x \in R^n. \tag{1.1}$$

Пусть функция $g(t, x)$ удовлетворяет условию $|g(t, x)| \le M\|x\|^{1+\alpha}$ для некоторых $M > 0$ и $\alpha > 0$. Тогда:

1)если $Re\ \sigma(A) < 0$, то нулевая точка покоя системы (1.1) асимптотически устойчива;

2)если $\max\limits_{\lambda_i \in \sigma(A)} Re\ \lambda_i > 0$, то нулевая точка покоя системы (1.1) неустойчива.

Из последней теоремы следует, что управление $u = Px$, которое рассматривалось выше, стабилизирует и нелинейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(t, x).$$

Важную роль при исследовании устойчивости линейных и нелинейных систем играет матричное уравнение Ляпунова вида

$$A^*F + FA = -W, \tag{1.2}$$

где A, F и W – некоторые действительные $n \times n$-матрицы. Так, хорошо известен следующий результат.

Теорема 1.2. Пусть W – произвольная положительно определенная матрица. Уравнение (1.2) имеет единственное положительно определенное решение F тогда и только тогда, когда система $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчива.

Напомним, что матрица A называется устойчивой, если $Re\,\sigma(A) < 0$. Отметим, что если матрица A устойчива, а матрица W положительно определена, то функция $V = (Fx, x)$, где F – решение уравнения (1.2), является функцией Ляпунова системы $\dot{x} = Ax$.

Матричное уравнение Ляпунова изучалось, например, в работах [11, 14, 43, 56–59, 68, 78, 115]. Известно, что для разрешимости уравнения (1.2) при произвольной симметрической матрице W в правой части достаточно, чтобы матрица A была устойчивой [43, стр. 240, теорема 8.5.1]. Более того, если матрица W положительно определена, то решение этого уравнения F положительно определено тогда и только тогда, когда матрица A устойчива. В настоящей диссертационной работе важную роль играет матричное уравнение Ляпунова (1.2) в сингулярном случае, когда $\det(A) = 0$. Такое уравнение не разрешимо в классе положительно определенных матриц, если матрица W положительно определена.

Одним из подходов к решению задачи стабилизации для нелинейных управляемых систем вида $\dot{x} = f(x, u)$ состоит в построении управления $u = u(x)$ и функции Ляпунова $V(x)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

В данной диссертационной работе исследован широкий класс нелинейных неуправляемых по первому приближению систем, для которых построен класс стабилизирующих управлений и функций Ляпунова. Причем функцию Ляпунова удалось построить в виде квадратичной формы.

При таком построении возникла необходимость в исследовании матричного уравнения Ляпунова в особом случае, когда $\det(A) = 0$. В диссертации получены условия разрешимости и описан класс решений уравнения Ляпунова для вырожденных матриц A специального вида.

Условие конечности времени попадания в ноль приводит к следующей важной задаче теории управления. Задача допустимого позиционного синтеза для системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$$

состоит в построении непрерывного при $x \neq 0$ управления $u = u(x) \in \Omega$ такого, что траектория $x(t)$ замкнутой системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$ (Q – некоторая окрестность начала координат), оканчивается в нуле в некоторый конечный момент времени $T(x_0) < +\infty$, причем $x(t) \in Q$ при всех $t \in [0, T(x_0)]$.

Для решения задачи синтеза В.И. Коробовым был предложен метод функции управляемости [18]. В работе [18] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.3 (В.И. Коробов**).** Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, вектор-функция $f(x, u)$ в каждой точке области $\{(x, u) : \ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, \ u \in \Omega\}$ удовлетворяет условию Липшица $\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \leq L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|)$.

Пусть существует функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\Theta(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\Theta(0) = 0$;

2) $\Theta(x)$ непрерывна всюду и непрерывно дифференцируема всюду за исключением, быть может, точки $x = 0$;

3) существует число $c > 0$ такое, что множество $\mathbb{Q} = \{x : \ \Theta(x) \leq c\}$ является ограниченным и $\mathbb{Q} \subset \{x : \ \|x\| < R\}$;

4) существует функция $u(x) \in \Omega$ при $x \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$$

при некотором $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, причем $u(x)$ в каждой области $K(\rho_1, \rho_2) = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\| \quad \forall \quad x', x'' \in K(\rho_1, \rho_2).$$

Тогда траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{Q}$ в момент времени $t = 0$, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый момент времени $T(x_0) \leq (\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, $x(t) \in \mathbb{Q}$, $x(t) = 0$ при $t > T(x_0)$, причем если $\alpha = \infty$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Аналогичная теорема [37, стр. 14, теорема 1.1] справедлива для случая неавтономной системы $\dot{x} = f(t, x, u)$. В этом случае функция управляемости зависит от переменных t и x, т.е. $\Theta = \Theta(t, x)$. Основным требованием является выполнение неравенства

$$\frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(t, x),$$

которое обеспечивает конечность времени попадания траекторий замкнутой системы $\dot{x} = f(t, x(t), u(t, x))$ в точку $x^1 = 0$.

В работе [18] был предложен конструктивный метод построения функции управляемости и управления для линейной полностью управляемой системы с постоянными матрицами

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \ u \in \mathbb{R}^r$$

при ограничении на управление $|u_i| \leq d_i$, ($d_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$, – заданные числа). В той же работе была рассмотрена задача синтеза ограниченных управлений для нелинейных систем с управляемым первым приближением. Еще один метод построения функции управляемости с использованием матриц интегрального типа был предложен В.И. Коробовым и Г.М. Скляром в [26]. Так, было показано, что произвольная невозрастающая неотрицательная на полуоси $[0,+\infty]$ функция $f(s)$, имеющая по крайней мере m точек убывания, и такая, что при $0<\Theta<\overline{\theta}_f: \int_0^\infty s^{2m+1}e^{-2\lambda_0 s\Theta}f(s)ds<\infty$ (m – степень минимального полинома матрицы A, λ_0 – минимальная вещественная часть собственных значений матрицы A) порождает синтезирующее управление. В этом случае при достаточно малом $a_0>0$ функция управляемости может быть задана, как единственное положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta^\nu=(N_f^{-1}(\Theta)x,x),\quad a_0>0,\quad \nu\geq 1,$$

где $N_f(\Theta)=\int_0^\infty f(\frac{t}{\Theta})e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$. Тогда синтезирующее управление может быть выбрано в виде $u(x)=-\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}(\Theta(x))x$.

Отметим, что функция управляемости определялась неявно, как корень некоторого уравнения. Эта интересная особенность отличает метод функции управляемости от метода функции Ляпунова, которую обычно определяют в явном виде. Особый интерес представляет случай [26, 54, 55], когда

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i}f_i(x,u(x))=-1.$$

В этом случае функция управляемости имеет смысл времени движения, т.е. $T(x)=\Theta(x)$. Если дополнительно потребовать выполнение условия

$$\min_{u\in\Omega}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i}f_i(x,u)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i}f_i(x,u(x))=-1,$$

то, рассмотрев функцию $\omega(x)=-\Theta(x)$, мы приходим к уравнению Беллмана

$$\max_{u\in\Omega}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i}f_i(x,u)=1$$

метода динамического программирования [8].

В дальнейшем метод функции управляемости применялся для решения различных задач теории управления. Вспомним некоторые интересные результаты.

С помощью метода функции управляемости В.И. Коробовым совместно с В.А. Скориком была решена задача синтеза инерционных управлений. В этой задаче ограничения накладываются не только на величину самого управления, но и на величины его производных, т.е. $\|u^{(k)}\| \le d_k$, $k = 0, 1, \ldots, l$ ($d_k > 0$ – заданные числа). В работах [36], [94] были рассмотрены линейные системы с одномерным и многомерным управлением, а также нелинейные системы по первому приближению. Класс локально линеаризуемых аффинных системы вида $\dot{x} = a(x) + b(x)u$ с одномерным управлением рассмотрен в [38].

Задача синтеза ограниченных управлений для линейной неавтономной системы рассматривалась в [9]. В [10] решена задача синтеза для неавтономной системы по первому приближению. В работе [91] был построен оптимальный синтез в задаче со смешанным критерием качества. Задача попадания не в точку покоя для линейной системы была рассмотрена в [97]. Метод функции управляемости был развит на случай бесконечномерных пространств [21, 22, 46, 47, 52] и получил название метода функционала управляемости.

Другой подход к решению задачи синтеза основан на применении принципа максимума Л.С. Понтрягина [45], который часто приводит к выбору кусочно постоянных управлений. Например, можно строить синтез оптимальный в смысле быстродействия. Так для линейной системы $\dot{x} = Ax+bu$ при ограничении на управление $|u(t)| \le 1$ оптимальное управление является кусочно-постоянным, принимает значения ± 1 и, в случае когда спектр матрицы A является вещественным, имеет не более $n-1$ точек переключения [45]. В.И. Коробовым и Г.М. Скляром была поставлена и решена min-проблема моментов А.А. Маркова [24, 27], которая является развитием классической проблемы моментов Маркова. Используя связь задачи быстродействия и степенной min-проблемы моментов Маркова, теми же авторами в работе [23] было получено аналитическое решение задачи быстродействия для линейной системы $\dot{x} = Ax + bu$ при ограничении на управление $|u(t)| \leq 1$ в случае, когда спектр матрицы A является вещественным, неположительным и состоит из n различных рациональных точек. В работах В.И. Коробова, Г.М. Скляра и В.В. Флоринского [30, 31] были построены полиномы, корнями которых являются точки переключения оптимального управления.

Большинство уже упомянутых в этом разделе результатов относилось к линейным системам и нелинейным системам с управляемым первым приближением. Во многих прикладных задачах теории управления возникают нелинейные неуправляемые по первому приближению системы. Вспомним некоторые известные подходы к изучению таких систем.

Один из подходов к исследованию нелинейных систем состоит в их отображении на системы более простого вида. Большой интерес вызывает, например, вопрос об отображаемости нелинейных систем на линейные. Важным классом таких систем являются треугольные системы, введенные В.И. Коробовым в [17]. В этой работе был получен следующий результат.

Теорема 1.4 **(**В.И. Коробов**).** Рассмотрим следующую управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_{i+1}),\ i = 1, \ldots, n-1,\ x_i \in \mathbb{R}, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n, u), \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть функции $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1}) : \mathbb{R}^{i+1} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до $(n-i+1)$-го порядка включительно, $i = 1, \ldots, n$, и пусть

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0 \tag{1.4}$$

для всех x_1, ..., x_{i+1}, $i = 1, \ldots, n$, где a – постоянная, независящая от $x_1, \ldots, x_{n+1}$ $(x_{n+1} = u)$. Тогда система (1.3) с помощью замены переменных

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \equiv F_1(x_1), \\ z_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k+1}) \equiv F_i(x_1, \ldots, x_i), \quad i = 2, \ldots, n, \end{cases}$$

и замены управления вида

$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_n}{\partial x_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k+1}) \equiv F_n(x_1, \ldots, x_n) + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} f_n(x_1, \ldots, x_n, u)$$

отображается на линейную каноническую систему вида

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{z}_n = v. \end{cases}$$

Система вида (1.3) называется треугольной. Из последней теоремы следует, что система (1.3) полностью управляема и стабилизируема при выполнении условия (1.4). На случай неавтономной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_{i+1}),\ i = 1, \ldots, n-1,\ x_i \in \mathbb{R}, \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n, u), \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

этот результат был распространен А.М. Ковалевым [16].

Отметим, что, в общем случае, исходное управление u выражается через новое управление v неявно. Особый интерес представляет случай, когда такое выражение может быть получено в явном виде. Так в работах Е.В. Скляр [48–51] был описан класс треугольных систем, которые отображаются на линейную систему с помощью аддитивной замены управления $v = g(x) + u$. В работе [48] было показано, что треугольная система вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_i) + c_{i+1} x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) + c_{n+1} u, \end{cases} \tag{1.5}$$

где функции $f_i(x_1, \ldots, x_i) : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ являются $(n-i+1)$ раз непрерывно дифференцируемыми, $\prod\limits_{i=2}^{n+1} c_i \neq 0$, отображаются на линейную каноническую систему заменой переменных вида $z = F(x)$ и аддитивной заменой управления. Причем обратная замена $x = F^{-1}(z)$ находится в явном виде. Это позволяет указать управление, которое переводит систему (1.5) из одной заданной точку в другую, зная соответствующее управление для линейной системы. В [48] рассматривались задачи об управляемости системы (1.5) как с ограничениями на управление, так и без ограничений на управление.

Важные результаты в теории отображаемости треугольных систем были получены также в работах В.И. Коробова, С.С. Павличкова, S. Celikovsky'го, H. Nijmeijer'а, W. Schmidt'а. В работе [93] были получены условия управляемости для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) + \int\limits_0^t g_i(t, s, x_1(s), \dots, x_{i+1}(s))ds, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) + \int\limits_0^t g_n(t, s, x_1(s), \dots, x_n(s), u(s))ds. \end{cases}$$

Управляемость треугольных систем

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}) + g_i(x_1, \dots, x_n, u), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) + g_n(x_1, \dots, x_n, u), \end{cases}$$

с ограниченными возмущениями $g_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, \dots, n$, исследовалась в работах [29, 33]. Задача позиционного синтеза и стабилизации за конечное время для треугольных систем с несколькими входами и выходами рассматривалась в [95]. В работе [75] S. Celikovsky и H. Nijmeijer рассмотрели вопрос о локальной отображемости нелинейных систем на треугольные в сингулярном случае, т.е. когда нарушено хотя бы одно из условий $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $\dfrac{\partial f_n}{\partial u} \neq 0$. Теми же авторами в работе [76] изучалась связь между локальной управляемостью и стабилизируемостью для треугольных систем в сингулярном случае. Вопросам построения стабилизирующих управлений для сингулярных треугольных систем посвящены работы S. Celikovsky'го [74, 77]. Так, в [74] предложен численный алгоритм негладкой стабилизации для нелинейных систем эквивалентных сингулярным треугольным системам. В [77] построен класс управлений для сингулярных треугольных систем с использованием их однородной аппроксимации.

Теория отображаемости нелинейных систем на линейные была развита A.J. Krener'ом, R.W. Brockett'ом, W. Respondek'ом, S. Celikovsky'им, R. Su, Г.М. Скляром, Е.В. Скляр, С.Ю. Игнатович и многими другими, например, в работах [70,73,99,105,107,109–111,113]. Вспомним более подробно некоторые из этих результатов.

В работе [99] A.J. Krener дал необходимое и достаточное условие локальной отображаемости аффинной системы с аналитической правой частью на линейную систему с помощью замены координат и без замены управления. R.W. Brockett [70] сформулировал достаточные условия при которых аффинная нелинейная система с аналитической правой частью и точкой покоя в начале координат локально (в окрестности начала координат) отображается на линейную систему аналитической заменой координат и аналитической заменой управления вида $v = \alpha(x) + u$. В [107] (W. Respondek) этот результат был обобщен на случай многомерного управления. Вопросы глобальной линеаризации были рассмотрены S. Celikovsky'м в работе [73].

Результаты этих работ основаны на применении дифференциально-геометрического подхода. Важную роль в этом подходе играет изучение алгебры Ли векторных полей, порожденной исследуемой системой. Естественными требованиями при таком подходе являются бесконечная дифференцируемость или аналитичность правых частей системы, в то время как в работе В.И. Коробова [17] налагаются минимальные требования на гладкость.

В работе [109] (Г.М. Скляр, Е.В. Скляр и С.Ю. Игнатович) авторы отказались от общепринятого требования бесконечной дифференцируемости правых частей. В этой работе были полностью описаны нелинейные системы класса C^1 с одномерным управлением, которые отображаются на линейную при помощи замены управления класса C^1 и замены переменных класса C^2. Также был описан класс нелинейных систем линеаризуемых с помощью замены координат без замены управления. Отображаемость гладких систем с многомерным управлением изучалась в работах [110] и [111].

В работе [98] решены задача стабилизации и задача синтеза инерционных управлений для класса гладких афинных систем с многомерным управлением, которые отображаются на линейные.

В работах [35,92] В.И. Коробова и Т.И. Сморцовой исследовалась задача отображаемости траекторий управляемых систем. Предложенный подход состоял в отображении траекторий канонической управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \\ \dot{x}_j = x_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n \end{cases} \tag{1.6}$$

на траектории линейной системы вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i + u(t), \\ \dot{y}_k = y_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n. \end{cases} \tag{1.7}$$

Этот подход позволяет решить задачу быстродействия для произвольной полностью управляемой линейной системы, пользуясь результатами работы [23] (В.И. Коробов, Г.М. Скляр), в которой было построено управление $u = u(t)$, решающее задачу быстродействия для канонической управляемой системы. Для случаев $n = 2$ и $n = 3$ было в явном виде построено отображение $y = \Phi(x)$ между системами (1.6) и (1.7). Двумерная система с многомерным управлением была исследована в работе [53]. В работе [34] был рассмотрен вопрос об отображаемости траекторий нелинейных систем на линейные. А именно, была рассмотрена нелинейная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \leq 1, \\ \dot{x}_j = x_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^k, \quad k \geq 2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ был в явном виде построен S–диффеоморфизм множества нуль-управляемости канонической системы на множество нуль-управляемости системы (1.8). Также были найдены траектории системы (1.8), ведущие в начало координат. Отметим, что построение таких отображений для $n \geq 3$ является довольно трудной задачей.

Задачи негладкой стабилизации нелинейных систем рассматривались в работах M. Kawski [88, 89], W. Dayawansa [82], H. Hermes [84]. В этих работах изучалась задача локальной стабилизации с помощью непрерывного, но недифференцируемого позиционного управления для нелинейных систем малой размерности (двух- и трех-мерных). Классическим примером системы, которую невозможно стабилизировать управлением в виде обратной связи класса C^1 даже локально, но возможно стабилизировать непрерывным управлением является система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3. \end{cases}$$

M. Kawski в работе [88] показал, что стабилизирующее управление для этой системы можно выбрать в виде $u(x) = -x_1 + \frac{4}{3}Ex_2^{1/3} + K(x_2 - x_1^3)$, где $E > 1$, $K > 0$ – константы. Используемый подход позволил строить непрерывные по Гельдеру управления.

Ниже мы вспомним некоторые результаты теории негладкой стабилизации n–мерных управляемых систем. Вернемся к вопросу построения управлений для треугольных управляемых систем. Для таких систем треугольная структура позволила разработать различные методы исследования задач стабилизации и синтеза, в том числе задачи устойчивого попадания в точку покоя за конечное время (finite-time stabilization problem), без использования свойств отображаемости этих систем на линейные.

В работах [72] (C.I. Byrnes, A. Isidori) и [116] (J. Tsinias) был предложен метод добавления интегратора (adding an integrator method), который явился эффективным инструментом исследования нелинейных систем. Так, в работе [80] J.-M. Coron и L. Praly, используя технику добавления интегратора, доказали локальную стабилизируемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2^{p_2}, \\ \dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_j) + x_{j+1}^{p_{j+1}}, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) + u^{p_{n+1}}, \end{cases} \tag{1.9}$$

где p_{j+1} – нечетные числа, $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^j, \mathbb{R})$ и $f_j(0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, \ldots n$. Отметим, что условие (1.4) для треугольной системы (1.9) нарушается при $x_{j+1} = 0$, если $p_{j+1} > 0$. Последнее означает, что для системы (1.9) нельзя воспользоваться теоремой 1.4.

Различные классы треугольных систем исследовались с помощью метода обратного хода (backstepping method) [83, 87, 100, 104] и метода добавления степенного интегратора (adding a power integrator method) [85, 102, 103, 114, 117, 119]. Например, в работе [117] была доказана разрешимость задачи глобальной стабилизации за конечное время для системы (1.9) при условии, что $f_j \in C^1(\mathbb{R}^j, \mathbb{R})$ и $f_j(0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, \ldots n$. Эти подходы основаны на пошаговом построении управления и функции Ляпунова для подсистем меньшей размерности, при этом размерность подсистем растет на каждом шаге. В результате стабилизирующее управление и функция Ляпунова указываются в рекуррентном виде, что затрудняет их приктическое построение при росте размерности системы.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются нетреугольные системы с неуправляемым неустойчивым первым приближением. Для нелинейного приближения этих систем построен класс функций управляемости и управлений, решающих задачу синтеза. Показано, что построенные управления решают задачу синтеза и для исходной нелинейной системы. Также, в работе предложены классы сингулярных треугольных систем, которые отображаются на нелинейную неуправляемую по первому приближению систему специального вида. С помощью такого отображения для этих систем исследованы задачи стабилизации и синтеза.

1.2. Выводы к разделу

Как видно из обзора литературы нелинейные управляемые системы вызывают интерес у широкого круга исследователей из разных областей математики. Развиты различные подходы к решению задач управляемости, стабилизируемости, отображаемости для нелинейных систем. Важным классом таких систем являются треугольные управляемые системы. Их свойства позволяют, как рассматривать вопросы отображаемости этих систем на линейные, так и непосредственно строить классы управлений, решающих задачи стабилизации и синтеза. Несмотря на обширное развитие методов нелинейной теории управления, задачи синтеза и стабилизации требуют дополнительного исследования для широкого класса нелинейных систем. Интерес вызывают, например, нетреугольные нелинейные системы, а также сингулярные треугольные системы.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются нетреугольные системы с неуправляемым неустойчивым первым приближением. Для специальных классов таких систем построены стабилизирующие управления и управления, решающие задачу допустимого позиционного синтеза. При построении управлений возникает сингулярное матричное уравнение Ляпунова. В работе сформулирован критерий разрешимости этого уравнения и описан класс его положительно определенных решений. Также, в работе исследованы задачи стабилизации и синтеза для классов сингулярных треугольных систем, которые отображаются на нелинейную систему специального вида.

РАЗДЕЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ СТАБИЛИЗАЦИИ И СИНТЕЗА. СИНГУЛЯРНОЕ МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА

В настоящем разделе даны постановки задач стабилизации и синтеза. Описан подход к их решению. Важную роль в этом подходе играет сингулярное матричное уравнение Ляпунова специального вида. В подразделе 2.3 доказан критерий разрешимости этого уравнения и описан класс его положительно определенных решений.

2.1. Постановка задач стабилизации и синтеза

Рассмотрим нелинейную систему систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_i = \varphi_{i-1}(t, x, u), \quad i = 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ – управление, функции $\varphi_i(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны, липшицевы по переменным x, u и удовлетворяют условию $\varphi_i(t, 0, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, для всех $t \geq 0$.

Задача стабилизации для системы (2.1) состоит в построении непрерывного управления $u = u(t, x)$ такого, что нулевая точка покоя замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t, x), \\ \dot{x}_i = \varphi_{i-1}(t, x, u(t, x)), \quad i = 2, \ldots, n, \end{cases}$$

является асимптотически устойчивой в смысле Ляпунова. В случае, когда функция $u = u(t, x)$ является непрерывно дифференцируемой по x стабилизация называется гладкой.

Задача синтеза ограниченного управления для системы (2.1) состоит в построении такого управления $u = u(t, x)$, что:

1) функция u(t,x) непрерывна при всех $x \neq 0$;

2) траектория системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t,x), \\ \dot{x}_i = \varphi_{i-1}(t,x,u(t,x)), \quad i = 2,\ldots,n, \end{cases}$$

начинающаяся в произвольной точке $x^0 \in Q$ (Q – некоторая окрестность нуля) при $t = 0$, оканчивается в точке $x^1 = 0$ в некоторый конечный момент времени $T(x^0) < +\infty$, причем $x(t) \in Q$ при всех $t \in [0, T(x^0)]$;

3) $u(t,x)$ удовлетворяет ограничению $|u(t,x)| \leq d$, где $d > 0$ – некоторое заданное число, для всех $t \in [0, T(x^0)]$ и $x \in Q$.

В случае, когда $Q = \mathbb{R}^n$ синтез ограниченных управлений называется глобальным. Далее для краткости будем называть эти задачи задачей синтеза и задачей глобального синтеза, соответственно.

2.2. Подход к решению задач стабилизации и синтеза

В работе рассматривается система (2.1) в случае, когда в некоторой окрестности начала координат $\|x\| < \rho$ ($\rho > 0$) функции $\varphi_i(t,x,u)$ могут быть представлены в виде

$$\varphi_i(t,x,u) = c_i x_i^{2k_i+1} + f_i(t,x,u), \quad i = 1,\ldots,n-1, \tag{2.2}$$

где $k_i = \frac{p_i}{q_i}$ ($p_i \geq 0$ – целые числа, $q_i > 0$ – нечетные числа), c_i – действительные числа такие, что $\prod\limits_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$. Задачи синтеза и стабилизации для системы (2.1) с правой частью (2.2) решены в предположении, что функции $f_i(t,x,u)$, $i = 1,\ldots,n-1$, удовлетворяют дополнительным ограничениям на рост. Дополнительные ограничения накладываются также на числа k_i, $i = 1,\ldots,n-1$.

Подход к решению задач синтеза и стабилизации основан на рассмотрении нелинейного приближения системы (2.1). В качестве такого нелинейного приближения рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{x}_i = c_{i-1} x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}, \quad i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Для этой системы с помощью метода функции Ляпунова строится стабилизирующее управление $u = u(x)$, причем функцию Ляпунова удается выбрать в виде квадратичной формы $V = (Fx, x)$. Показывается, что построенное управление решает задачу стабилизации и для исходной нелинейной системы. Аналогичный подход применяется и для построения ограниченного управления, решающего задачу синтеза для системы (2.1). При этом решение задачи синтеза для системы нелинейного приближения проводится на основе метода функции управляемости В.И. Коробова.

При таком построении важную роль играет сингулярное матричное уравнение Ляпунова вида $A^*F + FA = -W$. Исследование этого уравнения дано в подразделе 2.3.

2.3. Сингулярное матричное уравнение Ляпунова

Рассмотрим матричное уравнение

$$A^*F + FA = -W, \tag{2.3}$$

где $n \times n$-матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_s & a_{s+1} & \ldots & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

($\{a_i\}_{i=1}^n$ – заданные действительные числа, s – целое число такое, что $0 \le s \le n-2$), $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – некоторая заданная симметрическая неотрицательно определенная $n \times n$-матрица, F – неизвестная матрица.

При построении функций Лпунова для системы (2.1) возникает задача о разрешимости матричного уравнения (2.3) в классе положительно определенных матриц F.

Замечание 2.1. Хорошо известно [43, стр. 240, теорема 8.5.1.], что в случае произвольной положительно определенной матрицы W уравнение (2.3) разрешимо в классе положительно определенных матриц тогда и только тогда, когда действительные части собственных значений матрицы A имеют отрицательные действительные части (т.е. матрица A устойчива).

Замечание 2.2. Матрица A вида (2.4) является вырожденной и уравнение (2.3) разрешимо не для любой матрицы W в правой части. В частности, если матрица W положительно определена, то уравнение (2.3) не разрешимо в классе положительно определенных матриц.

Важную роль в теории устойчивости играет случай, когда положительно определенная матрица F может быть выбрана так, чтобы $\widehat{A}^* F + F\widehat{A} < 0$. Последнее означает, что система дифференциальных уравнений $\dot{x} = \widehat{A}x$ асимптотически устойчива. В случае вырожденной матрицы A за счет выбора положительно определенной матрицы F возможно добиться лишь выполнения неравенства $A^*F + FA \le 0$.

Пусть матрица $W_{s+1} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$ ($w_{ij} = w_{ji}$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, s$) положительно определена. Далее будет показано, что в этом случае сингулярное матричное уравнение Ляпунова (2.3) разрешимо в классе положительно определенных матриц F тогда и только тогда, когда матрица W имеет вид

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1s+1} & w_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & w_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{1s+1} & \cdots & w_{s+1s+1} & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ w_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}^2}{a_{s+1}^2} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}a_n}{a_{s+1}^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ w_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & w_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}a_n}{a_{s+1}^2} & \cdots & w_{s+1s+1}\frac{a_n^2}{a_{s+1}^2} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Далее будет использоваться следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть матрица

$$W_{s+1} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1s+1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ w_{1s+1} & \cdots & w_{s+1s+1} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

неотрицательно определена, тогда матрица W вида (2.5) также неотрицательно определена.

Доказательство. Покажем, что все главные миноры матрицы (2.5) неотрицательны. Обозначим через $M^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k}$ главные миноры матрицы (2.5), образованные строками и столбцами с номерами $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n$.

Из неотрицательной определенности матрицы W_{s+1} следует, что

$$M^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0, \quad 1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le s+1. \tag{2.7}$$

Учитывая, что последние $(n-s)$ строк и столбцов матрицы (2.5) линейно зависимы, получаем:

$$M^{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots,i_m}_{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots,i_m} = 0,\ 1 \le i_1 \le \cdots \le i_k < s+1,\ s+1 \le i_{k+1} < \cdots < i_m \le n,$$

где $m > k+1 \ge 1$. Откуда, учитывая (2.7), заключаем, что

$$M^{i_1,\ldots,i_k,\,i_{k+1}}_{i_1,\ldots,i_k,\,i_{k+1}} = \frac{a^2_{i_{k+1}}}{a^2_{s+1}} M^{i_1,\ldots,i_k,\,s+1}_{i_1,\ldots,i_k,\,s+1} \ge 0,\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le s,\ s+2 \le i_{k+1} \le n,$$

где $k \ge 0$. Тогда, согласно критерию неотрицательной определенности [11, стр. 276, теорема 4], матрица W вида (2.5) неотрицательно определена. $\square$

Сформулируем теперь критерий разрешимости сингулярного уравнения Ляпунова (2.3). При построении стабилизирующих управлений нас будет интересовать случай, когда матрица W_{s+1} положительно определена. В этом случае уравнение (2.3) будет иметь положительно определенное решение F. Функция Ляпунова для системы (2.1) будет выбрана в виде $V = (Fx, x)$.

Теорема 2.1. Пусть матрица A имеет вид (2.4), матрица W_{s+1} вида (2.6) положительно определена. Тогда для того, чтобы матричное уравнение (2.3) имело положительно определенное решение при некоторой неотрицательно определенной матрице W, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы

$$A_{s+1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_s & a_{s+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

имели отрицательные действительные части и при этом матрица W имела вид (2.5).

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – симметрическая положительно определенная матрица. Пусть матрица $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ является положительно определенным решением уравнения (2.3). Будем использовать следующее обозначение $F_{s+1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$.

Заметим, что матричное уравнение (2.3) распадается на матричное уравнение

$$A_{s+1}^{*} F_{s+1} + F_{s+1} A_{s+1} = -W_{s+1} \tag{2.9}$$

и систему линейных уравнений

$$\begin{cases} f_{1i}a_j + f_{1j}a_i + f_{i+1j} = -w_{ij}, \\ \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = s+2, \ldots, n, \\ f_{1i}a_j + f_{1j}a_i = -w_{ij}, \\ \quad i = s+1, \ldots, j, \quad j = s+2, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Уравнение (2.9) разрешимо в классе положительно определенных матриц тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы A_{s+1} имеют отрицательные действительные части (см. Замечание 2.1).

Обозначим через $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ миноры матрицы W, образованные строками и столбцами с номерами $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n$, $1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n$. Поскольку матрица W положительно определена, то

$$M^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k} \ge 0, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$\begin{aligned} M^{i,\,i+1}_{i,\,i+1} &= \begin{vmatrix} w_{ii} & w_{ii+1} \\ w_{ii+1} & w_{i+1i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2f_{1i}a_i & f_{1i}a_{i+1} + f_{1i+1}a_i \\ f_{1i}a_{i+1} + f_{1i+1}a_i & 2f_{1i+1}a_{i+1} \end{vmatrix} \\ &= -(f_{1i}a_{i+1} - a_i f_{1i+1})^2 \ge 0, \quad i = s+1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$f_{1i+1} = f_{1i}\frac{a_{i+1}}{a_i}, \quad i = s+1, \ldots, n-1. \tag{2.12}$$

Покажем теперь справедливость соотношений

$$w_{i+1i+1} = w_{ii}\frac{a_{i+1}^2}{a_i^2}, \quad w_{ii+1} = w_{ii}\frac{a_{i+1}}{a_i}, \quad i = s+1, \ldots, n-1. \tag{2.13}$$

Действительно из (2.10) и (2.12) следует, что

$$w_{i+1i+1} = -2a_{i+1}f_{1i+1} = -2f_{1i}\frac{a_{i+1}^2}{a_i} = -2f_{1i}a_i\frac{a_{i+1}^2}{a_i^2} = w_{ii}\frac{a_{i+1}^2}{a_i^2},$$

$i = s+1, \ldots, n-1$, и

$$w_{ii+1} = -(f_{1i}a_{i+1} + f_{1i+1}a_i) = -(f_{1i}a_{i+1} + f_{1i}a_{i+1}) = -2f_{1i}a_{i+1} = w_{ii}\frac{a_{i+1}}{a_i},$$

$i = s+1, \ldots, n-1$.

Соотношения (2.13) можно переписать в виде

$$w_{i+1i+1} = w_{s+1s+1}\frac{a_{i+1}^2}{a_{s+1}^2},\ w_{ii+1} = w_{s+1s+1}\frac{a_i a_{i+1}}{a_{s+1}^2},\ i = s+1, \ldots, n-1. \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь миноры вида $M_{i,\,j,\,j+1}^{i,\,j,\,j+1}$ для $i,\ j : 1 \le i \le j-1$, $s+1 \le j \le n-1$. Из (2.11) и (2.14) получаем, что

$$\begin{aligned} M_{i,\,j,\,j+1}^{i,\,j,\,j+1} &= \begin{vmatrix} w_{ii} & w_{ij} & w_{ij+1} \\ w_{ij} & w_{jj} & w_{jj+1} \\ w_{ij+1} & w_{jj+1} & w_{j+1j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{ii} & w_{ij} & w_{ij+1} \\ w_{ij} & w_{s+1s+1}\frac{a_j^2}{a_{s+1}^2} & w_{s+1s+1}\frac{a_j a_{j+1}}{a_{s+1}^2} \\ w_{ij+1} & w_{s+1s+1}\frac{a_j a_{j+1}}{a_{s+1}^2} & w_{s+1s+1}\frac{a_{j+1}^2}{a_{s+1}^2} \end{vmatrix} \\ &= -w_{s+1s+1}\left(w_{ij}\frac{a_{j+1}}{a_{s+1}} - w_{ij+1}\frac{a_j}{a_{s+1}}\right)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

при $i = 1, \ldots, j-1$, $j = s+1, \ldots, n-1$. Откуда, учитывая что $w_{s+1s+1} > 0$ (т.к. матрица W_{s+1} положительно определена), получаем:

$$w_{ij+1} = w_{ij}\frac{a_{j+1}}{a_j}, \quad i = 1, \ldots, j-1, \quad j = s+1, \ldots, n-1. \quad (2.15)$$

Перепишем соотношения (2.15) в виде

$$w_{ij} = w_{is+1}\frac{a_j}{a_{s+1}}, \quad i = 1, \ldots j-1, \quad j = s+2, \ldots, n. \quad (2.16)$$

Последние соотношения очевидно справедливы и при $j = s+1$. Тогда из (2.16) следует, что

$$w_{ij} = w_{s+1s+1}\frac{a_i a_j}{a_{s+1}^2}, \quad i = s+1, \ldots, j-1, \quad j = s+2, \ldots, n. \quad (2.17)$$

Действительно,

$$w_{ij} = w_{is+1}\frac{a_j}{a_{s+1}} = w_{s+1i}\frac{a_j}{a_{s+1}} = w_{s+1s+1}\frac{a_i a_j}{a_{s+1}^2}$$

при $i = s+1, \ldots, j-1$, $j = s+2, \ldots, n$.

Наконец, из (2.14), (2.16) и (2.17) заключаем, что элементы w_{ij} матрицы W удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &w_{ij} = w_{is+1}\tfrac{a_j}{a_{s+1}}, \quad i = 1, \ldots, s+1, \quad j = s+2, \ldots, n, \\ &w_{ij} = w_{s+1s+1}\tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}^2}, \quad i = s+2, \ldots, j, \quad j = s+2, \ldots, n. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соотношения (2.18) означают, что матрица W имеет вид (2.5). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть матрица W имеет вид (2.5), а собственные значения матрицы A_{a+1} имеют отрицательные действительные части. Как уже было отмечено при доказательстве необходимости, уравнение (2.3) распадается на матричное уравнение (2.9) и линейную систему (2.10). Это означает, что нам достаточно доказать одновременную разрешимость уравнения (2.9) и системы (2.10), при этом полученная матрица F должна быть положительно определена.

Поскольку матрица A_{s+1} устойчива, то уравнение (2.9) имеет единственное положительное определенное решение F_{s+1}. Пусть матрица $F_{s+1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$ является решением уравнения (2.9). Тогда элемент этой матрицы f_{1s+1} удовлетворяет соотношению

$$2f_{1s+1}a_{s+1} = -w_{s+1s+1}. \tag{2.19}$$

Выберем элементы f_{ij} для $i,j : 1 \le i \le s+1$, $s+2 \le j \le n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &f_{i+1j} = -w_{ij} - f_{1i}a_j - f_{1j}a_i, \quad i = 1,\dots,s, \quad j = s+2,\dots,n, \\ &f_{1j} = f_{1s+1}\tfrac{a_j}{a_{s+1}}, \quad j = s+2,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Покажем, что при таком выборе элементов f_{ij} система (2.10) обращается в верное равенство. Первое уравнение из (2.10) очевидно удовлетворенно. Покажем, что удовлетворено и второе уравнение из (2.10). Действительно, из (2.18), (2.19), (2.14) и (2.17) следует, что

$$\begin{aligned} &f_{1i}a_j + f_{1j}a_i = f_{1s+1}\tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}} + f_{1s+1}\tfrac{a_j a_i}{a_{s+1}} = 2f_{1s+1}\tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}} \\ &= -w_{s+1s+1}\tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}^2} = -w_{ij}, \quad i = s+1,\dots,j, \quad j = s+2,\dots,n. \end{aligned}$$

Таким образом. мы показали что матрица $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ является решением уравнения (2.3). Заметим, что матрица F будет решением уравнения (2.3) при любом выборе элементов $\{f_{ij}\}_{i,j=s+1}^{n}$. Способ выбора этих элементов, при котором матрица F будет положительно определена, описан в Теореме 2.2. $\square$

В следующей теореме описан класс положительно определенных решений сингулярного уравнения Ляпунова (2.3).

Теорема 2.2. Пусть матрица A имеет вид (2.4), матрица W имеет вид (2.5). Пусть матрица W_{s+1} вида (2.6) положительно определена, а собственные значения матрицы A_{s+1} вида (2.8) имеют отрицательные действительные части. Определим матрицу $F_{s+1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$, как единственное положительно определенное решение уравнения

$$A_{s+1}^* F_{s+1} + F_{s+1} A_{s+1} = -W_{s+1}.$$

Тогда матричное уравнение Ляпунова (2.3) разрешимо, и матрица

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1s+1} & f_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & f_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1s+1} & \cdots & f_{s+1s+1} & f_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & f_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} \\ f_{1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & \cdots & f_{s+1s+1}\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}} & f_{s+2s+2} & \cdots & f_{s+2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ f_{1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & \cdots & f_{s+1s+1}\frac{a_n}{a_{s+1}} & f_{ns+2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.21)$$

где элементы $\{f_{ij}\}_{i,j=s+2}^{n}$ – произвольные действительные числа, будет решением этого уравнения. Более того, существуют числа $\{f_{ij}\}_{i,j=s+2}^{n}$ такие, что матрица (2.21) положительно определена.

Доказательство. Как было отмечено в доказательстве Теоремы 2.1, уравнение (2.3) распадается на матричное уравнение (2.9) м линейную систему (2.10). Покажем, что матрица F вида (2.21) удовлетворяет уравнению (2.9) и системе (2.10).

Поскольку собственные значения матрицы A_{s+1} имеют отрицательные действительные части, то при любой положительно определенной матрице

W уравнение (2.9) имеет единственное решение F_{s+1} и это решение положительно определенно. Матрица F_{s+1} может быть представлена в виде

$$F_{s+1} = \int\limits_0^\infty e^{A_{s+1}^* t} W_{s+1} e^{A_{s+1} t} dt.$$

Поскольку матрица $F_{s+1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$ является решением уравнения (2.9), то ее элементы удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$\begin{cases} f_{1i} a_{s+1} + a_i f_{1s+1} + f_{i+1s+1} = -w_{is+1}, \quad i = 1, \ldots, s+1, \\ 2a_{s+1} f_{1s+1} = -w_{s+1s+1}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Из (2.18) и (2.21) мы получаем:

$$\begin{gathered} w_{ij} = w_{is+1} \tfrac{a_j}{a_{s+1}},\ f_{ij} = f_{is+1} \tfrac{a_j}{a_{s+1}},\ i = 1, \ldots, s+1,\ j = s+2, \ldots, n, \\ w_{ij} = w_{s+1s+1} \tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}^2}, \quad i = s+2, \ldots, n, \quad j = s+2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Покажем, сначала, что элементы матрицы F вида (2.21) удовлетворяют системе уравнений (2.10). Используя соотношения (2.23), мы перепишем систему (2.10) в виде

$$\begin{cases} f_{1i} a_j + \tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}} f_{1s+1} + \tfrac{a_j}{a_{s+1}} f_{i+1s+1} = -\tfrac{a_j}{a_{s+1}} w_{is+1}, \\ i = 1, \ldots, s,\ j = s+2, \ldots, n, \\ 2 \tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}} f_{1s+1} = -\tfrac{a_i a_j}{a_{s+1}^2} w_{s+1s+1}, \\ i = s+1, \ldots j,\ j = s+2, \ldots, n, \end{cases}$$

Умножая обе части первого уравнения на $\frac{a_{s+1}}{a_j}$ и обе части второго уравнения на $\frac{a_{s+1}^2}{a_i a_j}$, мы убеждаемся, что последняя система эквивалентна системе (2.22). Тогда элементы матрицы F вида (2.21) удовлетворяют системе (2.10). Таким образом, мы показали что матрица F является решением уравнения (2.3).

Теперь, докажем существование таких элементов f_{ij}, $i = s+2, \ldots, n$, $j = s+2, \ldots, n$, что матрица F вида (2.21) положительно определена. Пусть элементы $\{f_{ij}\}_{i,j=s+2}^n$, для $i \neq j$, выбраны произвольным образом так, чтобы $f_{ij} = f_{ji}$.

Обозначим через M_{ij} определитель $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, которая получается после удаления строки с номером i и столбца с номером j из матрицы F. Тогда последовательные главные миноры i-го порядка $\Delta(F_i)$ матрицы F определяются равенством

$$\Delta(F_i) = f_{ii}\Delta(F_{i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+i} f_{ji} M_{ji}, \quad j = s+2, \ldots, n.$$

Напомним, что $\Delta(F_{s+1}) > 0$. Наконец, выберав числа f_{ii} последовательно так, чтобы

$$f_{ii} > \max\left\{0, \frac{1}{\Delta(F_{i-1})}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+i+1} f_{ji} M_{ji}\right\}, \quad i = s+2, \ldots, n,$$

мы получим, что $\Delta(F_i) > 0$, $i = s+2, \ldots, n$. Поскольку матрица F_{s+1} положительно определена, заключаем, что $\Delta(F_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и матрица F положительно определена. Теорема доказана. □

Замечание 2.3. Из доказательства Теоремы 2.1 следует, что элементы f_{ij}, $i = 1, \ldots, s+1$, $j = 1, \ldots, n$, определяется единственным образом. Это означает, что при сделанных в Теореме 2.1 предположениях, любое решение уравнения уравнения (2.3) имеет вид (2.21). Тогда Теорема 2.2 определяет общий вид положительно определенного решения уравнения (2.3).

2.4. Выводы к разделу

В разделе 2 были даны постановки задач стабилизации и синтеза. Описан подход, предложенный для решения этих задач. Этот подход основан на рассмотрении системы нелинейного приближения исходной управляемой системы. Важную роль в построении функции Ляпунова и функции управляемости играет сингулярное матричное уравнение Ляпунва вида (2.3). Это уравнение исследовано в подразделе 2.3. В Теореме 2.1 сформулирован критерий разрешимости этого сингулярного матричного уравнения. В Теореме 2.2 описан класс его положительно определенных решений. Полученные результаты используются в следующих разделах при построении стабилизирующих и синтезирующих управлений для нелинейных систем вида (2.1).

РАЗДЕЛ 3

СТАБИЛИЗАЦИЯ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТЕПЕННОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

В данном разделе решена задача стабилизации для класса нелинейных систем с неуправляемым неустойчивым первым приближением. Идея решения основана на стабилизации по нелинейному приближению. А именно, для системы нелинейного приближения в явном виде построено стабилизирующее управление. Построение стабилизирующего управления проводится на основе метода функции Ляпунова. Показано, что построенное управление решает задачу стабилизации и для исходной нелинейной системы. Дана эллипсоидальная оценка области притяжения нулевой точки покоя замкнутой системы.

3.1. Задача стабилизации для класса нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную систему систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_i = \varphi_{i-1}(t, x, u), \quad i = 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ – управление, функции $\varphi_i(t, x, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны, липшицевы по переменным x, u и удовлетворяют условию $\varphi_i(t, 0, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, для всех $t \geq 0$.

Пусть в некоторой окрестности начала координат $\|x\| < \rho$ ($\rho > 0$) функции $\varphi_i(t, x, u)$ могут быть представлены в виде

$$\varphi_i(t, x, u) = c_i x_i^{2k_i+1} + f_i(t, x, u), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{3.2}$$

где $k_i = \frac{p_i}{q_i}$ ($p_i \geq 0$ – целые числа, $q_i > 0$ – нечетные числа), c_i – действительные числа такие, что $\prod\limits_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$. Функции $f_i(t, x, u)$ при $\|x\| < \rho$

удовлетворяют условиям

$$|f_i(t,x,u)| \le \alpha_i(x_1^{2k_1+2} + \dots + x_{n-1}^{2k_{n-1}+2}), \quad i = 1,\dots,n-1, \tag{3.3}$$

для некоторых $\alpha_i > 0$.

Тогда задача стабилизации системы (3.1) эквивалентна задаче стабилизации системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = c_{i-1}x_{i-1}^{2k_{i-1}+1} + f_{i-1}(t,x,u), \quad i = 2,\dots,n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Заметим, что система (3.1) с правой частью (3.2) неуправляема по первому приближению.

Замечание 3.1. В случае, когда $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,n-1$, для некоторого класса функций $\varphi_i(t,x,u)$ представление (3.2) может быть получено при помощи формулы Тейлора. Примером такой системы является система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \sin x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_2\cos x_2 - \sin x_2 + \frac{1}{2}\sin 2x_2, \end{cases}$$

которая будет исследована далее.

Задачу стабилизации системы (3.4) будем решать в следующем дополнительном предположении. Пусть существует s такое, что $0 \le s \le n-2$ для которого выполнено условие

$$k_i = 0, \quad i = 1,\dots,s \quad \text{и} \quad 0 < k_{s+1} < \dots < k_{n-1}. \tag{3.5}$$

Для $s = n-2$ последнее условие означает, что

$$k_i = 0, \quad i = 1,\dots,n-2, \quad k_{n-1} > 0.$$

Отметим, что система (3.4) имеет неуправляемое неустойчивое первое приближение. В качестве нелинейного приближения системы (3.4) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = c_{i-1}x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}, \quad i = 2,\dots,n. \end{cases} \tag{3.6}$$

Далее для системы (3.6) в явном виде будет построено стабилизирующее управление $u = u(x)$ и показано, что это управление решает задачу стабилизации для системы (3.4), а значит и для исходной нелинейной системы (3.1).

Систему (3.6) при $c_i = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, назовем *канонической системой со степенной нелинейностью*.

Напомним определение производной в силу системы.

Определение 3.1. Пусть функция $V(t,x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Производной функции $V(t,x)$ в силу системы $\dot{x} = \varphi(t,x)$ называется выражение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} \varphi_i(t,x).$$

Доказательство асимптотической устойчивости основано на методе функции Ляпунова. Это метод опирается на следующий факт. Предположим, что $\varphi(t,0) = 0$ для всех $t \geq 0$. Пусть функция $V(x) \in C^1(U(0))$ при $x \in U(0)$ ($U(0)$ – некоторая окрестность начала координат) удовлетворяет условиям:

1) $V(x)>0$ для $x \neq 0$, $V(0) = 0$;

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(t,x) < 0.$

Тогда нулевая точка покоя системы $\dot{x} = \varphi(t,x)$ асимптотически устойчива. Такую функцию $V(x)$ называют функцией Ляпунова.

3.2. Стабилизация канонической системы со степенной нелинейностью

Рассмотрим систему (3.6) в случае, когда $c_1 = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда система (3.6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k_1+1}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^{2k_{n-1}+1}, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $k_i = \frac{p_i}{q_i}$, ($p_i \geq 0$ – целое число, $q_i > 0$ – нечетное число), $i = 1, \ldots, n-1$ – некоторые заданные неотрицательные числа, такие что выполнено условие (3.5).

Стабилизирующее управление будем искать в виде

$$u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + \sum_{i=s+1}^{n-1} a_{n-s+i} x_i^{2k_i+1}, \tag{3.8}$$

где $\{a_i\}_{i=1}^{2n-s-1}$ – некоторые отрицательные числа, которые будут определены далее.

Цель данного подраздела – сформулировать достаточные условия на коэффициенты a_i, при которых управление $u = u(x)$ вида (3.8) стабилизирует систему (3.7). Эти условия будут получены на основе метода функции Ляпунова. Функцию Ляпунова $V(x)$ ищем в виде

$$V(x) = (Fx, x), \tag{3.9}$$

где F – некоторая положительно определенная матрица.

Вычислим производную функции $V(x)$ в силу системы (3.7), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (3.8), и получим

$$\dot{V}(x)\Big|_{(3.7)} = \big((A^*F + FA)x, x\big) + 2\sum_{i=s+1}^{n-1} (Fh_{i+1}, x) x_i^{2k_i+1}, \tag{3.10}$$

где $h_i = (\underbrace{a_{n-s+i-1}, 0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)^*$ – n-мерный вектор (1 стоит в i–й строке), $i = s+2, \ldots, n$.

Напомним, что согласно Замечанию 2.2 положительно определенная матрица F не может быть выбрана так, чтобы матрица $A^*F + FA$ была отрицательно определена. Поэтому мы выберем матрицу F так, чтобы матрица A^*F+FA была неотрицательно определена. С этой целью мы рассмотрим сингулярное матричное уравнение Ляпунова (2.3). Опишем процесс выбора матрицы F.

Пусть матрица $W_{s+1} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$ – заданная положительно определенная матрица. Предположим, что матрица W имеет вид (2.5), а матрица A

вида (2.4) устойчива. Определим матрицу $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, как некоторое положительно определенное решение уравнения Ляпунова (2.3). Тогда, используя Теорему 2.2, мы получаем, что равенство (3.10) принимает вид

$$\dot{V}(x)\Big|_{(3.7)} = -\big(Wx, x\big) + 2\sum_{i=s+1}^{n-1} (Fh_{i+1}, x)x_i^{2k_i+1}, \tag{3.11}$$

где матрица F имеет вид (2.21).

Напомним, что уравнение (2.3) определяет матрицу F не однозначно. Так элементы $\{f_{ij}\}_{i,j=s+2}^{n}$ не определяются уравнением (2.3). Эти элементы определены ниже.

Ведем следующие обозначения $b^i = -Fh_i$, $i = s+2, \ldots, n$. Тогда

$$b_j^i = -\left(f_{1j}\, a_{n-s+i-1} + f_{js+1}\frac{a_i}{a_{s+1}}\right),\ j = 1, \ldots, s+1,\ \ i = s+2, \ldots, n. \tag{3.12}$$

$$b_j^i = -\left(f_{1s+1}\frac{a_j}{a_{s+1}}\, a_{n-s+i-1} + f_{ji}\right),\ j = s+2, \ldots, n,\ \ i = s+2, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Выберем числа $a_{n-s+i-1}$, $s+2 \le i \le n$, и f_{ji}, $s+2 < i < j \le n$ так, чтобы

$$b_j^i = 0, \quad j = i, \ldots, n,\ \ i = s+2, \ldots, n.$$

Решая последнюю систему, мы получаем

$$a_{n-s+i-1} = -\frac{a_{s+1}}{a_i}\,\frac{f_{ii}}{f_{1s+1}}, \quad i = s+2, \ldots, n, \tag{3.14}$$

$$f_{ji} = \frac{a_j}{a_i} f_{ii}, \quad j = i+1, \ldots, n, \quad i = s+2, \ldots, n-1. \tag{3.15}$$

Таким, образом матрица $\{f_{ij}\}_{i,j=s+2}^{n}$, которая сформирована из последних $(n-s-1)$ строк и столбцов матрицы F вида (2.21), принимает вид

$$\begin{pmatrix} f_{s+2s+2} & f_{s+2s+2}\frac{a_{s+3}}{a_{s+2}} & \cdots & f_{s+2s+2}\frac{a_n}{a_{s+2}} \\ f_{s+2s+2}\frac{a_{s+3}}{a_{s+2}} & f_{s+3s+3} & \cdots & f_{s+3s+3}\frac{a_n}{a_{s+3}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ f_{s+2s+2}\frac{a_n}{a_{s+2}} & f_{s+3s+3}\frac{a_n}{a_{s+3}} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.1. Пусть выполнено условие (3.15), матрица $F_{s+1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$ положительно определена. Тогда матрица F вида (2.21) положительно определена тогда и только тогда, когда

$$f_{ii} > \frac{a_i^2}{a_{i-1}^2} f_{i-1i-1}, \quad i = s+2, \dots, n. \tag{3.16}$$

Доказательство. Последовательные главные миноры i-го порядка матрицы F, обозначаемые $\Delta(F_i)$, определяются равенствами

$$\Delta(F_i) = \Delta(F_{i-1}) \left(f_{ii} - f_{i-1i-1} \frac{a_i}{a_{i-1}} \right), \quad i = s+2, \dots, n.$$

Напомним, что положительность последовательных главных миноров является необходимым и достаточным условием положительной определенности матрицы. Так как $\Delta(F_{s+1})$>0, то мы получаем, что $\Delta(F_i) > 0$, $i = s+2, \dots, n$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.16). Это и доказывает лемму. □

Из (3.12), (3.13) и (3.14) следует, что

$$b_j^i = \frac{a_{s+1}}{a_i} \left(\frac{f_{1j} f_{ii}}{f_{1s+1}} - f_{js+1} \frac{a_i^2}{a_{s+1}^2} \right), \quad j = 1, \dots, s+1, \ \ i = s+2, \dots, n, \tag{3.17}$$

$$b_j^i = \frac{a_j}{a_i} \left(f_{ii} - f_{jj} \frac{a_i^2}{a_j^2} \right), \quad j = s+1, \dots, i-1, \quad i = s+2, \dots, n. \tag{3.18}$$

Выберем числа $f_{ii} > 0$, $i = s+2, \dots, n$ так, чтобы выполнялось условие (3.16). Тогда, используя (3.18), мы получаем

$$b_{i-1}^{\,i} = \frac{a_{i-1}}{a_i} \left(f_{ii} - f_{i-1i-1} \frac{a_i^2}{a_{i-1}^2} \right) > 0, \quad i = s+2, \dots, n.$$

Теперь равенство (3.11) может быть переписано в виде

$$\dot V(x)\Big|_{(3.7)} = -\big(Wx, x\big) - 2 \sum_{i=s+2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} b_j^i x_j x_{i-1}^{2k_{i-1}+1}, \tag{3.19}$$

где $b_{\,i}^{\,j}$ определены равенствами (3.17) и (3.18).

Отметим, что $x_i^{2k_i+2} > 0$ для $x \neq 0$, поскольку $2k_i + 2 = \frac{2(p_i+q_i)}{q_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, представляет собой отношение четных чисел к нечетным.

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Покажем, что $\dot V(x)\Big|_{(3.7)} < 0$ в некоторой окрестности начала координат. Это будет означать, что нулевая точка покоя системы (3.7) асимптотически устойчива в смысле Ляпунова при $n = 2$.

Из (3.18) и (3.19) следует, что

$$\dot V(x)\Big|_{(3.7)} = -\big(Wx, x\big) - 2b_1^2 x_1^{2k_1+2} < 0 \quad \text{для} \quad \|x\| \neq 0.$$

Докажем справедливость последнего неравенства. Для этого мы рассмотрим два следующих случая. Если $x_1 \neq 0$, то последнее неравенство верно ввиду условия $b_1^2 = \frac{a_1}{a_2}\left(f_{22} - f_{11}\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) > 0$ и неотрицательной определенности матрицы W вида (2.5). Если $x_1 = 0$, то $-\big(Wx, x\big) = -w_{11}\frac{a_2^2}{a_1^2}\, x_2^2 < 0$ для $x_2 \neq 0$ и неравенство справедливо.

Итак, мы показали, что управление (3.8) решает задачу глобальной стабилизации для системы (3.7).

Далее мы будем использовать обозначения: I_{s+1} – единичная матрица размерности $\big(s+1\big)\times\big(s+1\big)$, $I_{n,n-s} = \mathrm{diag}\big(1, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-s}\big)$ – $n\times n$ диагональная матрица, $I_{s+1,1} = \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, 0)$ – $\big(s+1\big)\times\big(s+1\big)$ диагональная матица.

Рассмотрим теперь случай $n \geq 3$. Поскольку матрица W_{s+1} положительно определена, верна следующая оценка

$$(W_{s+1}y, y) \geq \lambda_{min}(y, y), \quad y \in \mathbb{R}^{s+1}, \tag{3.20}$$

где $\lambda_{min} > 0$ – наименьшее собственное значение матрицы W_{s+1}. Используя оценку (3.20), мы получим

$$\big((W_{s+1} - \lambda_{min}I_{s+1,1})x, x\big) = \big((W_{s+1} - \lambda_{min}I_{s+1})y, y\big) + \lambda_{min}x_{s+1}^2 \geq 0,$$

где $y = (x_1, \ldots, x_{s+1})^*$, т.е. матрица $W_{s+1} - \lambda_{min}I_{s+1,1}$ неотрицательно определена.

Покажем, что матрица $W - \lambda_{min}I_{n,n-s}$ неотрицательно определена. Действительно, матрица $W_{s+1} - \lambda_{min}I_{s+1,1}$ сформирована первыми $(s+1)$ строками и столбцами матрицы $W - \lambda_{min} I_{n,n-s}$. Поскольку матрица $W_{s+1} - \lambda_{min} I_{s+1,1} \geq 0$, используя Лемму 2.1, мы получаем, что матрица $W - \lambda_{min} I_{n,n-s}$ неотрицательно определена, т.е.

$$\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) \geq 0 \tag{3.21}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Перепишем равенство (3.19) в виде

$$\begin{gathered} \dot V(x)\Big|_{(3.7)} = -\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) - \lambda_{min} \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \\ -2 \sum_{i=s+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} b_j^{i+1} x_j x_i^{2k_i+1}. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Напомним, что согласно неравенству Янга для любых чисел $a, b, r > 0$ справедливо следующее неравенство

$$ab \leq \frac{1}{1+r}\, a^{1+r} + \frac{r}{1+r}\, b^{1+\frac{1}{r}}. \tag{3.23}$$

Ниже мы покажем, что $\dot V(x)\Big|_{(3.7)}$ отрицательна в некоторой проколотой окрестности начала координат. Выберем действительные числа $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, n-1$ так, чтобы были удовлетворены следующие условия

$$0 < r_j < 2k_{s+1}, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{3.24}$$

$$2k_j + 1 < r_j < 2k_{j+1} + 1, \quad j = s+1, \ldots, n-1. \tag{3.25}$$

Используя неравенство (3.23), мы получаем следующие оценки

$$x_j x_i^{2k_i+1} \leq |x_j|\ |x_i|^{2k_i+1-r_j}\ |x_i|^{r_j} \leq \frac{1}{2}\big(|x_j|^2 + |x_i|^{4k_i+2-2r_j}\big)|x_i|^{r_j}, \tag{3.26}$$

где $j = 1, \ldots, s$, $i = s+1, \ldots, n-1$, и

$$x_j x_i^{2k_i+1} \leq \frac{1}{1+r_j}\, |x_j|^{r_j+1} + \frac{r_j}{1+r_j}\, |x_i|^{2k_i+1+\frac{2k_i+1}{r_j}}, \tag{3.27}$$

где $j = 1, \ldots, i-1$, $i = s+1, \ldots, n-1$.

Из (3.22), используя (3.26) и (3.27), мы получаем

$$\dot V(x)\Big|_{(3.7)} \le -\big((W-\lambda_{min}I_{n,n-s})x,x\big) - \lambda_{min}\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - 2\sum_{i=s+1}^{n-1} b_i^{\,i+1} x_i^{2k_i+2}$$
$$+\sum_{i=s+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{s} |b_j^{\,i+1}|\Big(|x_j|^2\,|x_i|^{r_j} + |x_i|^{4k_i+2-r_j}\Big) \tag{3.28}$$
$$+2\sum_{i=s+2}^{n-1}\sum_{j=s+1}^{i-1} |b_j^{\,i+1}|\Big(\tfrac{1}{1+r_j}\,|x_j|^{r_j+1} + \tfrac{r_j}{1+r_j}\,|x_i|^{2k_i+1+\frac{2k_i+1}{r_j}}\Big).$$

Отметим справедливость соотношения

$$\sum_{i=s+2}^{n-1}\sum_{j=s+1}^{i-1}\frac{|b_j^{\,i+1}|}{1+r_j}\,|x_j|^{r_j+1} = \sum_{i=s+1}^{n-2}\sum_{j=i+2}^{n}\frac{|b_i^{\,j}|}{1+r_i}\,|x_i|^{r_i+1}.$$

Откуда заключаем, что неравенство (3.28) принимает вид

$$\dot V(x)\Big|_{(3.7)} \le -\big((W-\lambda_{min}I_{n,n-s})x,x\big) - \sum_{i=1}^{s}\Big(\lambda_{min} - \sum_{j=s+1}^{n-1}|b_i^{\,j+1}|\,|x_j|^{r_i}\Big)x_i^2$$
$$-2\sum_{i=s+1}^{n-1}\Big(b_i^{\,i+1} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}|b_j^{\,i+1}|\,|x_i|^{2k_i-r_j} - \sum_{j=i+2}^{n}\tfrac{|\,b_i^{\,j}|}{1+r_i}\,|x_i|^{r_i-2k_i-1} \tag{3.29}$$
$$-\sum_{j=s+1}^{i-1}\tfrac{r_j}{1+r_j}\,|b_j^{\,i+1}|\,|x_i|^{\frac{2k_i+1-r_j}{r_j}}\Big)x_i^{2k_i+2}.$$

Используя обозначения

$$\beta_j = \min_{1\le i\le s}\left\{\left(\frac{\lambda_{min}}{(n-s-1)\,|b_i^{j+1}|}\right)^{\frac{1}{r_i}}\right\},\quad j=s+1,\dots,n-1,$$

мы получаем, что

$$\lambda_{min} - \sum_{j=s+1}^{n-1}|b_i^{\,j+1}|\,|x_j|^{r_i} > 0,\quad i=1,\dots,s \tag{3.30}$$

для x_j таких, что $|x_j| < \beta_j$, $j=s+1,\dots,n-1$.

Рассмотрим семейство функций $g_i : R \longrightarrow R$ вида

$$g_i(x) = 2b_i^{\,i+1} - \sum_{j=1}^{s}|b_j^{\,i+1}|\,|x|^{2k_i-r_j} - 2\sum_{j=i+2}^{n}\tfrac{|\,b_i^{\,j}|}{1+r_i}\,|x|^{r_i-2k_i-1}$$
$$-2\sum_{j=s+1}^{i-1}\tfrac{r_j}{1+r_j}\,|b_j^{\,i+1}|\,|x|^{\frac{2k_i+1-r_j}{r_j}},\quad i=s+1,\dots,n-1.$$

Из (3.24) и (3.25) следует, что

$$2k_i - r_j > 0,\quad j=1,\dots,s,\quad i=s+1,\dots,n-1,$$

$$r_i - 2k_i - 1 > 0, \quad \frac{2k_i + 1 - r_j}{r_j} > 0, \quad j < i, \quad i = s+1, \dots, n-1.$$

Определенные таким образом функции $g_i(x)$, $i = s+1, \dots, n-1$, являются непрерывными, симметричными и достигают своего глобального максимума в точке $x = 0$. Более того,

$$g_i(0) = 2b_i^{i+1} > 0, \quad i = s+1, \dots, n-1. \tag{3.31}$$

Обозначим через x_i^* минимальный положительный корень уравнения $g_i(x) = 0$. Тогда, используя (3.31), мы получаем

$$g_i(x) > 0 \quad \text{для} \quad |x| \leq x_i^*, \quad i = s+1, \dots, n-1. \tag{3.32}$$

Откуда, согласно (3.29), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \dot{V}(x)\Big|_{(3.7)} \leq -\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) - \sum_{i=1}^{s} \Big(\lambda_{min} - \sum_{j=s+1}^{n-1} |b_i^{j+1}|\, |x_j|^{r_i}\Big) x_i^2 \\ - \sum_{i=s+1}^{n-1} g_i(x_i) x_i^{2k_i+2} < 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

для $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x_i| < \min\{\beta_i, x_i^*\}$, $i = s+1, \dots, n-1$, и $\|x\| \neq 0$.

Докажем справедливость последнего неравенства. Действительно, рассмотрим два следующих случая. Если $x_i \neq 0$ для некоторого i такого, что $1 \leq i \leq n-1$, то из (3.21), (3.30) и (3.32) следует что неравенство (3.33) справедливо. Если $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, то

$$-\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) = -w_{s+1s+1} \frac{a_n^2}{a_{s+1}^2} x_n^2 < 0 \quad \text{для} \quad x_n \neq 0$$

и неравенство (3.33) верно.

Из неравенство (3.33) следует, что управление $u = u(x)$ вида (3.8) решает задачу стабилизации для системы (3.7) при $n \geq 3$.

Построим эллипсоидальную оценку области притяжения точки покоя $x = 0$ в случае, когда $n \geq 3$. С этой целью мы найдем наибольшее $c > 0$, при котором эллипсоид $(Fx, x) \leq c$ принадлежит множеству

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \gamma_i,\ i = s+1, \dots, n-1\},$$

где $\gamma_i = \min\{\beta_i, x_i^*\}$, $i = s+1, \ldots, n-1$.

Сначала, рассмотрим вспомогательную задачу на экстремум. А именно, найдем минимум функции (Fx, x) при ограничениях $(x, e_i) = \gamma_i$, где i – некоторое фиксированное натуральное число такое, что $s+1 \le i \le n-1$, e_i – это i-й столбец единичной матрицы размерности $n \times n$.

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа вида

$$L(x, \lambda) = (Fx, x) - \lambda\big((x, e_i) - \gamma_i\big).$$

Пусть x^* является точкой глобального минимума. Из необходимого условия экстремума получаем $L_x(x^*, \lambda) = 2Fx^* - \lambda e_i = 0$. Откуда заключаем, что $x^* = \frac{1}{2}\lambda F^{-1}e_i$. Подставляя x^* в ограничения, получаем $\frac{1}{2}\lambda(F^{-1}e_i, e_i) = \gamma_i$. Находя λ из последнего уравнения, заключаем, что $x^* = \frac{\gamma_i}{(F^{-1}e_i, e_i)}F^{-1}e_i$. Наконец, получаем следующее соотношение $(Fx^*, x^*) = \frac{\gamma_i^2}{(F^{-1}e_i, e_i)}$.

Итак, из полученного решения вспомогательной экстремальной задачи мы можем заключить, что для $n \ge 3$ область притяжения нулевой точки покоя системы (3.7), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (3.8), содержит эллипсоид

$$\Phi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (Fx, x) < c, \quad c = \min_{s+1 \le i \le n-1} \frac{\gamma_i^2}{(F^{-1}e_i, e_i)}\right\}. \tag{3.34}$$

Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать основной результат данного подраздела. В следующей теореме дано решение задачи стабилизации для нелинейной неуправляемой по первому приближению системы (3.7).

Теорема 3.1. Пусть $a_i < 0$, $i = 1, \ldots, s+1$ – действительные числа такие, что собственных значений матрицы A_{s+1} вида (2.8) имеют отрицательные действительные части, $a_i < 0$, $i = s+2, \ldots, n$ – произвольные действительные числа. Предположим, что матрица W_{s+1} вида (2.6) – произвольная положительно определенная матрица. Пусть матрица $F_{s+1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{s+1}$ является единственным положительно определенным решением уравнения (2.3). Выберем числа f_{ij}, $i = j, \ldots, n$, $j = s+2, \ldots, n$ так, чтобы условия (3.15) и (3.16) были справедливы. Определим матрицу F согласно (2.21), определим числа $a_{n-s+i-1}$, $i = s+2, \ldots, n$ равенствами (3.14). Тогда управление $u = u(x)$ вида (3.8) решает задачу стабилизации для системы (3.7). При этом, область притяжения нулевой точки покоя системы (3.7), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (3.8), содержит эллипсоид (3.34) при $n \geq 3$ и совпадает со всем пространством при $n = 2$.

3.3. Стабилизация класса систем по нелинейному приближению

В данном подразделе решена задача стабилизации для системы (3.4) по нелинейному приближению в случае, когда $c_i = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$. Итак, рассмотрим нелинейную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k_1+1} + f_1(t,x,u), \\ \dot{x}_3 = x_2^{2k_2+1} + f_2(t,x,u), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^{2k_{n-1}+1} + f_{n-1}(t,x,u), \end{cases} \tag{3.35}$$

где $k_i = \frac{p_i}{q_i}$, $p_i \geq 0$ – целые числа, $q_i > 0$ – нечетные числа, $i = 1, \ldots, n-1$.

Напомним, что по сделанному в подразделе 3.1 предположению числа k_i, $i = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условию (3.5). Кроме того, мы предположили, что функции $f_i(t,x,u)$ удовлетворяют оценкам (3.3), т.е. для некоторых $\alpha_i > 0$ мы имеем

$$|f_i(t,x,u)| \leq \alpha_i (x_1^{2k_1+2} + x_2^{2k_2+2} + \cdots + x_{n-1}^{2k_{n-1}+2}), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

где $\|x\| < \rho$, $\rho > 0$.

Рассмотрим систему (3.7) в качестве нелинейного приближения системы (3.35). Ниже мы покажем, что управление $u = u(x)$, которое было построено в подразделе 3.2 для стабилизации системы (3.7), стабилизирует и систему (3.35).

Итак, пусть управление $u = u(x)$ вида (3.8) решает задачу стабилизации для системы (3.7), и пусть выполнены условия Теоремы 3.1. Покажем, что это управление стабилизирует и систему (3.35).

Вычислим производную функции $V(x)$ вида (3.9) в силу системы (3.35), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (3.8), и получим

$$\begin{aligned} \dot V(x)\Big|_{(3.35)} = &-\big(Wx, x\big) + 2\sum_{i=s+1}^{n-1}(Fh_{i+1}, x)x_i^{2k_i+1} \\ &+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(Fe_{i+1}, x\big)f_i(t, x, u), \end{aligned} \tag{3.36}$$

где e_i – i-й столбец единичной $n \times n$-матрицы.

Рассмотрим, сначала, случай $n = 2$. В этом случае $s = 0$. Тогда

$$\dot V(x)\Big|_{(3.35)} = -(Wx, x) - 2b_{\,1}^{\,2}x_1^{2k_1+2} + 2(Fe_2, x)f_1(t, x, u).$$

Из оценок (3.3) следует, что

$$\dot V(x)\Big|_{(3.35)} \le -\big(Wx, x\big) - 2\big(b_{\,1}^{\,2} - \alpha_1\|Fe_2\|\;\|x\|\big)x_1^{2k_1+2} < 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что $0 < \|x\| < L_1$, где $L_1 = \min\left\{\rho, \frac{b_1^2}{\alpha_1\cdot\|Fe_2\|}\right\}$.

Докажем справедливость последнего неравенства. Действительно, если $x_1 \neq 0$, то неравенство справедливо, поскольку матрица W неотрицательно определена и $b_{\,1}^{\,2} - \alpha_1\|Fe_2\|\;\|x\| > 0$ для $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\|x\| < \frac{b_1^2}{\alpha_1\,\|Fe_2\|}$. Если $x_1 = 0$, то $-(Wx, x) = -w_{22}\frac{a_2^2}{a_1^2}x_2^2 < 0$ для $x_2 \neq 0$ неравенство выполнено.

Перейдем теперь к рассмотрению случая $n \ge 3$. Используя (3.32), из (3.36) мы получаем

$$\begin{aligned} \dot V(x)\Big|_{(3.35)} \le &-\big((W - \lambda_{min}I_{n,n-s})x, x\big) - \sum_{i=1}^{s}\Big(\lambda_{min} - \sum_{j=s+1}^{n-1}|b_{\,i}^{\,j+1}|\;|x_j|^{r_i}\Big)x_i^2 \\ &- \sum_{i=s+1}^{n-1}g_i(x_i)x_i^{2k_i+2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\big(Fe_{i+1}, x\big)f_i(t, x, u) \end{aligned} \tag{3.37}$$

для $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x_i| < \min\{\beta_i, x_i^*\}$, $i = s+1, \ldots, n-1$, $\|x\| \neq 0$.

Выберем числа ε_i, $i = 1 \ldots n-1$ так, чтобы

$$0 < \varepsilon_i < \lambda_{min}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon_i < b_{\,i}^{\,i+1}, \quad i = s+1, \ldots, n-1.$$

Пусть $\widehat{x}_i$ является минимальным положительным корнем уравнения $g_i(x_i) = \varepsilon_i$, $i = s+1, \dots, n-1$. Очевидно, что $\widehat{x}_i < x_i^*$, $i = s+1, \dots, n-1$.

Итак, мы можем заключить справедливость следующих неравенств

$$\lambda_{min} - \sum_{j=s+1}^{n-1} |b_i^{j+1}|\,|x_j|^{r_i} \geq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, s, \tag{3.38}$$

для $|x_j| \leq \widehat{m}_j$, где

$$\widehat{m}_j = \min_{1\leq i\leq s}\left\{\left(\frac{\lambda_{min} - \varepsilon_i}{(n-s-1)\,|b_i^{j+1}|}\right)^{\frac{1}{r_i}}\right\}, \quad j = s+1, \dots, n-1,$$

и

$$g_i(x_i) \geq \varepsilon_i, \quad i = s+1, \dots, n-1 \tag{3.39}$$

для $|x_i| \leq \widehat{x}_i$, $i = s+1, \dots, n-1$.

Таким образом, из (3.38) и (3.39) следует, что неравенство (3.37) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot V(x)\Big|_{(3.35)} \leq -\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) - \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^{2k_i+2} \\ +2\sum_{i=1}^{n-1} \big(Fe_{i+1}, x\big) f_i(t,x,u)\end{aligned} \tag{3.40}$$

для $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x_i| < m_i$, где $m_i = \min\{\widehat{x}_i, \widehat{m}_i\}$, $i = s+1, \dots n-1$. Используя оценки (3.3), получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \big(Fe_{i+1}, x\big) f_i(t,x,u) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \|Fe_{i+1}\|\,\|x\|\,\|y\|^2, \tag{3.41}$$

где $y = \left(x_1^{k_1+1}, x_2^{k_2+1}, \dots, x_{n-1}^{k_{n-1}+1}\right)^*$, $\|y\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^{2k_i+2}$.

Используя обозначения

$$\varepsilon = \min_{1\leq i\leq n-1} \varepsilon_i, \quad m = \min_{s+1\leq i\leq n-1} m_i,$$

из неравенств (3.40) и (3.41) заключаем, что

$$\begin{aligned}\dot V(x)\Big|_{(3.35)} \leq -\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) \\ -\Big(\varepsilon - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \|Fe_{i+1}\|\,\|x\|\Big)\|y\|^2 < 0\end{aligned} \tag{3.42}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $0 < \|x\| < L_2$, где $L_2 = \min\left\{\rho, \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i \|Fe_{i+1}\|}, m\right\}$.

Покажем, что неравенство (3.42) справедливо. Для этого рассмотрим два следующих случая. Если $\|y\| \neq 0$, то $\varepsilon - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i \|Fe_{i+1}\| \; \|x\| > 0$ для $\|x\| < L_2$. Таким образом, из последнего неравенства и неравенства (3.21) следует, что (3.42) справедливо. Если $\|y\| = 0$, то

$$-\big((W - \lambda_{min} I_{n,n-s})x, x\big) = -w_{s+1s+1}\frac{a_n^2}{a_{s+1}^2}x_n^2 < 0 \quad \text{для} \quad x_n \neq 0$$

и неравенство (3.42) верно.

Из неравенства (3.42) следует, что нулевая точка покоя системы (3.35), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (3.8), асимптотически устойчива. Таким образом, мы показали, что управление $u = u(x)$ вида (3.8) решает задачу стабилизации для системы (3.35).

Построим эллипсоидальную оценку области притяжения точки покоя $x = 0$ системы (3.35), замкнутой управлением $u = u(x)$. С этой целью мы найдем $c > 0$ такое, что эллипсоид $(Fx, x) < c$ будет вписан в шар $\|x\| \leq L$, где $L = \begin{cases} L_1, \ n = 2 \\ L_2, \ n \geq 3 \end{cases}$. Легко проверить, что этот эллипсоид имеет вид

$$\Phi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (Fx, x) < c, \quad c = \lambda_{min}(F)L^2\right\}, \tag{3.43}$$

где $\lambda_{min}(F) > 0$ – наименьшее собственное значение матрицы F.

Основываясь на полученных в этом подразделе результатах сформулируем теорему, в которой описано решение задачи стабилизации системы (3.35) по нелинейному приближению.

Теорема 3.2. Предположим, что выполнены условия Теоремы 3.1. Тогда управление $u = u(x)$ вида (3.8) решает задачу стабилизации для системы (3.35). При этом, область притяжения нулевой точки покоя замкнутой управлением $u = u(x)$ системы (3.35) содержит эллипсоид (3.43).

3.4. Стабилизация класса нелинейных систем с неуправляемым первым приближением

Решим теперь задачу стабилизации для системы (3.4) в случае, когда c_i, $i = 1, \dots, n-1$ – произвольные действительные числа такие, что $\prod\limits_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$. Итак, рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = c_1 x_1^{2k_1+1} + f_1(t,x,u), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_n = c_{n-1} x_{n-1}^{2k_{n-1}+1} + f_{n-1}(t,x,u). \end{cases} \tag{3.44}$$

Напомним, что числа k_i, $i = 1 \dots, n-1$, удовлетворяют условию (3.5), а функции $f_i(t,x,u)$, $i = 1, \dots, n-1$, удовлетворяют оценкам (3.3).

В следующей теореме дано решение задачи стабилизации для нелинейной системы (3.44), которая неуправляема по первому приближению.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия Теоремы 3.2. Положим

$$\widehat{L}_1 = \min\left\{ \frac{\rho}{\max\limits_{1\le i\le n} \widehat{c}_i}, \frac{b_1^2}{\widehat{\alpha}_1 \|Fe_2\|} \right\}, \quad \widehat{L}_2 = \min\left\{ \frac{\rho}{\max\limits_{1\le i\le n} \widehat{c}_i}, \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \widehat{\alpha}_i \|Fe_{i+1}\|}, m \right\},$$

где $\widehat{\alpha}_i = \dfrac{\alpha_i}{|\widehat{c}_{i+1}|} \max\limits_{1\le j\le n-1} \widehat{c}_j^{\,2k_j+2}$, $\widehat{c}_i$ определяются следующими соотношениями

$$\widehat{c}_1 = 1, \quad \widehat{c}_2 = c_1, \quad \widehat{c}_i = c_{i-1}(\widehat{c}_{i-1})^{2k_{i-1}+1}, \quad i = 3, \dots, n.$$

Тогда управление

$$u(x) = a_1 x_1 + \frac{a_2}{\widehat{c}_2} x_2 + \dots + \frac{a_n}{\widehat{c}_n} x_n + \sum_{i=s+1}^{n-1} a_{n-s+i} \left(\frac{x_i}{\widehat{c}_i} \right)^{2k_i+1} \tag{3.45}$$

решает задачу стабилизации для системы (3.44). При этом, область притяжения нулевой точки покоя системы (3.44), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (3.45), содержит эллипсоид

$$\Phi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (\widehat{C}^{-1} F \widehat{C}^{-1} x, x) < \lambda_{min}(F) \widehat{L}^2 \right\}, \tag{3.46}$$

где $\widehat{L} = \begin{cases} \widehat{L}_1, \ n = 2 \\ \widehat{L}_2, \ n \geq 3 \end{cases}$, $\widehat{C} = \mathrm{diag}\big(\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \ldots, \widehat{c}_n\big)$ – диагональная матрица размерности $n \times n$, $\lambda_{min}(F) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы F.

Доказательство. Подставим управление $u = u(x)$ в систему (3.44). Замной переменных $x = \widehat{C}y$ ($x_i = \widehat{c}_i y_i$, $i = 1, \ldots, n$) замкнутая система (3.44) отображается на систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = v(y), \\ \dot{y}_i = y_{i-1}^{2k_{i-1}+1} + \dfrac{1}{\widehat{c}_i} f_{i-1}(t, \widehat{C}y, u), \quad i = 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.47}$$

где $v(y) = u(\widehat{C}y)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^*$.

Из оценок (3.3) следует, что

$$|\frac{1}{\widehat{c}_{i+1}} f_i(t, \widehat{C}y, u)| \leq \frac{\alpha_i}{|\widehat{c}_{i+1}|} \sum_{i=1}^{n-1} (\widehat{c}_i y_i)^{2k_i+2} \leq \widehat{\alpha}_i \sum_{i=1}^{n-1} y_i^{2k_i+2}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

для $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|y\| \leq \dfrac{\rho}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \widehat{c}_i}$. Тогда, используя Теорему 3.2, мы получаем, что управление

$$v(y) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n + \sum_{i=s+1}^{n-1} a_{n-s+i} y_i^{2k_i+1}$$

стабилизирует незамкнутую систему (3.47). При этом, область притяжения нулевой точки покоя системы (3.47) содержит эллипсоид

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n : (Fy, y) < c, \quad c = \lambda_{min}(F)\widehat{L}^2 \right\}.$$

Делая обратную замену переменных $y = \widehat{C}^{-1}x$, мы убеждаемся в том, что управление $u = u(x)$ вида (3.45) стабилизирует систему (3.44) и область притяжения нулевой точки покоя замкнутой системы содержит эллипсоид (3.46). □

Из Теоремы 3.3 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия Теоремы 3.3. Тогда управление (3.45) стабилизирует систему (3.1). При этом, область притяжения нулевой точки покоя системы (3.1), замкнутой управлением (3.45), содержит эллипсоид (3.46).

Пример 3.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{2}\sin 2x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_2\cos x_2 - \sin x_2 + \frac{1}{2}\sin 2x_2, \end{cases} \tag{3.48}$$

В этом случае

$$\varphi_1(t,x,u) = x_1 - \frac{1}{2}\sin 2x_1, \quad \varphi_2(t,x,u) = x_2 - x_2\cos x_2 - \sin x_2 + \frac{1}{2}\sin 2x_2.$$

Используя формулу Тейлора, мы получаем

$$\varphi_1(t,x,u) = \frac{2}{3}x_1^3 + f_1(x_1), \quad \varphi_2(t,x,u) = \frac{1}{12}x_2^5 + f_2(x_2),$$

где $|f_1(x_1)| \le \dfrac{2}{15}|x_1|^5$ и $|f_2(x_2)| \le \dfrac{1}{90}|x_2|^7$.

Тогда система (3.48) принимает вид (3.44), где $n = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $c_1 = \dfrac{2}{3}$, $c_2 = \dfrac{1}{12}$, $\alpha_1 = \dfrac{2}{15}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{90}$, $\rho = 1$, $s = 0$. Откуда получаем $\widehat{c}_1 = 1$, $\widehat{c}_2 = \dfrac{2}{3}$, $\widehat{c}_3 = \dfrac{8}{729}$.

Положим $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -\dfrac{1}{2}$, $w_{11} = 2$. Тогда, согласно (2.4) и (2.5), имеем

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Из (2.21) и (3.15) мы получаем, что решение матричного уравнения (2.3) при $f_{22} = 5$, $f_{33} = 1$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dfrac{1}{2} \\ 2 & 5 & \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно Теореме 3.3, мы заключаем, что управление

$$u(x) = -x_1 - 3x_2 - \frac{729}{16}x_3 - \frac{5}{2}x_1^3 - \frac{243}{16}x_2^5$$

решает задачу стабилизации для системы (3.48). В этом случае область притяжения нулевой точки покоя замкнутой системы содержит эллипсоид

$$\Phi = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : (Fy, y) \le 0.0891\ldots\right\}, \quad \text{где} \quad y = \left(\frac{x_1}{\widehat{c}_1}, \frac{x_2}{\widehat{c}_2}, \frac{x_3}{\widehat{c}_3}\right)^*.$$

Численный анализ доказывает возможность выбора точек не лежащих в этом эллипсоиде. Например, пусть $x_0 = (-0.1, -0.3, 0.15)^*$ выбрана в качестве начальной точки. Эта точка не принадлежит эллипсоиду Φ, но принадлежит области притяжения к началу координат. График соответствующей фазовой траектории изображен на рисунке 1.

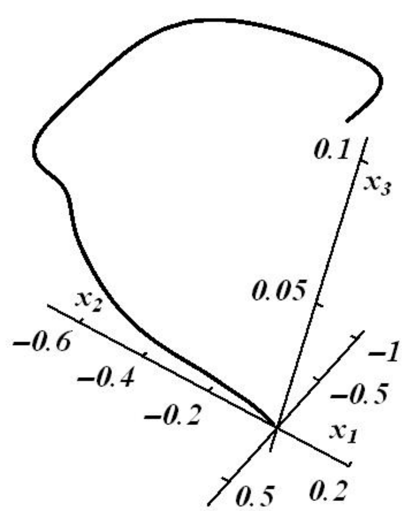

Рис. 1: Фазовая траектория $x(t)$ в $\mathbb{R}^3$.

3.5. Выводы к разделу

В разделе 3 был построен класс стабилизирующих управлений для одной нелинейной неуправляемой по первому приближению системы. Метод стабилизации основан на рассмотрении нелинейного приближения исходной нелинейной системы. Стабилизирующее управление для системы нелинейного приближения построено в подразделе 3.2, основной результат этого подраздела сформулирован в Теореме 3.1. В подразделе 3.3 рассмотрена задача стабилизации по нелинейному приближению. В Теореме 3.2 доказано, что построенное для нелинейного приближения управление стабилизирует и исходную нелинейную систему. В подразделе 3.4 рассмотрен класс систем, которые отображаются на нелинейную систему из подраздела 3.1.

РАЗДЕЛ 4

СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТЕПЕННОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

В настоящем разделе решена задача синтеза ограниченного управления для класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем. Подход к решению этой задачи основан на рассмотрении системы нелинейного приближения исходной управляемой системы. Для этого нелинейного приближения построена функция управляемости и ограниченное позиционное управление. Показано, что построенное управление решает задачу синтеза и для исходной нелинейной системы. Дана оценка области достижимости начала координат.

4.1. Задача синтеза для класса нелинейных систем

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \le d, \\ \dot{x}_i = \varphi_i(t, x, u), \quad i = 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in [-d, d]$ – управление, $d > 0$ – заданное число, $\varphi_i(t, x, u)$ – непрерывные по совокупности переменных функции, такие что в некоторой окрестности нуля $\|x\| \le \rho$ при $|u| \le d$ имеют место соотношения

$$\varphi_i(t, x, u) = c_{i-1}x_{i-1} + f_{i-1}(t, x, u), \quad i = 2, \ldots, n-1, \tag{4.2}$$

$$\varphi_n(t, x, u) = c_{n-1}x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t, x, u), \quad k = \frac{p}{q} > 0, \tag{4.3}$$

где $p > 0$ – целое число, $q > 0$ – нечетное число, c_i – некоторые действительные числа такие, что $\prod\limits_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$, функции $f_i(t, x, u)$ – непрерывны по совокупности аргументов и удовлетворяют условию Липшица по x и u, $f_i(t, 0, 0) = 0$ при любом $t > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Далее будем считать, что при $\|x\| \le \rho$ функции $f_i(t, x, u)$ удовлетворяют ограничениям:

$$|f_i(t,x,u)| \le \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} |x_j|^{\frac{i+r}{j}} + |x_n|^{\frac{i+r}{m}} \right), \quad i = 1, \dots, n-2, \tag{4.4}$$

$$|f_{n-1}(t,x,u)| \le \alpha_{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |x_j|^{\frac{m-1+r}{j}} + |x_n|^{\frac{m-1+r}{m}} \right), \tag{4.5}$$

где $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $r > 0$ – некоторые заданные действительные числа, $m = (2k+1)n - 2k$.

В качестве нелинейного приближения системы (4.1) с правой частью (4.2)–(4.3), удовлетворяющей ограничениям (4.4) и (4.5), рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 = u, \\ x_i = c_{i-1}x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ x_n = c_{n-1}x_{n-1}^{2k+1}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Далее в работе будет построено управление $u = u(x)$, решающее задачу допустимого позиционного синтеза для системы (4.6), и удовлетворяющее ограничению $|u(x)| \le d$. И будет показано, что это управление решает задачу синтеза ограниченного управления и для исходной системы (4.1).

Предложенный в диссертации подход к построению управления основан на методе функции управляемости. А именно, управление $u = u(x)$ и функция управляемости $\Theta = \Theta(x)$ строятся так, чтобы

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.1)} \le -\beta \Theta(x)^{1-\frac{1}{\alpha}} \tag{4.7}$$

при некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Это неравенство обеспечивает конечность времени попадания в начало координат. Причем, время движения $T(x_0)$ из точки x_0 в начало координат удовлетворяет оценке $T(x_0) \le \frac{\alpha}{\beta}\Theta(x_0)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Далее, в подразделе 4.2 существенно используются результаты раздела 3. А именно, синтезирующее управление строится так, чтобы при каждом фиксированном Θ это управление имело вид (3.8) и стабилизировало рассматриваемую систему.

4.2. Синтез ограниченного управления для канонической системы с одной степенной нелинейностью

Рассмотрим систему (4.6) в случае, когда $c_i = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда система (4.6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2}, \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1}, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $k = \frac{p}{q}$, ($p > 0$ – целое число, $q > 0$ – нечетное число).

Отметим, что система (4.8) имеет вид (3.4) при $k_1 = \cdots = k_{n-2} = 0$, $k_{n-1} = k$. Таким образом, числа k_i, $i = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют условию (3.5) при $s = n-2$.

Введем в рассмотрение диагональные $n \times n$-мерные диагональные матрицы вида

$$D(\Theta) = \operatorname{diag}\left(\Theta^{m-1}, \Theta^{m-2}, \ldots, \Theta^{m-n+1}, 1\right),$$

$$H = \operatorname{diag}\left(m-1, m-2, \ldots, m-n+1, 0\right),$$

где $m = 2k(n-1) + n$.

Пусть $a_0 > 0$ – некоторое заданное число. Предположим, что F некоторая положительно определенная матрица такая, что матрица $F^1 = 2mF - FH - HF$ положительно определена. Дополнительные условия относительно a_0 и F будут даны ниже.

Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$, как положительный корень уравнения

$$2a_0\Theta^{2m} = (FD(\Theta)x, D(\Theta)x), \tag{4.9}$$

Лемма 4.1. Пусть матрица $F^1 = 2mF - FH - HF$ положительно определена тогда уравнение (4.8) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Покажем, сначала, что уравнение (4.9) имеет положительный корень при любом фиксированном $x \neq 0$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\Theta, x) = 2a_0\Theta^{2m} - (FD(\Theta)x, D(\Theta)x). \qquad (4.10)$$

Пусть $x_n \neq 0$. Поскольку матрица F положительно определена, то $f_{nn} > 0$. Тогда $\Phi(0, x)$<0. Очевидно, что $\lim\limits_{\Theta\to+\infty} \Phi(\Theta, x) = +\infty$. Откуда следует, что существует Θ^* такое, что $\Phi(\Theta^*, x) = 0$. Пусть теперь $x_n = \cdots = x_{n-p+1} = 0$, а $x_{n-p} \neq 0$ при $1 \leq p \leq n-1$. Из положительной определенности матрицы F следует, что $f_{n-p\,n-p} > 0$. В этом случае ненулевые положительные корни уравнения (4.10) совпадает с ненулевыми положительными корнями уравнения

$$2a_0\Theta^{n-p} - \sum_{i,j=1}^{n-p} f_{ij}x_ix_j\Theta^{n-p-i-j} = 0.$$

Существование положительного корня последнего уравнения доказывается аналогично случаю $x_n \neq 0$.

Покажем единственность положительного корня функции $\Phi(\Theta, x)$. Вычислим производную функции $\Phi(\Theta, x)$ по переменной Θ и получим

$$\begin{aligned}\Phi_\Theta(\Theta, x) &= 4ma_0\Theta^{2m-1} - \frac{1}{\Theta}((FHD(\Theta)x, D(\Theta)x) - (FD(\Theta)x, HD(\Theta)x)) \\ &= \frac{1}{\Theta}\Big(4ma_0\Theta^{2m} - \big((FH + HF)D(\Theta)x, D(\Theta)x\big)\Big).\end{aligned}$$

Пусть $\Theta^* > 0$ является корнем уравнения (4.10). Тогда, в силу положительной определенности матрицы F^1, имеем

$$\Phi_\Theta(\Theta^*, x) = (F^1D(\Theta^*)x, D(\Theta^*)x) > 0.$$

Откуда следует единственность положительного корня уравнения (4.10). Лемма доказана. $\square$

Доопределим функцию $\Theta(x)$ значением $\Theta(0) = 0$. Поскольку $\Phi_\Theta(\Theta, x) \neq 0$, то согласно теореме о неявной функции, $\Theta(x)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема при $x \neq 0$.

Из неравенства

$$2a_0\Theta^{2m} \le \lambda_{\max}(F)\|D(\Theta)x\|^2 \le \lambda_{\max}(F)\|x\|$$

при $\Theta \le 1$ следует, что $\Theta(x)$ является непрерывной и при $x = 0$.

Итак, функция $\Theta(x)$ удовлетворяет равенству

$$2a_0\Theta^{2m}(x) = (FD(\Theta(x))x, D(\Theta(x))x). \tag{4.11}$$

Управление, решающее задачу синтеза, будем искать в виде

$$u(x) = \frac{1}{\Theta^m(x)}(a, D(\Theta(x))x) + a_{n+1}\frac{x_{n-1}^{2k+1}}{\Theta^{m-1}(x)}, \tag{4.12}$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^* \in \mathbb{R}^n$. Числа $a_i < 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, будут определены далее.

Будем использовать обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Отметим, что матрица A имеет вид (2.4) при $s = 0$. Далее при построении управлений мы будем использовать результаты разделов 2 и 3.

Вычислим производную функции $\Theta(x)$ в силу системы (4.8), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (4.12). Для этого продифференцируем обе части равенства (4.11) в силу замкнутой системы (4.8) и получим

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} = \frac{\big((A^*F + FA)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)\big)}{\big((2mF - FH - HF)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)\big)} + \frac{2\big(Fh_n, y(\Theta(x), x)\big)x_{n-1}^{2k+1}\Theta(x)}{\big((2mF - FH - HF)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)\big)}, \tag{4.14}$$

где $y(\Theta(x), x) = D(\Theta(x))x$.

Ниже, следуя методу функции управляемости, мы определим матрицу F и числа a_i, $i = 0, \ldots, n+1$ так, чтобы существовало $\beta > 0$ такое, что

$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} \leq -\beta$. Последнее означает, что неравенство (4.7) справедливо при $\alpha = 1$.

Определим матрицу F, как положительно определенное решение уравнения Ляпунова (2.3) при $s = n-2$. Для этого выберем произвольную положительно определенную матрицу $W_{n-1} = \{w_{ij}\}_{i=1}^{n-1}$. Тогда, согласно Теореме 2.1, для разрешимости уравнения (2.3) в классе положительно определенных матриц необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

была устойчивой, а матрица матрица W имела вид

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n-1} & w_{1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{1n-1} & \cdots & w_{n-1n-1} & w_{n-1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} \\ w_{1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} & \cdots & w_{n-1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} & w_{n-1n-1}\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Напомним, что согласно Лемме 2.1, матрица W вида (4.16) неотрицательно определена. Согласно Теореме 2.2 положительно определенное решение матричного уравнения Ляпунова (2.3) имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}}f_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n-1} & \cdots & f_{n-1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}}f_{n-1n-1} \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}f_{1n-1} & \cdots & \frac{a_n}{a_{n-1}}f_{n-1n-1} & f_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

где положительно определенная матрица $F_{n-1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$ определяется матричным уравнением

$$A_{n-1}^* F_{n-1} + F_{n-1} A_{n-1} = -W_{n-1},$$

а $f_{nn} > 0$ – произвольное действительное число такое, что

$$f_{nn} > \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1}. \tag{4.18}$$

Итак, равенство (4.14) принимает вид

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} = \frac{-\big(Wy(\Theta(x),x), y(\Theta(x),x)\big)}{\big((2mF - FH - HF)y(\Theta(x),x), y(\Theta(x),x)\big)}$$
$$+ \frac{2\big(Fh_n, y(\Theta(x),x)\big)x_{n-1}^{2k+1}\Theta(x)}{\big((2mF - FH - HF)y(\Theta(x),x), y(\Theta(x),x)\big)}. \tag{4.19}$$

Будем использовать следующие обозначения $I_{n,2} = \operatorname{diag}(1,\ldots,1,0,0)$ – диагональная матрица размерности $n\times n$, $I_{n-1,1} = \operatorname{diag}(1,\ldots,1,0)$ – диагональная матрица размерности $(n-1)\times(n-1)$, I_{n-1} – единичная $(n-1)\times(n-1)$-матрица, $\widehat{x} = (x_1,\ldots,x_{n-1})^*$.

Поскольку матрица W_{n-1} положительно определена, будет верна оценка

$$(W_{n-1}\widehat{x},\widehat{x}) \ge \lambda_{min}(\widehat{x},\widehat{x}) \quad \text{для всех} \quad \widehat{x}\in\mathbb{R}^{n-1},$$

где $\lambda_{min} > 0$ – минимальное собственное значение матрицы W_{n-1}. Тогда

$$-\left((W_{n-1} - \lambda_{min}I_{n-1})\widehat{x},\widehat{x}\right) - \lambda_{min}x_{n-1}^2 \le 0 \quad \text{для всех} \quad \widehat{x}\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Последнее неравенство означает, что матрица $W_{n-1} - \lambda_{min}I_{n-1,1}$ неотрицательно определена. Тогда, согласно Лемме 2.1, заключаем

$$-\left((W - \lambda_{min}I_{n,2})x, x\right) \le 0 \quad \text{для всех} \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{4.20}$$

Используя обозначения $b = -Fh_n$, мы получаем

$$\begin{aligned} b_i &= -\left(f_{1i}a_{n+1} + \frac{a_n}{a_{n-1}}f_{in-1}\right), \quad i = 1,\ldots,n-1,\\ b_n &= a_{n+1}\frac{a_n}{a_{n-1}}f_{1n-1} + f_{nn}. \end{aligned}$$

Выберем число a_{n+1} так, чтобы $b_n = 0$. Итак, положим

$$a_{n+1} = -\frac{f_{nn}}{f_{1n-1}}\,\frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{4.21}$$

Таким образом, мы получаем

$$b_i = \left(f_{1i} \frac{f_{nn}}{f_{1n-1}} - f_{in-1} \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \right) \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{4.22}$$

Из (4.18) и (4.22) следует, что

$$b_{n-1} = \left(f_{nn} - f_{n-1n-1} \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \right) \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0.$$

Введем в рассмотрение $(n-1) \times (n-1)$-матрицу вида

$$W_{\lambda_{min}}(\Theta, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} \lambda_{min} & 0 & \cdots & 0 & b_1 \frac{x_{n-1}^k}{\Theta^{k(n-1)}} \\ 0 & \lambda_{min} & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{min} & b_{n-2} \frac{x_{n-1}^k}{\Theta^{k(n-1)}} \\ b_1 \frac{x_{n-1}^k}{\Theta^{k(n-1)}} & \cdots & \cdots & b_{n-2} \frac{x_{n-1}^k}{\Theta^{k(n-1)}} & 2b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Для определенности будем считать, что

$$W_{\lambda_{min}}(\Theta, x_1) = 2b_1, \quad W_{\lambda_{min}}(\Theta, x_2) = \begin{pmatrix} \lambda_{min} & b_1 \frac{x_2^k}{\Theta^{2k}} \\ b_1 \frac{x_2^k}{\Theta^{2k}} & 2b_2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что

$$\lambda_{min} \big(I_{n,2} y(\Theta, x), y(\Theta, x) \big) + 2 \big(b, y(\Theta, x) \big) x_{n-1}^{2k+1} \Theta = \big(W_{\lambda_{min}}(\Theta, x) \widehat{y}(\Theta, x), \widehat{y}(\Theta, x) \big), \tag{4.23}$$

где $\widehat{y}(\Theta, x) = (x_1 \Theta^{m-1}, \dots, x_{n-2} \Theta^{m-n+2}, x_{n-1}^{k+1} \Theta^{\frac{m-n+2}{2}})^*$.

При $n = 2$ равенство (4.23) будем понимать, как

$$\lambda_{min} \big(I_{2,2} y(\Theta, x), y(\Theta, x) \big) + 2 \big(b, y(\Theta, x) \big) x_1^{2k+1} \Theta = 2b_1 x_1^{2k+2} \Theta^m.$$

Используя равенство (4.23), перепишем $\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)}$ в виде

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} = - \frac{\big((W - \lambda_{min} I_{n,2}) y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x) \big)}{(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))} - \frac{\big(W_{\lambda_{min}}(\Theta(x), x_{n-1}) \widehat{y}(\Theta(x), x), \widehat{y}(\Theta(x), x) \big)}{(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}, \tag{4.24}$$

где $F^1 = 2mF - FH - HF$.

Лемма 4.2. Пусть $\widehat{\lambda}_{min}(\Theta, x_{n-1})$ является минимальным собственным значением матрицы $W_{\lambda_{min}}(\Theta, x_{n-1})$. Тогда

$$\widehat{\lambda}_{min}(\Theta, x_{n-1}) = \frac{1}{2}\left(\lambda_{min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{min} - 2b_{n-1})^2 + 4\frac{x_{n-1}^{2k}}{\Theta^{2k(n-1)}}\sum_{i=1}^{n-2} b_i^2}\right)$$

при $n \geq 3$.

Доказательство. Обозначим через $\chi_A(\lambda)$ характеристический полином матриц $W_{\lambda_{min}}(\Theta, x_{n-1})$. Воспользовавшись методом математической индукции нетрудно показать, что

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_{min} - \lambda)^{n-3}(\lambda^2 - (2b_{n-1} + \lambda_{min})\lambda - \frac{x_{n-1}^{2k}}{\Theta^{2k(n-1)}}\sum_{i=1}^{n-2} b_i^2 + 2b_{n-1}\lambda_{min}).$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $\widehat{\lambda}_{min}(\Theta, x_{n-1})$ является наименьшим корнем последнего уравнения. Это и доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.3. Пусть число a_0 удовлетворяет неравенству

$$0 < a_0 < \frac{1}{2}\lambda_{min}(F)\left(\frac{2b_{n-1}\lambda_{min}}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-2}^2}\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{4.25}$$

Тогда матрица $W_{\lambda_{min}}(\Theta(x), x_{n-1})$ положительно определена для любого фиксированного $x \neq 0$.

Доказательство. Напомним, что матрица F положительно определена. Тогда, из (4.11) мы получаем

$$2a_0\Theta^{2m}(x) \geq \lambda_{min}(F)\|y(\Theta(x), x)\|^2, \tag{4.26}$$

где $\lambda_{min}(F) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы F. Поскольку

$$\|y(\Theta, x)\|^2 \geq x_i^2\Theta^{2(m-i)}, \quad i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{и} \quad \|y(\Theta, x)\|^2 \geq x_n^2,$$

то из (4.26) следует, что

$$\frac{x_i^2}{\Theta^{2i}(x)} \leq \frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \frac{x_n^2}{\Theta^{2m}(x)} \leq \frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)} \tag{4.27}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. В частности

$$\frac{x_{n-1}^2}{\Theta^{2(n-1)}(x)} \leq \frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}. \tag{4.28}$$

Сопоставляя (4.25) и (4.26), мы получаем

$$\frac{x_{n-1}^{2k}}{\Theta^{2k(n-1)}(x)} < \frac{2b_{n-1}\lambda_{min}}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-2}^2}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{min}(\Theta(x), x_{n-1}) &> \tfrac{1}{2}\Big(\lambda_{min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{min} - 2b_{n-1})^2 + 8b_{n-1}\lambda_{min}}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\lambda_{min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{min} + 2b_{n-1})^2}\Big) = 0.\end{aligned}$$

Тогда матрица $W_{\lambda_{min}}(\Theta(x), x_{n-1})$ положительно определена для всех фиксированных $x \neq 0$. $\square$

Покажем теперь, что $\dot{\Theta}(x) < 0$ для любого a_0 которое удовлетворяет условию (4.25). Итак, предположим, что a_0 удовлетворяет условию (4.25). Введем следующее обозначение

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{min} + 2b_{n-1} - \sqrt{(\lambda_{min} - 2b_{n-1})^2 + 4L^k \sum_{i=1}^{n-2} b_i^2}\right),$$

где $L = \dfrac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}$. Тогда из неравенства (4.28) следует, что наименьшее собственное значение матрицы $W_{\lambda_{min}}(\Theta(x), x)$ удовлетворяет оценке

$$\widehat{\lambda}_{min}(\Theta(x), x_{n-1}) \geq \widehat{\lambda} > 0. \tag{4.29}$$

Откуда получаем, что

$$\big(W_{\lambda_{min}}(\Theta(x), x_{n-1})\widehat{y}(\Theta(x), x), \widehat{y}(\Theta(x), x)\big) \geq \widehat{\lambda}\|\widehat{y}(\Theta(x), x)\|^2. \tag{4.30}$$

Из положительной определенности матрицы F^1 следует справедливость оценки

$$(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)) \leq \lambda_{max}(F^1)\|y(\Theta(x), x)\|^2, \tag{4.31}$$

где $\lambda_{max}(F^1) > 0$ – максимальное собственное значение матрицы F^1.

Из (4.24), используя (4.30) и (4.31), мы получаем

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} \leq$$
$$-\frac{\big((W-\lambda_{min}I_{n,2})y(\Theta(x),x), y(\Theta(x),x)\big)+\widehat{\lambda}\|\widehat{y}(\Theta(x),x)\|^2}{\lambda_{max}(F^1)\|y(\Theta(x),x)\|^2}, \qquad (4.32)$$

где $\widehat{y}(\Theta(x),x) = (x_1\Theta^{m-1}(x),\dots,x_{n-2}\Theta^{m-n+2}(x), x_{n-1}^{k+1}\Theta^{\frac{m-n+2}{2}}(x))^*$.

Из неравенства (4.32) следует, что

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} < 0 \quad \text{для всех} \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Действительно, для $\|\widehat{y}(\Theta(x),x)\|\neq 0$ справедливость последнего неравенства следует из неравенств (4.20) и (4.29). Для $\|\widehat{y}(\Theta(x),x)\| = 0$ из (4.32) имеем

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} \leq -\frac{w_{n-1n-1}a_n^2}{\lambda_{max}(F^1)a_{n-1}^2} < 0,$$

где $\lambda_{max}(F^1) > 0$, w_{n-1n-1}>0.

Тогда точка $x = 0$ является глобально асимптотически устойчивой точкой покоя для системы (4.8), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (4.13). Теперь мы докажем, что существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} \leq -\beta.$$

Пусть x_i^0, $i = 1,\dots,n$ – действительные числа такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i^0| \neq 0$. Рассмотрим семейство кривых вида

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0|x_n^0|^{-\frac{1}{m}}sign(x_n^0)|x_n|^{\frac{1}{m}}sign(x_n),\\ x_2 = x_2^0|x_n^0|^{-\frac{2}{m}}sign(x_n^0)|x_n|^{\frac{2}{m}}sign(x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} = x_{n-1}^0|x_n^0|^{-\frac{n-1}{m}}sign(x_n^0)|x_n|^{\frac{n-1}{m}}sign(x_n)\\ x_n = x_n. \end{cases} \qquad (4.33)$$

Отметим, что через каждую фиксированию точку $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ такую, что $x_n^0\neq 0$, проходит в точности одна кривая этого семейства.

Пусть точка $x \in \mathbb{R}^n$ лежит на кривой (4.33) при некотором фиксированном $x^0 \neq 0$. Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что

$$\Theta(x) = \Theta(x_0)|x_n^0|^{-\frac{1}{m}}|x_n|^{\frac{1}{m}}. \tag{4.34}$$

Теперь мы оценим $\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)}$ для всех таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, которые лежат на кривой (4.33) при некотором фиксированном $x_0 \neq 0$. Из (4.32), используя (4.33) и (4.34), получаем

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} \leq \\ -\frac{\big((W - \lambda_{min}I_{n,2})z, z\big) + \widehat{\lambda}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-2} z_i^2 + z_{n-1}^{2k+2}\left(\dfrac{2a_0}{(Fz,z)}\right)^k\right)}{\lambda_{max}(F^1)\|z\|^2}, \tag{4.35}$$

где

$$z = (z_1, \dots, z_n)^* = \left(\frac{x_1^0}{x_n^0}\Theta^{m-1}(x_0), \dots, \frac{x_{n-1}^0}{x_n^0}\Theta^{m-n+1}(x_0), 1\right)^*.$$

Покажем, что правая часть (4.35) отделена от нуля. Для этого рассмотрим функцию $G(\widehat{z})$, определенную равенством

$$G(\widehat{z}) = -\frac{\big((W - \lambda_{min}I_{n,2})z, z\big) + \widehat{\lambda}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-2} z_i^2 + z_{n-1}^{2k+2}\left(\dfrac{2a_0}{(Fz,z)}\right)^k\right)}{\lambda_{max}(F^1)\|z\|^2}, \tag{4.36}$$

где $\widehat{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})^*$.

Пусть R является произвольным числом таким, что

$$0 < R < \frac{1}{2}\,\frac{a_n}{a_{n-1}}\,\frac{w_{n-1n-1}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1} w_{in-1}^2}}\,. \tag{4.37}$$

Оценим, сначала, функцию $G(\widehat{p})$ для любой точки $\widehat{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})^*$ такой, что $z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 \leq R^2$. Из (4.36) и (4.37) заключаем, что

$$\begin{aligned}
G(\widehat{z}) &\leq -\frac{\big((W_{n-1}-I_{n-1}\lambda_{min})\widehat{z},\widehat{z}\,\big)+\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}\,w_{n-1n-1}+2\frac{a_n}{a_{n-1}}\sum\limits_{i=1}^{n-1}w_{in-1}z_i}{\lambda_{max}(F^1)\|z\|^2}\\
&\leq -\frac{\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}\,w_{n-1n-1}-2\frac{a_n}{a_{n-1}}\,\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1}w_{in-1}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1}z_i^2}}{\lambda_{max}(F^1)\|p\|^2}\\
&\leq -\frac{\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}\,w_{n-1n-1}-2\frac{a_n}{a_{n-1}}\,R\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1}w_{in-1}^2}}{\lambda_{max}(F^1)(R^2+1)}\equiv -M_1(R)<0. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Оценим теперь функцию $G(\widehat{z})$ для всех точек $\widehat{z}=(z_1,\ldots,z_{n-1})^*$ таких, что $z_1^2+\cdots+z_{n-1}^2\geq R^2$. Из (4.36) и (4.37) вытекает, что

$$\begin{aligned}
G(\widehat{z}) &\leq -\frac{\widehat{\lambda}\left(z_1^2+\cdots+z_{n-2}^2+\left(\frac{2a_0}{(Fz,z)}\right)^k z_{n-1}^{2k+2}\right)}{\lambda_{max}(F^1)\|z\|^2}\\
&\leq -\frac{\widehat{\lambda}\,\min\left\{1,\left(\frac{2a_0}{\lambda_{max}(F)}\right)^k\right\}}{\lambda_{max}(F^1)}\cdot\frac{\left(\|z\|^{2k}(z_1^2+\cdots+z_{n-2}^2)+z_{n-1}^{2k+2}\right)}{\|z\|^{2k+2}}\\
&\leq -\frac{\widehat{\lambda}\,\min\left\{1,\left(\frac{2a_0}{\lambda_{max}(F)}\right)^k\right\}}{\lambda_{max}(F^1)}\cdot\frac{\left(z_1^{2k+2}+\cdots+z_{n-2}^{2k+2}+z_{n-1}^{2k+2}\right)}{\|z\|^{2k+2}}\\
&\leq -\frac{\widehat{\lambda}\,\min\left\{1,\left(\frac{2a_0}{\lambda_{max}(F)}\right)^k\right\}}{\lambda_{max}(F^1)}\cdot\frac{2^{(2-n)k}\left(z_1^2+\cdots+z_{n-2}^2+z_{n-1}^2\right)^{k+1}}{\|z\|^{2k+2}}\\
&\leq -\frac{\widehat{\lambda}\,\min\left\{1,\left(\frac{2a_0}{\lambda_{max}(F)}\right)^k\right\}}{\lambda_{max}(F^1)2^{(n-2)k}}\cdot\frac{R^{2k+2}}{(R^2+1)^{k+1}}\equiv -M_2(R)<0. \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Тогда из неравенств (4.38) и (4.39) следует, что

$$G(\widehat{z})\leq -\min\{M_1(R),M_2(R)\}<0 \quad \text{для всех} \quad \widehat{z}\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Последнее неравенство означает, что $\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)}$ отделена от нуля в каждой точке $x\in\mathbb{R}^n$ такой, что $x_n\neq 0$. Поскольку $\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)}$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то будет верна следующая оценка

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.8)} \leq -\min\{M_1(R), M_2(R)\} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{4.40}$$

Таким образом, мы показали, что неравенство (4.7) выполнено при $\alpha = 1$ и $\beta = \min\{M_1(R), M_2(R)\} > 0$. Тогда управление $u = u(x)$ вида (4.12) решает задачу глобального синтеза для нелинейной системы (4.8).

Получим теперь достаточные условия, при которых управление $u = u(x)$ вида (4.12) удовлетворяет ограничению $|u(x)| \leq d$.

Лемма 4.4. Пусть a_0^* является единственным положительным корнем уравнения

$$\sqrt{\frac{2a_0^*}{\lambda_{min}(F)}}\left(\|a\| - a_{n+1}\Big(\frac{2a_0^*}{\lambda_{min}(F)}\Big)^k\right) = d, \tag{4.41}$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)^*$, $a_{n+1} < 0$, $\lambda_{min}(F) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы F. Если a_0 удовлетворяет неравенству

$$0 < a_0 \leq a_0^*,$$

то управление $u = u(x)$ вида (4.12) удовлетворяет ограничению $|u(x)| \leq d$ для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(a_0) = \sqrt{\frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}}\left(\|a\| - a_{n+1}\Big(\frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}\Big)^k\right).$$

Функция $\Phi(a_0)$ непрерывна и строго возрастает при $a_0 > 0$. Кроме того, $\Phi(a_0) > 0$ для всех $a_0 > 0$. Очевидно, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \text{и} \quad \Phi(a_0) \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad a_0 \longrightarrow +\infty.$$

Тогда существует единственное число $a_0^* > 0$ такое, что $\Phi(a_0^*) = d$.

Оценим теперь управление $u = u(x)$ вида (4.12). Поскольку $0 < a_0 \leq a_0^*$, используя (4.26) и (4.28), имеем

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{\|a\|\,\|D(\Theta(x))x\|}{\Theta(x)^m} - a_{n+1}\frac{x_{n-1}^{2k}}{\Theta^{m-n}(x)} \cdot \frac{|x_{n-1}|}{\Theta^{n-1}(x)} \\ &\leq \sqrt{\frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}}\left(\|a\| - a_{n+1}\Big(\frac{2a_0}{\lambda_{min}(F)}\Big)^k\right) \leq \Phi(a_0^*) = d. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящего подраздела. В следующей теореме дано решение задачи глобального синтеза для нелинейной системы (4.8).

Теорема 4.1. Пусть числа $a_i < 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, такие, что матрица A_{n-1} вида (4.15) устойчива, $a_n < 0$ – произвольное число. Пусть $W_{n-1} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$ – произвольная положительно определенная матрица. Предположим, что матрица F вида (4.17) является положительно определенным решением уравнения (2.3) с правой частью (4.16). Выберем f_{nn} из условия (4.18), определим a_{n+1} равенством (4.21). Предположим, что матрица $F^1 = 2mF - FH - HF$ положительно определена. Выберем число a_0 так, чтобы

$$0 < a_0 < \min\left\{\frac{1}{2}\lambda_{min}(F)\left(\frac{2b_{n-1}\lambda_{min}}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-2}^2}\right)^{\frac{1}{k}}, a_0^*\right\}, \tag{4.42}$$

где $\lambda_{min}(F)$ – минимальное собственное значение матрицы F, λ_{min} – минимальное собственное значение матрицы W_{n-1}, b_i определены равенствами (4.22), a_0^* – единственное положительное решение уравнения (4.41). Определим функцию управляемости $\Theta(x)$, для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, как положительное решение уравнения (4.9). Тогда управление $u = u(x)$ вида (4.12) решает задачу глобального синтеза для системы (4.8). При этом, время движения $T(x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в начало координат удовлетворяет оценке

$$T(x_0) \leq \frac{1}{\min\{M_1(R), M_2(R)\}}\Theta(x_0),$$

где постоянные $M_1(R)$ и $M_2(R)$ определяются (4.38) и (4.39), соответственно (R – произвольное фиксированное число удовлетворяющее неравенству (4.37)).

Доказательство. Из (4.40) следует, что неравенство (4.7) выполнено при $\alpha = 1$ и $\beta = \min\{M_1(R), M_2(R)\}$. Тогда, согласно теореме 1 из [18], управление $u = u(x)$ вида (4.12) решает задачу глобального синтеза для системы (4.8), и $T(x_0)$ удовлетворяет оценке

$$T(x_0) \le \frac{\alpha}{\beta}\Theta(x_0)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\min\{M_1(R), M_2(R)\}}\Theta(x_0).$$

При этом, согласно Лемме 4.4, управление $u = u(x)$ удовлетворяет ограничению $|u(x)| \le d$. Теорема доказана. □

Пример 4.1. Решим задачу синтеза для трехмерной канонической системы с одной степенной нелинейностью. Итак, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2^3, \end{cases} \tag{4.43}$$

Выберем a_1 и a_2 так, чтобы матрица A_{n-1} вида (4.15) была отрицательно определена. Положим, например, $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Число $a_3 < 0$ и положительно определенная матрица $W_2 = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^2$ могут быть выбраны произвольным образом. Пусть $a_3 = -\frac{1}{3}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$. Тогда положительно определенное решение матричного уравнения (2.3) при $f_{33} = 2$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{4}{3} \\ 2 & \frac{11}{4} & \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} & \frac{11}{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица F^1 при таком выборе f_{33} будет положительно определена. Выберем a_4 согласно условию (4.21). Тогда $a_4 = \frac{3}{2}$. Положим $a_0 = 0.8$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ для $x \ne 0$, как единственный положительный корень уравнения

$$2a_0\Theta^{14} = (Fy(\Theta, x), y(\Theta, x)),$$

где $y(\Theta, x) = (x_1\Theta^6, x_2\Theta^5, x_3)^*$. Тогда , согласно Теореме 4.1, управление

$$u(x) = -\frac{x_1}{\Theta(x)} - \frac{1}{2}\frac{x_2}{\Theta^2(x)} - \frac{1}{3}\frac{x_3}{\Theta^7(x)} - \frac{3}{2}\frac{x_2^3}{\Theta^6(x)} \tag{4.44}$$

решает задачу глобального синтеза для системы (4.43).

Выберем, например, $x_0 = (1, 1, -1)^*$ в качестве начальной точки. Для нахождения решения системы (4.43), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (4.44), с начальным условием $x(0) = x_0$ достаточно численно проинтегрировать систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{x_1}{\Theta(x)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{x_2}{\Theta^2(x)} - \dfrac{1}{3}\dfrac{x_3}{\Theta^7(x)} - \dfrac{3}{2}\dfrac{x_2^3}{\Theta^6(x)}, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2^3, \\ \dot{\theta} = \dfrac{-\big(Wy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)\big) + 2\big(Fh_n, y(\Theta(x), x)\big)x_{n-1}^{2k+1}\Theta(x)}{\big(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)\big)}, \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = -1, \Theta(0) = \Theta_0. \end{cases}$$

Здесь Θ_0 – решение уравнения

$$2a_0\Theta^{14} = (Fy(\Theta, x_0), y(\Theta, x_0)).$$

Таким образом, для численного нахождения решений системы достаточно найти значение функции управляемости $\Theta(x)$ всего в одной точке x_0. Так в нашем случае $\Theta_0 = \Theta(x_0) = 1.82\ldots$. При этом $\|x(95.5\ldots)\| = 0.38\ldots \times 10^{-9}$.

Рассмотрим пример механической системы, приводящей к системе (4.8). Решим следующую задачу гашения колебаний грузов.

Пример 4.2. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух грузов, которые движутся без трения по горизонтальной прямой (рисунок 2); m_1 и m_2 – массы первого и второго грузов соответственно. Эти грузы соеденены нелинейной пружиной, сила упругости которой $F = cy^3$, где c – коэффициент жесткости пружины, y – ее удлинение. Пусть x_1 и x_2 – смещения грузов от положения, в котором пружина находится в ненапряженном состоянии. На правый груз массой m_2 действует сила пружины $-c(x_2 - x_1)^3$ и управляющая сила u. На левый груз массой m_1 действует сила $c(x_2 - x_1)^3$. Тогда уравнение движения грузов имеет вид

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = c(x_2 - x_1)^3, \\ m_2\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1)^3 + u. \end{cases}$$

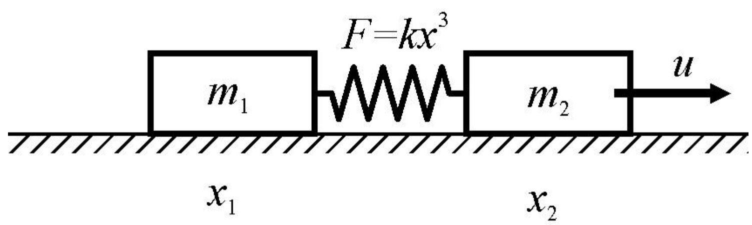

Рис. 2: Модель движения грузов.

Задача управления состоит в гашении колебаний грузов. Введем новые переменные

$$z_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1, \quad z_2 = x_2 - x_1, \quad z_3 = \dot{x}_1, \quad z_4 = x_1.$$

Тогда движение грузов будет описываться системой

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2})z_2^3 + u, \\ \dot{z}_2 = z_1, \\ \dot{z}_3 = \frac{c}{m_1}z_2^3, \\ \dot{z}_4 = z_3. \end{cases}$$

Теперь задача гашения колебаний грузов свелась к выбору такого управления вида $u = u(z)$, что $z_1(t) \to 0$, $z_2(t) \to 0$, $z_3(t) \to 0$ при $t \to T(z_0) < +\infty$, где $z_i(0) = z_{0i}$, т.е. необходимо произвести остановку движения грузов за конечное время. Для этого достаточно стабилизировать за конечное время подсистему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2})z_2^3 + u, \\ \dot{z}_2 = z_1, \\ \dot{z}_3 = \frac{c}{m_1}z_2^3, \end{cases}$$

выбрав управление в виде $u = u(z_1, z_2, z_3)$. Воспользуемся результатами примера 4.1. Тогда управление

$$u(z_1,z_2,z_3)=-\frac{z_1}{\Theta(z)}-\frac{1}{2}\frac{z_2}{\Theta^2(z)}-\frac{1}{3}\frac{m_1}{c}\frac{z_3}{\Theta^7(z)}-\frac{3}{2}\frac{z_2^3}{\Theta^6(z)}+\left(\frac{c}{m_1}+\frac{c}{m_2}\right)z_2^3,$$

где $\Theta(z)$ является единственным положительным корнем уравнения

$$2a_0\Theta^{14}=(C^{-1}FC^{-1}\widehat{y}(\Theta,x),\widehat{y}(\Theta,x)),$$

где $\widehat{y}(\Theta,x)=(z_1\Theta^6,z_2\Theta^5,z_3)^*$, $C=\mathrm{diag}(1,1,\frac{m_1}{c})$, решает задачу гашения колебаний грузов за конечное время.

4.3. Синтез ограниченных управлений для класса систем по нелинейному приближению

В данном подразделе решена задача стабилизации для системы (4.1) с правой частью вида (4.2)–(4.3) по нелинейному приближению в случае, когда $c_i=1$, $i=1,\ldots,n-1$. Итак, рассмотрим нелинейную систему вида

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u,\\ \dot{x}_2=x_1+f_1(t,x,u),\\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\\ \dot{x}_{n-1}=x_{n-2}+f_{n-2}(t,x,u),\\ \dot{x}_n=x_{n-1}^{2k+1}+f_{n-1}(t,x,u),\end{cases}\tag{4.45}$$

где $k=\frac{p}{q}$, $p>0$ – целое число, $q>0$ – нечетное число.

Напомним, что по сделанному в подразделе 4.1 предположению, функции $f_i(t,x,u)$ удовлетворяют ограничениям (4.4)–(4.5), т.е. в некотором шаре $\|x\|<\rho$ верны следующие оценки

$$|f_i(t,x,u)|\le\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{n-1}|x_j|^{\frac{i+r}{j}}+|x_n|^{\frac{i+r}{m}}\Big),\quad i=1\ldots,n-2,$$

$$|f_{n-1}(t,x,u)|\le\alpha_{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}|x_j|^{\frac{m-1+r}{j}}+|x_n|^{\frac{m-1+r}{m}}\Big)$$

при некоторых $\alpha_i>0$, $i=1,\ldots,n-1$, $r>0$.

Рассмотрим систему (4.8) в качестве нелинейного приближения системы (4.45). Ниже мы покажем, что управление $u = u(x)$, которое было построено в подразделе 4.2 при решении задачи синтеза для системы (4.8), решает задачу локального синтеза и для нелинейной системы (4.45).

Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. Покажем, что управление $u(x)$ вида (4.12) решает задачу локального синтеза ограниченных управлений для системы (4.45).

Ведем следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
&R_i(x, \Theta(x)) = \Theta(x)^{m-i+1}(Fe_i, y(\Theta(x), x))f_{i-1}(t, x, u), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\
&R_n(x, \Theta(x)) = \Theta(x)(Fe_n, y(\Theta(x), x))f_{n-1}(t, x, u),
\end{aligned}
$$

где e_i — i–й столбец единичной матрицы.

Продифференцируем равенство (4.11) в силу системы (4.44), замкнутой управлением $u = u(x)$ вида (4.12), и получим, что

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.45)} &= \frac{-(Wy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}{(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))} \\
&+ \frac{2\Theta(x)(Fh_n, y(\Theta(x), x))x_{n-1}^{2k+1} + 2\sum\limits_{i=2}^{n} R_i(\Theta(x))}{(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}, \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

где $F^1 = 2mF - FH - HF$.

Используя неравенства (4.31) и (4.40), из равенства (4.46) получаем, что

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.45)} &\leq -\beta + \frac{2\sum\limits_{i=2}^{n} R_i(x, \Theta(x))}{(F^1 y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)} \\
&\leq -\beta + \frac{2\sum\limits_{i=2}^{n} |R_i(x, \Theta(x))|}{\lambda_{max}(F^1)\|y(\Theta(x), x)\|^2}
\end{aligned}
$$

Из последнего неравенства, на основании оценок (4.4) и (4.5), заключаем, что

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.45)} \;\leq\; -\beta + \frac{2\sum\limits_{i=2}^{n-1}\|Fe_i\|\Theta(x)^{m-i+1}|f_{i-1}(t,x,u)|}{\lambda_{max}(F^1)\|y(\Theta(x),x)\|} + \frac{2\Theta(x)\|Fe_n\|\,|f_{n-1}(t,x,u)|}{\lambda_{max}(F^1)\|y(\Theta(x),x)\|}. \tag{4.47}$$

Из неравенств (4.27) следует, что

$$|x_i| \leq \sqrt{\frac{a_0}{\lambda_{min}(F)}}\,\Theta^i, \quad i=1,\ldots,n-1, \quad |x_n| \leq \sqrt{\frac{a_0}{\lambda_{min}(F)}}\,\Theta^m. \tag{4.48}$$

Обозначим $L = \sqrt{\dfrac{a_0}{\lambda_{min}(F)}}$. Воспользуемся оценками (4.4)–(4.5) и из неравенств (4.48) получим, что

$$|f_i(t,x,u)| \leq \alpha_i\Theta(x)^{i+r}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} L^{\frac{i+r}{j}} + L^{\frac{i+r}{m}}\Big), \quad i=1,\ldots,n-2, \tag{4.49}$$

$$|f_{n-1}(t,x,u)| \leq \alpha_{n-1}\Theta(x)^{m-1+r}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} L^{\frac{m-1+r}{j}} + L^{\frac{m-1+r}{m}}\Big), \tag{4.50}$$

при $x \in \Big\{x\in\mathbb{R}^n : \Theta(x) \leq \min\Big\{\frac{R}{nL},\ \sqrt[m]{\frac{R}{nL}}\Big\}\Big\}$.

Поскольку матрица F положительно определена, то на основании (4.11) функция управляемости $\Theta(x)$ удовлетворяет неравенству

$$2a_0\Theta(x)^{2m} \leq \lambda_{max}(F)\|y(\Theta(x),x)\|^2.$$

Откуда получаем, что

$$\frac{\Theta(x)^m}{\|y(\Theta(x),x)\|} \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(F)}{2a_0}}. \tag{4.51}$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{2}{\lambda_{max(F^1)}}\sqrt{\frac{\lambda_{max}(F)}{2a_0}}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_{i-1}\|Fe_i\|\Big(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{i+r}{j}} + L^{\frac{i+r}{m}}\Big) + \alpha_{n-1}\|Fe_n\|\Big(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{m-1+r}{j}} + L^{\frac{m-1+r}{m}}\Big)\right).$$

Тогда из неравенств (4.49), (4.50) и (4.51) получаем, что

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.45)} \leq -\beta + \gamma\Theta(x)^r, \qquad (4.52)$$

при $x \in \left\{x \in \mathbb{R}^n : \Theta(x) \leq \min\left\{\frac{R}{nL}, \sqrt[m]{\frac{R}{nL}}\right\}\right\}$.

Выберем произвольное число ε такое, что $0 < \varepsilon < \beta$. Тогда из неравенства (4.52) получаем, что

$$\dot{\Theta}(x)\Big|_{(4.45)} \leq -\varepsilon$$

при $x \in Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \Theta(x) \leq \min\left\{\left(\frac{\beta-\epsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{r}}, \frac{R}{nL}, \sqrt[m]{\frac{R}{nL}}\right\}\right\}$.

В следующей теореме мы опишем решение задачи синтеза ограниченных управлений для системы (4.45).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. Тогда управление $u(x)$ вида (4.12) решат задачу синтеза для системы (4.45). При этом траектория системы (4.45), замкнутой управлением $u = u(x)$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$, где*

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \Theta(x) \leq \min\left\{\left(\frac{\beta-\epsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{r}}, \frac{R}{nL}, \sqrt[m]{\frac{R}{nL}}\right\}\right\},$$

оканчивается в нуле в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$, причем $T(x_0) \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\Theta(x_0)$.

В следующем примере мы решим задачу синтеза ограниченных управлений для нелинейной неуправляемой по первому приближению системы.

Пример 4.3. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1^3 + x_2^2 \\ \dot{x}_3 = x_2^3 + \ x_2^5 \sin(x_1 + x_2). \end{cases}$$

Пусть $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$. Тогда из (4.13) и (4.16) получаем, что

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Согласно Теореме 2.1, положительно определенное решение уравнения (2.3) при $f_{33} = 2$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{4}{3} \\ 2 & \frac{11}{4} & \frac{11}{6} \\ \frac{4}{3} & \frac{11}{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Положим $a_0 = 0.6567802403\ldots$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ как положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} 2a_0\Theta(x)^{14} \;&-\; \frac{5}{2}x_1^2\Theta^{12}(x) - \frac{11}{4}x_2^2\Theta^{10}(x) - 2x_3^2 - 4x_1x_2\Theta^{11}(x) \\ &-\; \frac{8}{3}x_1x_3\Theta^6(x) - \frac{11}{3}x_2x_3\Theta^5(x) = 0. \end{aligned}$$

Тогда, согласно Теореме 4.2, управление

$$u(x) = -\frac{x_1}{\theta(x)} - \frac{1}{2}\,\frac{x_2}{\theta^2(x)} - \frac{1}{3}\,\frac{x_3}{\theta^7(x)} - \frac{3}{2}\,\frac{x_2^3}{\theta^6(x)},$$

решает задачу синтеза для исходной нелинейной системы.

В качестве начальной точки выберем, например, $x_0 = (0.01,\ 0.02,\ -0.1)^*$. Тогда $\|x(49.588594)\| = 0.24\ldots \times 10^{-11}$.

4.4. Синтез ограниченных управлений для класса нелинейных систем с неуправляемым первым приближением

Теперь решим задачу допустимого позиционного синтез для системы (4.1) с правой частью вида (4.2)–(4.3) в случае, когда c_i – числа такие, что $\prod\limits_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$. В этом случае система (4.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_i = c_{i-1}x_{i-1} + f_{i-1}(t,x,u), \quad i = 2,\dots,n-1, \\ \dot{x}_n = c_{n-1}x_{n-1}^{2k+1} + f_{n-1}(t,x,u), \end{cases} \tag{4.53}$$

где $k = \frac{p}{q}$, $p > 0$ – целое число, $q > 0$ – нечетное число. Как и ранее будем считать, что функции $f_i(t,x,u)$, $i = 1,\dots,n-1$, удовлетворяют условиям (4.4)–(4.5).

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. Определим числа $\widehat{c}_i$, $i = 1,\dots,n$, соотношениями

$$\widehat{c}_1 = 1, \quad \widehat{c}_i = c_{i-1}\widehat{c}_{i-1}, \quad i = 2,\dots,n-1, \quad \widehat{c}_n = c_{n-1}(\widehat{c}_{n-1})^{2k+1}.$$

Константу $\widehat{\gamma}$ определим равенством

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma} \;&=\; \frac{2}{\lambda_{max(F^1)}}\sqrt{\frac{\lambda_{max}(F)}{2a_0}}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\widehat{\alpha}_{i-1}\|Fe_i\|\Big(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{i+r}{j}} + L^{\frac{i+r}{m}}\Big)\right. \\ &+\; \left.\widehat{\alpha}_{n-1}\|Fe_n\|\Big(\sum_{j=1}^{n-1}L^{\frac{m-1+r}{j}} + L^{\frac{m-1+r}{m}}\Big)\right), \end{aligned}$$

где

$$\widehat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{|\widehat{c}_{i+1}|}\max\left\{|\widehat{c}_1|^{i+r}, |\widehat{c}_2|^{\frac{i+r}{2}},\dots,|\widehat{c}_{n-1}|^{\frac{i+r}{n-1}}, |\widehat{c}_n|^{\frac{i+r}{m}}\right\}, \quad i = 1,\dots,n-1,$$

$$\widehat{\alpha}_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\widehat{c}_n}\max\left\{|\widehat{c}_1|^{m-1+r}, |\widehat{c}_2|^{\frac{m-1+r}{2}},\dots,|\widehat{c}_{n-1}|^{\frac{m-1+r}{n-1}}, |\widehat{c}_n|^{\frac{m-1+r}{m}}\right\}.$$

Пусть функция управляемости $\Theta(x)$ является положительным корнем уравнения

$$2a_0\Theta^{2m} = (FD(\Theta)\widehat{C}^{-1}x, D(\Theta)\widehat{C}^{-1}x),$$

где $\widehat{C} = \mathrm{diag}\big(\widehat{c}_1, \widehat{c}_2,\dots,\widehat{c}_n\big)$ – диагональная матрица размерности $n \times n$, число a_0 удовлетворяет неравенству (4.42). Тогда управление

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{\widehat{c}_i}\,\frac{x_i}{\Theta^i(x)} + \frac{a_n}{\widehat{c}_n}\,\frac{x_n}{\Theta^m(x)} + \frac{a_{n+1}}{\widehat{c}_{n-1}^{2k+1}}\,\frac{x_{n-1}^{2k+1}}{\Theta^{m-1}(x)} \tag{4.54}$$

решает задачу локального допустимого позиционного синтеза для системы (4.53). Более того, при $u = u(x)$ траектория системы (4.53), начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in \widehat{Q}$, где

$$\widehat{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \Theta(x) \le \min \left\{ \left(\frac{\beta - \epsilon}{\widehat{\gamma}} \right)^{\frac{1}{r}}, \frac{R}{nL}, \sqrt[m]{\frac{R}{nL}} \right\} \right\},$$

оканчивается в нуле в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$, причем $T(x_0) \le \dfrac{1}{\varepsilon}\Theta(x_0)$.

Доказательство. Система (4.53), замкнутая управлением $u = u(x)$ вида (4.54), заменой переменных $x = \widehat{C}z$ ($x_i = \widehat{c}_i z_i$, $i = 1, \ldots, n$) отображается на систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v(z), \\ \dot{z}_i = z_{i-1} + \dfrac{1}{\widehat{c}_i} f_{i-1}(t, \widehat{C}z, u(\widehat{C}z)), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{z}_n = z_{n-1}^{2k+1} + \dfrac{1}{\widehat{c}_n} f_{n-1}(t, \widehat{C}z, u(\widehat{C}z)), \end{cases} \tag{4.55}$$

где $v(z) = u(\widehat{C}z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Воспользуемся оценками (4.4), (4.5) и получим, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\widehat{c}_{i+1}} f_i(t, \widehat{C}z, u(\widehat{C}z)) \right| &\le \frac{\alpha_i}{|\widehat{c}_{i+1}|} \Big(\sum_{j=1}^{n-1} |\widehat{c}_j z_j|^{\frac{i+r}{j}} + |\widehat{c}_n z_n|^{\frac{i+r}{m}} \Big) \\ &\le \widehat{\alpha}_i \Big(\sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\frac{i+r}{j}} + |z_n|^{\frac{i+r}{m}} \Big), \quad i = 1 \ldots, n-2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\widehat{c}_n} f_{n-1}(t, \widehat{C}z, u(\widehat{C}z)) \right| &\le \frac{\alpha_{n-1}}{|\widehat{c}_n|} \Big(\sum_{j=1}^{n-1} |\widehat{c}_j z_j|^{\frac{m-1+r}{j}} + |\widehat{c}_n z_n|^{\frac{m-1+r}{m}} \Big) \\ &\le \widehat{\alpha}_n \Big(\sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^{\frac{m-1+r}{j}} + |z_n|^{\frac{m-1+r}{m}} \Big). \end{aligned}$$

Определим функцию управляемости $\Theta(z)$ как положительный корень уравнения

$$2a_0 \Theta^{2m} = (FD(\Theta)z, D(\Theta)z).$$

Тогда согласно Теореме 4.2 получим, что управление

$$v(z) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{z_i}{\Theta^i(z)} + a_n \frac{z_n}{\Theta^m(z)} + a_{n+1} \frac{z_{n-1}^{2k+1}}{\Theta^{m-1}(z)}$$

решает задачу локального допустимого синтеза для незамкнутой системы (4.55).

В этом случае производная функции управляемости будет удовлетворять неравенству

$$\dot{\Theta}(z)\Big|_{(4.55)} \leq -\beta + \widehat{\gamma}\Theta(z)^r.$$

Выберем произвольное число ε такое, что $0 < \varepsilon < \beta$. Откуда получаем, что

$$\dot{\Theta}(z)\Big|_{(4.55)} \leq -\varepsilon$$

при $z \in \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \Theta(z) \leq \min\left\{ \left(\frac{\beta - \epsilon}{\widehat{\gamma}}\right)^{\frac{1}{r}}, \frac{R}{nL}, \sqrt[m]{\frac{R}{nL}} \right\}\right\}$. Причем время движения $T(z_0)$ в начало координат удовлетворяет оценке $T(z_0) \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\Theta(z_0)$.

Делая в управлении $v(z)$ обратную замену переменных $z = \widehat{C}^{-1}x$ получаем, что управление $u(x)$ вида (4.54) решает задачу синтеза для исходной нелинейной системы системы (4.53) на множестве $\widehat{Q}$. Причем, для любой точки $x_0 \in \widehat{Q}$ имеем, что $x(t) \in \widehat{Q}$ при всех $t \geq 0$, где $x(t)$ решение замкнутой системы (4.53), удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$. Теорема доказана. $\square$

4.5. Выводы к разделу

В настоящем разделе решена задача синтеза для класса нелинейных не управляемых по первому приближению систем. Подход к решению этой задачи основан на рассмотрении системы нелинейного приближения. В подразделе 4.2 для системы нелинейного приближения построена функция управляемости $\Theta(x)$ и ограниченное управление $u = u(x)$, которое обеспечивает попадание в начало координат за конечное время (см. Теорему 4.1).

В подразделе 4.3 показано (см. Теорему 4.2), что управление $u = u(x)$ решает задачу синтеза и для исходной нелинейной системы. Дана оценка области достижимости начала координат. В подразделе 4.4 решена задача синтеза для класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем, которые отображаются на систему из подраздела 4.3.

РАЗДЕЛ 5

О СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ СИСТЕМ

В настоящем разделе рассмотрен класс сингулярных треугольных систем. Показано, что эти системы отображаются на каноническую систему с одной степенной нелинейностью с помощью замены переменных и управления. На основе такого отображения доказана стабилизируемость и нуль-управляемость этих систем. Предложены классы сингулярных треугольных систем, для которых обратное отображение построено в явном виде, причем исходное управление явно выражается через новое управление. Для таких систем решены задачи стабилизации и глобального синтеза.

5.1. Построение управлений для некоторых классов сингулярных треугольных систем

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c_0(x_1, \dots, x_n)u + g(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_i = c_{i-1}(x_i, \dots, x_n)x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}, \end{cases} \tag{5.1}$$

где функции $c_i : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно, $i = 0, \dots, n-1$, функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Отметим, что система (5.1) не отображается на линейную систему заменой предложенной в [17], поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}) = 0$$

при x_{n-1}=0. Такие системы называют сингулярными треугольными системами. Ниже мы покажем, что при условии $\prod\limits_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1}, \dots, x_n) \neq 0$ система (5.1) отображается на систему (4.8).

Рассмотрим следующую замену переменных

$$\begin{aligned} &z_n = x_n \equiv F_n(x_n), \\ &z_{n-1} = \left[\tfrac{\partial F_n(x_n)}{\partial x_n} c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} x_{n-1} = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} x_{n-1} \equiv \\ &\quad \equiv F_{n-1}(x_{n-1}, x_n), \\ &z_i = \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_j} c_{j-1}(x_j, \dots, x_n) x_{j-1} \\ &\quad + \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial x_n} c_{n-1}(x_n) x_{n-1}^{2k+1} \equiv F_i(x_i, \dots, x_n), \\ &i = n-2, \dots, 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Покажем, что

$$\frac{\partial F_i(x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} \prod_{j=i}^{n-2} c_j(x_{j+1}, \dots, x_n), \quad i = n-1, \dots, 1. \tag{5.3}$$

Действительно, $\dfrac{\partial F_{n-1}(x_{n-1}, x_n)}{\partial x_n} = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}}$. Воспользуемся методом математической индукции. Пусть

$$\frac{\partial F_i(x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} \prod_{j=i}^{n-2} c_j(x_{j+1}, \dots, x_n), \quad i = n-1, \dots, p, \tag{5.4}$$

где $1 < p < n-1$. Покажем, что последнее равенство справедливо и для $i = p-1$. В равенстве (5.2) для F_{p-1} от x_{p-1} зависит только одно слагаемое, которое имеет вид

$$\frac{\partial F_p(x_p, \dots, x_n)}{\partial x_p} c_{p-1}(x_p, \dots, x_n) x_{p-1}.$$

Тогда, используя (5.4), получаем, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{p-1}(x_{p-1}, \dots, x_n)}{\partial x_{p-1}} = \frac{\partial F_p(x_p, \dots, x_n)}{\partial x_p} c_{p-1}(x_p, \dots, x_n) = \\ &\left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} \prod_{j=p-1}^{n-2} c_j(x_{j+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Справедливость равенства (5.3) доказана.

Введем в рассмотрение новое управление

$$\begin{aligned}
&v = \frac{\partial F_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}\left(c_0(x_1,\ldots,x_n)u + g(x_1,\ldots,x_n)\right)\\
&+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\partial F_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}c_{j-1}(x_j,\ldots,x_n)x_{j-1} + \frac{\partial F_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}\\
&\equiv F_0(x_1,\ldots,x_n,u).
\end{aligned}$$

Как и выше, воспользовавшись (5.3) заключаем, что

$$\frac{\partial F_0(x_1,\ldots,x_n,u)}{\partial u} = [c_{n-1}(x_n)]^{\frac{1}{2k+1}}\prod_{j=0}^{n-2}c_j(x_{j+1},\ldots,x_n).$$

Нетрудно видеть, что

$$\big[F_{n-1}(x_{n-1}(t),x_n(t))\big]^{2k+1} = \frac{d}{dt}F_n(x_n(t)),$$

$$F_{n-i}(x_{n-i}(t),\ldots,x_n(t)) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}F_{n-1}(x_{n-1}(t),x_n(t)),\quad i=2,\ldots,n.$$

Откуда следует, что после замены переменных (5.2) система (5.3) принимает вид (4.8).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_i(x_{i+1},\ldots,x_n) = &\sum_{j=i+2}^{n-1}\frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1},\ldots,x_n)}{\partial x_j}c_{j-1}(x_j,\ldots,x_n)x_{j-1}\\
&+\frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1},\ldots,x_n)}{\partial x_n}c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1},\quad i=n-2,\ldots,1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_0(x_1,\ldots,x_n) = &\frac{\partial F_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}g(x_1,\ldots,x_n)\\
&+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\partial F_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}c_{j-1}(x_j,\ldots,x_n)x_{j-1}\\
&+\frac{\partial F_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}c_{n-1}(x_n)x_{n-1}^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Тогда, с учетом (5.3), замена переменных (5.2) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&z_n = x_n,\\
&z_{n-1} = \left[\frac{\partial F_n(x_n)}{\partial x_n} c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} x_{n-1} = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} x_{n-1},\\
&z_i = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} \Big(\prod_{j=i}^{n-2} c_j(x_{j+1},\dots,x_n)\Big) x_i + \widehat{F}_i(x_{i+1},\dots,x_n),\\
&i = n-2,\dots,1.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

При этом новое управление будет определятся равенством

$$
v = \left[c_{n-1}(x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} \prod_{j=0}^{n-2} c_j(x_{j+1},\dots,x_n) u + \widehat{F}_0(x_1,\dots,x_n). \tag{5.6}
$$

Покажем, что обратное отображение $x = F^{-1}(z)$ находится в явном виде. Для этого мы установим, что x_i выражаются через $z_i, \dots z_n$. Причем, x_i зависит от z_i линейно.

Действительно из (5.5) следует, что

$$
\begin{aligned}
x_n &= z_n \equiv H_n(z_n),\\
x_{n-1} &= \frac{z_{n-1}}{\left[c_{n-1}(z_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}}} \equiv H_{n-1}(z_{n-1}, z_n),
\end{aligned}
$$

Пусть найдены функции

$$
x_n = H_n(z_n), \quad x_{n-1} = H_{n-1}(z_{n-1}, z_n), \quad \dots, \quad x_p = H_p(z_p, \dots, z_n),
$$

где $2 < p < n-1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
x_{p-1} = \left[c_{n-1}(H_n(z_n))\right]^{-\frac{1}{2k+1}} &\left(\prod_{j=p-1}^{n-2} c_j(H_{j+1}(z_{j+1},\dots,z_n),\dots,H_n(z_n))\right)^{-1} \cdot\\
&\cdot \Big(z_{p-1} - \widehat{F}_{p-1}(H_p(z_p,\dots,z_n),\dots,H_n(z_n))\Big) \equiv H_{p-1}(z_{p-1},\dots,z_n).
\end{aligned}
$$

Таким образом, согласно методу математической индукции мы показали, что

$$
x_i = H_i(z_i, \dots, z_n), \quad i = n, \dots, 1. \tag{5.7}
$$

Аналогично, из (5.6) получаем, что

$$u = [c_{n-1}(H_n(z_n))]^{-\frac{1}{2k+1}} \left(\prod_{j=0}^{n-2} c_j(H_{j+1}(z_{j+1}, \ldots, z_n), \ldots, H_n(z_n))\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left(v + \widehat{F}_0(H_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, H_n(z_n))\right). \tag{5.8}$$

Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.1. Пусть функции $c_i : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно, $i = 0, \ldots, n-1$, и

$$\prod_{i=0}^{n-1} c_i(x_i, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Тогда система (5.1) заменой переменных (5.5) и заменой управления (5.6) отображается на каноническую систему с одной степенной нелинейностью

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v, \\ \dot{z}_i = z_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{z}_n = z_{n-1}^{2k+1}. \end{cases} \tag{5.9}$$

При этом, обратная замена переменных $x = F^{-1}(z)$ и управления задаются явными представлениями (5.7) и (5.8).

Теорема 5.2. Пусть функции $c_i : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно, $i = 0, \ldots, n-1$, и

$$\prod_{i=0}^{n-1} c_i(x_i, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Тогда система (5.1) является стабилизируемой.

Доказательство. Действительно, воспользуемся Теоремой 3.1 и выберем числа a_i, $i = 1, \ldots, n+1$ так, чтобы управление

$$v(z) = a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + a_{n+1} z_{n-1}^{2k+1}$$

стабилизировало систему (5.9). Тогда поскольку $H_i(x_i, \dots, x_n)$ непрерывны и $H_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, то

$$x_i(t) = H_i(z_i(t), \dots, z_n(t)) \to H(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

$i = 1, \dots, n$.

Покажем теперь, что нулевое решение системы (5.1), замкнутой управлением

$$u(x_1, \dots, x_n) = [c_{n-1}(x_n)]^{-\frac{1}{2k+1}} \left(\prod_{j=0}^{n-2} c_j(x_{j+1}, \dots, x_n) \right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left(v(F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_n)) + \widehat{F}_0(x_1, \dots, x_n) \right),$$

является устойчивым. Действительно, зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы

$$\max_G H_i(z_i, \dots, z_n) < \varepsilon, \tag{5.10}$$

где $G = \{z \in \mathbb{R}^n : |z_i| < \varepsilon_1\}$. Заметим, что такое ε_1 существует, поскольку функции $H_i(x_i, \dots, x_n)$ непрерывны по совокупности переменных и $H_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Из устойчивости системы (5.9) при $v = v(z)$ следует существование такого $\delta_1 > 0$, что $|z_i(t)| < \varepsilon_1$ при $t > 0$, если $|z_i(0)| < \delta_1$. Выберем теперь $\delta > 0$ так, чтобы при $|x_i(0)| = |x_i^0| < \delta$ выполнялось неравенство

$$\max_{1 \le i \le n} F_i(x_i^0, \dots, x_n^0) = \max_{1 \le i \le n} z_i(0) < \delta_1.$$

Такое $\delta > 0$ существует, поскольку функции $F_i(x_i, \dots, x_n)$ непрерывны и $F_i(0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда из (5.10) следует, что $|x_i(t)|| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$.

Таким образом, мы показали, что управление $u = u(x_1, \dots, x_n)$ стабилизирует систему (5.1). Теорема доказана. $\square$

Теорема 5.3. Пусть функции $c_i : \mathbb{R}^{n-i} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно, $i = 0, \ldots, n-1$, и

$$\prod_{i=0}^{n-1} c_i(x_i, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Тогда система (5.1) является глобально ноль-управляемой.

Доказательство. Определим функцию управляемости $\Theta(z)$ и синтезирующее управление

$$v(z) = \frac{1}{\Theta^m(z)}(a, D(\Theta(z))z) + a_{n+1}\frac{z_{n-1}^{2k+1}}{\Theta^{m-1}(z)},$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)^*$, для системы (5.9) согласно Теореме 4.1. Управление $v = v(z)$ переводит систему (5.9) из точки $z^0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})^*$ в ноль за время $T(z^0) < +\infty$. Тогда управление

$$v = v(F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_n)) \equiv \widetilde{v}(x) \tag{5.11}$$

переводит систему (5.1) из точки

$$F^0 = (F_1(x_1^0, \ldots, x_n^0), F_2(x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, F_n(x_n^0))^*$$

в ноль за конечное время $T(F^0)$. Поскольку вектор z^0 может быть выбран произвольным образом, то на основании равенств (5.7) заключаем, что вектор F^0 совпадает с любой наперед заданной точкой пространства $\mathbb{R}^n$ при соответствующем выборе точки z^0. Последнее означает, что управление $v = \widetilde{v}(x)$ вида (5.11) решает задачу глобального синтеза для системы (5.1). Теорема доказана. □

В следующем примере решены задачи синтеза и стабилизации для трехмерной сингулярной треугольной системы.

Пример 5.1. Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_3 = x_2^3(x_3^2 + 1)^3. \end{cases}$$

Эта система имеет вид (5.1) при $n = 3$, $k = 1$, $c_0(x_1, x_2, x_3) = 1$, $c_1(x_2, x_3) = x_2^2 + 1$, $c_2(x_3) = (x_3^2 + 1)^3$.

Очевидно, что $c_i(x_{i+1}, \ldots, x_3) \neq 0$, $i = 0, 1, 2$, для всех $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Тогда, согласно Теореме 5.2 и Теореме 5.3, рассматриваемая система является стабилизируемой и глобально ноль-управляемой.

Замена переменных (5.2) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = x_1(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1) + 2x_2^4 x_3 (x_3^2 + 1)^3 \equiv F_1(x_1, x_2, x_3), \\ z_2 = x_2(x_3^2 + 1) \equiv F_2(x_2, x_3), \\ z_3 = x_3 \equiv F_3(x_3). \end{cases}$$

Согласно (5.6) новое управление определяется равенством

$$\begin{aligned} v \;&=\; u(1 + x_2^2)(x_3^2 + 1) + 2x_1^2 x_2 (1 + x_2^2)(x_3^2 + 1) + 10 x_1 x_2^3 x_3 (x_3^2 + 1)^3 (1 + x_2^2) \\ &+\; 2x_2^7 (x_3^2 + 1)^6 + 12 x_2^7 x_3^2 (x_3^2 + 1)^5 \equiv u(1 + x_2^2)(x_3^2 + 1) + w(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Такая замена переменных и управления отображает рассматриваемую систему на систему

$$\dot z_1 = v, \quad \dot z_2 = z_1, \quad \dot z_3 = z_2^3.$$

Синтезирующее управление $v = v(z_1, z_2, z_3)$ для этой системы может быть выбрано аналогично примеру 4.3.

Обратная замена переменных имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{z_1(z_3^2 + 1) - 2z_2^4 z_3}{z_2^2 + (z_3^2 + 1)^2} \equiv H_1(z_1, z_2, z_3), \\ x_2 = \dfrac{z_2}{z_3^2 + 1} \equiv H_2(z_2, z_3), \\ x_3 = z_3 \equiv H_3(z_3). \end{cases}$$

Тогда, согласно Теореме 5.3, синтезирующее управление для исходной нелинейной системы имеет вид

$$u = \frac{v(F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_2, x_3), F_3(x_3)) - w(x_1, x_2, x_3)}{(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)}$$

Аналогичным способом может быть построено стабилизирующее управление. А именно, достаточно выбрать управление $v = v(z_1, z_2, z_3)$ следуя Теореме 3.1.

Рассмотрим еще один класс управляемых нелинейных систем, которые отображаются на каноническую систему с одной степенной нелинейностью (4.8):

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = c_0 u + f_0(x_1, \ldots, x_n), \\
\dot{x}_i = c_{i-1} x_{i-1} + f_{i-1}(x_i, \ldots, x_n), \quad i = 2, \ldots, n-1, \\
\dot{x}_n = (c_{n-1} x_{n-1} + f_{n-1}(x_n))^{2k+1},
\end{cases} \tag{5.12}
$$

где $\prod\limits_{i=1}^{n-1} c_i \neq 0$, ($c_i$ – заданные числа), $f_i \in C^i(\mathbb{R}^{n-i})$.

Покажем, что система (5.12) отображается на систему (4.8) заменой координат и управления. Далее такое отображение построено в явном виде.

Определим функции $g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n-1$, соотношениями:

$$
\begin{aligned}
g_{n-1} &= f_{n-1}(x_n), \\
g_{n-j} &= \Big(\prod_{i=n-j+1}^{n-1} c_i\Big) f_{n-j}(x_{n-j+1}, \ldots, x_n) \\
&\quad + \sum_{i=n-j+2}^{n-1} \frac{\partial g_{n-j+1}}{\partial x_i} \left(c_{i-1} x_{i-1} + f_{i-1}(x_i, \ldots, x_n)\right) \\
&\quad + \frac{\partial g_{n-j+1}}{\partial x_n} \left(c_{n-1} x_{n-1} + f_{n-1}(x_n)\right)^{2k+1}, \quad j = 2, \ldots, n-1.
\end{aligned}
$$

Сделаем в системе (5.12) следующую замену переменных:

$$
\begin{aligned}
& z_n = x_n \equiv F_n(x_n), \\
& z_{n-1} = c_{n-1} x_{n-1} + f_{n-1}(x_n) \equiv F_{n-1}(x_{n-1}, x_n), \\
& z_{n-j} = \Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} c_i\Big) x_{n-j} + g_{n-j}(x_{n-j+1}, \ldots, x_n) \equiv \\
& \equiv F_{n-j}(x_{n-j}, \ldots, x_n), \quad j = 2, \ldots, n-1.
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
v &= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} c_i\Big) \big(c_0 u + f_0(x_1, \ldots, x_n)\big) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \left(c_{i-1} x_{i-1} + f_{i-1}(x_i, \ldots, x_n)\right) \\
&\quad + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \left(c_{n-1} x_{n-1} + f_{n-1}(x_n)\right)^{2k+1}.
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

После замены переменных (5.13) система (5.12) принимает вид

$$\begin{cases} \dot z_1 = v, \\ \dot z_i = z_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot z_n = z_{n-1}^{2k+1}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Обратная замена переменных определяется в явном виде соотношениями:

$$x_n = z_n \equiv H_n(z_n), \quad x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1}}(z_{n-1} + f_{n-1}(z_n)) \equiv H_{n-1}(z_{n-1}, z_n),$$

$$x_{n-j} = \Big(\prod_{i=n-j}^{n-1} c_i\Big)^{-1} (z_{n-j} - g_{n-j}(H_{n-j+1}(z_{n-j+1}, \ldots, z_n), \ldots, H_n(z_n)) \equiv$$
$$\equiv H_{n-j}(z_{n-j}, \ldots, z_n), \quad j = 2, \ldots, n-1.$$

Выберем управление $v = v(z_1, \ldots, z_n)$ согласно Теореме 3.1 так, чтобы нулевая точка покоя замкнутой системы (5.15) была асимптотически устойчива. Тогда способом аналогичным способу доказательства Теоремы 5.2 нетрудно показать, что управление

$$u(x) = \Big(\prod_{i=0}^{n-1} c_i\Big)^{-1} \Big(v(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_n)) - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \times$$
$$\times (c_{i-1}x_{i-1} + f_{i-1}(x_i, \ldots, x_n)) - \frac{\partial g_1}{\partial x_n} (c_{n-1}x_{n-1} + f_{n-1}(x_n))^{2k+1}\Big) \tag{5.16}$$
$$-\frac{1}{c_0} f_0(x_1, \ldots, x_n)$$

стабилизирует систему (5.12). Если же управление $v = v(z_1, \ldots, z_n)$ решает задачу глобального синтеза для системы (5.15), то управление (5.16) решает задачу глобального синтеза для системы (5.12). Напомним, что такое управление v может быть выбрано согласно Теореме 4.1.

Таким образом мы доказали справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.4. Пусть функции $f_i(x_{i+1}, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно и $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда:

1) если управление $v = v(z_1, \ldots, z_n)$ стабилизирует систему (5.15), то управление $u = u(x)$ вида (5.16) стабилизирует систему (5.12);

2) если управление $v = v(z_1, \ldots, z_n)$ решает задачу синтеза для системы (5.15), то управление $u = u(x)$ вида (5.16) решает задачу синтеза для системы (5.12);

3) Обратная замена переменных задается в явном виде соотношениями

$$x_i = H_i(z_i, \ldots, z_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

В подразделе 5.2 рассмотрен более широкий класс треугольных систем. Для этих систем даны условия стабилизируемости и глобальной нуль-управляемости.

5.2. Об отображаемости сингулярных треугольных систем

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(u, x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_3 = f_3(x_2, \ldots, x_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_n = f_n(x_{n-1}, x_n), \end{cases} \tag{5.17}$$

где функции $f_i : \mathbb{R}^{n-i+2} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно, $i = 1, \ldots, n-1$, функция $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что $f_n^{\frac{1}{2k+1}}(x_{n-1}, x_n)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно.

Далее будем считать, что функции $f_i(x_{i-1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \right| \geq a > 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \left| \frac{\partial f_n^{\frac{1}{2k+1}}}{\partial x_{n-1}} \right| \geq a > 0 \tag{5.18}$$

при всех x_0, x_1, …, x_n ($x_0 = u$), где a – постоянная не зависящая от $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Покажем, что при выполнении условии (5.18) система (5.17) отображается на систему (4.8).

Рассмотрим следующую замену переменных

$$
\begin{aligned}
&z_n = x_n \equiv F_n(x_n),\\
&z_{n-1} = \left[\tfrac{\partial F_n(x_n)}{\partial x_n} f_n(x_{n-1}, x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} = \left[f_n(x_{n-1}, x_n)\right]^{\frac{1}{2k+1}} \equiv\\
&\qquad \equiv F_{n-1}(x_{n-1}, x_n),\\
&z_i = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial F_{i+1}(x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial x_j} f_j(x_{j-1}, \ldots, x_n) \equiv F_i(x_i, \ldots, x_n),\\
&i = n-2, \ldots, 1.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Введем в рассмотрение новое управление

$$
v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_1(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} f_j(x_{j-1}, \ldots, x_n) \equiv F_0(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{5.20}
$$

где $x_0 = u$. Очевидно, что

$$
\left[F_{n-1}(x_{n-1}(t), x_n(t))\right]^{2k+1} = \frac{d}{dt} F_n(x_n(t)),
$$

$$
F_{n-i}(x_{n-i}(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} F_{n-1}(x_{n-1}(t), x_n(t)), \quad i = 2, \ldots, n.
$$

Тогда после замены переменных (5.19) система (5.17) принимает вид (4.8), т.е.

$$
\begin{cases}
\dot z_1 = v,\\
\dot z_i = z_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n-1,\\
\dot z_n = z_{n-1}^{2k+1}.
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

Полученные результаты приводят к следующей теореме.

Теорема 5.5. Пусть функции $f_i : \mathbb{R}^{n-i+2} \to \mathbb{R}$ имеют непрерывные частные производные до i-го порядка включительно, $i = 1, \ldots, n-1$, функция $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что $f_n^{\frac{1}{2k+1}}(x_{n-1}, x_n)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно, причем $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, если выполнены условия (5.18), то система (5.17) является глобально ноль-управляемой.

Доказательство. Выберем управление $v = v(z_1, \ldots, z_n)$ для системы (5.21) таким образом, чтобы попасть из точки

$$
z^0 = (F_1(x_1^0, \ldots, x_n^0), F_2(x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, F_n(x_n^0))^*
$$

в ноль за конечное время $T(z^0)$. Это можно сделать согласно Теореме 4.1. Подставим в правую часть соотношений (5.19), (5.20) вместо z_i и v функции $z_i(t)$ и $v(z_1(t),\dots,z_n(t))$, $i=1,\dots,n$, соответственно. Тогда эти соотношения последовательно определяют $x_i(t)$, $i=1,\dots,n$. Действительно, из первого равенства в (5.14) заключаем, что $x_n(t)=z_n(t)$. Пусть функции $x_n(t),x_{n-1}(t),\dots,x_p(t)$, где $n-1\ge p\ge 1$, найдены через функции $z_n(t),z_{n-1}(t),\dots,z_p(t)$ $(x_j(t)=H_j(z_j(t),\dots,z_n(t)),\ j=n,\dots,p)$. Тогда функция $x_{p-1}(t)$ удовлетворяет $(n-p+2)$-му равенству в (5.19), функция $x_0=u$ удовлетворяет равенству (5.20):

$$F_{p-1}(x_{p-1},x_p(t),\dots,x_n(t))=z_{p-1}(t).$$

Установим, что это уравнение однозначно разрешимо относительно переменной x_{p-1} при любых фиксированных $x_p(t),\dots,x_n(t)$. Из (5.19) и (5.20) следует, что

$$\frac{\partial F_{p-1}}{\partial x_{p-1}}=\frac{\partial f_n^{\frac{1}{2k+1}}}{\partial x_{n-1}}\,\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-2}}\cdots\frac{\partial f_p}{\partial x_p},\quad p=n-1,\dots,1.$$

Из условий (5.18) заключаем, что

$$\frac{\partial F_{p-1}}{\partial x_{p-1}}\ge\widetilde{a}>0$$

для всех $(x_p,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-p+1}$. Поскольку функция $\frac{\partial F_{p-1}}{\partial x_{p-1}}$ является непрерывной, то из последнего неравенства следует, что при любых фиксированных $x_p(t),\dots,x_n(t)$ функция $F_{p-1}(x_{p-1},x_p,\dots,x_n)$, как функция переменной x_{p-1}, отображает пространство $\mathbb{R}$ на все пространство $\mathbb{R}$ взаимно однозначно. Откуда следует, что уравнение однозначно разрешимо.

Полученные таким образом функции $x_j(t)=H_j(z_j(t),\dots,z_n(t))$, $j=1,\dots,n$, будут удовлетворять системе (5.17), замкнутой управлением $u=H_0(v(z_1(t),\dots,z_n(t)),z_1(t),\dots,z_n(t))$. В силу однозначной разрешимости соотношений (5.19) заключаем, что $x_j(t)$ будут удовлетворять условиям $x_j(T(z^0))=0$, $j=1,\dots,n$. $\square$

В следующем примере доказана глобальная ноль-управляемость и стабилизируемость одной треугольной неаффинной двумерной системы.

Пример 5.2. Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u + \dfrac{u^3}{1+x_2^2}, \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\sin(x_1))^3. \end{cases} \tag{5.22}$$

В этом случае

$$f_1(u, x_1, x_2,) = u + \frac{u^3}{1+x_2^2}, \quad f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\sin(x_1))^3.$$

Условия (5.18) выполнены для $a = \frac{1}{2}$, поскольку

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 1 + \frac{3u^2}{1+x_2^2} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 + \frac{1}{2}\cos(x_1) \geq \frac{1}{2}$$

при всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$. Тогда, согласно Теореме 5.5, система (5.22) является глобально ноль-управляемой и стабилизируюемой. При этом, с помощью замены переменных (5.19), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\sin(x_1), \\ z_2 = x_2, \end{cases}$$

и замены управления (5.20), имеющей в данном случае вид

$$v = \left(1 + \frac{1}{2}\cos(x_1)\right)\left(u + \frac{u^3}{1+x_2^2}\right) + (x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\sin(x_1))^3,$$

система (5.22) отображается на систему

$$\dot{z}_1 = v, \quad \dot{z}_2 = z_1^3.$$

5.3. Выводы к разделу

В настоящем разделе рассмотрены сингулярные треугольные системы. Доказана стабилизируемость и глобальная ноль-управляемость этих систем. Показано, что такие системы отображаются на каноническую систему с одной степенной нелинейностью. Предложены широкие классы сингулярных треугольных систем, для которых обратное отображение находится в явном виде. При таком отображении управление исходной нелинейной системы явно выражается через новое управление. На основе этого отображения решены задачи стабилизации и синтеза для рассматриваемых классов сингулярных треугольных систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы нелинейные системы с неуправляемым неустойчивым первым приближением. Для таких систем решены задачи стабилизации и синтеза. В работе были предложены различные подходы к решению этих задач. Один из подходов к решению поставленных задач основан на стабилизации и синтезе по нелинейному приближению. Другой подход связан с отображаемостью таких систем на нелинейную систему особого вида, которая также исследована в работе. При построении стабилизирующих и синтезирующих управлений возникает сингулярное матричное уравнение Ляпунова. Это уравнение также исследовано в работе. Дан критерий его разрешимости и описан класс его положительно определенных решений.

Итак, в работе получены следующие результаты:

- Построен класс стабилизирующих управлений для канонической системы со многими степенными нелинейностями.
- Решена задача стабилизации для управляемых систем, нелинейным приближением которых является каноническая система со многими степенными нелинейностями.
- Построен класс ограниченных синтезируюющих управлений для канонической системы с одной степенной нелинейностью.
- Решена задача синтеза для управляемых систем, нелинейным приближением которых является каноническая система с одной степенной нелинейностью.
- Дан критерий разрешимости и описан класс положительно определенных решений сингулярного матричного уравнения Ляпунова.
- Рассмотрен вопрос об отображаемости сингулярных треугольных си-

стем на каноническую систему с одной степенной нелинейностью. Для широкого класса таких треугольных систем в явном виде построена замена переменных и замена управления. На основе этого отображения доказана их стабилизируемость и глобальная ноль-управляемость.

- Предложены классы сингулярных треугольных систем, для которых обратная замена переменных находится в явном виде. Причем, исходное управление явно выражается через новое управление. Это позволяет построить стабилизирующие и синтезирующие управления для таких классов сингулярных треугольных систем.

Результаты диссертации имеют как теоретическое, так и практическое значение. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач стабилизации и синтеза для более широкого класса нелинейных систем, в том числе для нелинейных систем, которые возникают в приложениях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бебия М.О. Задача синтеза для одной неуправляемой по первому приближению системы / М.О. Бебия // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія „Математика, прикладна математика і механіка". – 2011. – Вип. 64, № 990- – С. 48–53.
2. Бебия М.О. Задача синтеза для одной неуправляемой по первому приближению системы / М.О. Бебия // Международная школа-конференция «Тараповские чтения: „Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях"»: 17–22 апреля 2011 г.: сб. тез. - Харьков. – 2011. - С. 159.
3. Бебия М.О. Решение задачи стабилизации для одного класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем / М.О. Бебия // Международная школа-конференция «Тараповские чтения: „Современные проблемы математики, механики и информатики"»: 29 сентября–4 октября 2013 г.: сб. тез. - Харьков. – 2013. - С. 87.
4. Бебия М.О. О стабилизации одного класса нелинейных систем / М.О. Бебия // IX международня конференция для молодых ученых: „Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях"»: 25–26 апреля 2014 г.: сб. тез. - Харьков. – 2014. - С. 12.
5. Бебия М.О. Стабилизация систем со степенной нелинейностью / М.О. Бебия // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія „Математика, прикладна математика і механіка". – 2014. – Вип. 69, № 1120. – С. 75–84.
6. Бебия М.О. Гашение колебаний грузов соединенных нелинейной пружиной / М.О. Бебия // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 27–32.

7. Бебия М.О. Синтез ограниченных управлений для класса нелинейных неуправляемых по первому приближению систем / М.О. Бебия // Международная конференция «Тараповские чтения: „Современные проблемы естественных наук“»: 1–15 марта 2016 г.: сб. тез. - Харьков. – 2016. - С. 48.
8. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: ИЛ, 1960. – 400 с.
9. Бессонов Г.А. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем / Г.А. Бессонов, В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Прикладная математика и механика. – 1988. – Т. 52, Вып. 1. – С. 9–15.
10. Бессонов Г.А. Решение задачи позиционного управления для некоторых классов нелинейных систем / Г.А. Бессонов, Е.В. Коробова // Вестник Харьк. унив. Серия „Прикладная математика и механика“. – 1991. – № 361. – С. 27–33.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер – М.: Наука, 1988. – 552 с.
12. Зубов В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов . – М.: Наука, 1975. – 495 с.
13. Зубов С.В. Математические методы стабилизации динамических систем / С.В. Зубов, Н.В. Зубов. – С.-Пб.: Изд-во СПбГУ, 1996. – 288 с.
14. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений / Х.Д. Икрамов – М.: Наука, 1984. – 192 с.
15. Калман Р. Очерки по математической теории систем: Пер. с англ. / Р. Калман, П. Фалб и М. Арбиб. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
16. Ковалёв А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем /А.М. Ковалёв. – К.: Наукова думка, 1980. – 175 с.

17. Коробов В.И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем / В.И. Коробов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, № 4. – С. 614–619.

18. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В.И. Коробов // Матем. сборник. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582–606.

19. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051 – 1055.

20. Коробов В.И. Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений // Вестник Харьковского университета. Серия "Прикладная математика и механика". – 1980. – № 205. – С. 59 – 73.

21. Коробов В.І., Розв'язок задачі синтезу за допомогою функціоналу керованості для систем у нескінченновимірних просторах / В.І. Коробов, Г.М. Скляр // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1983. – № 5. – С. 11–14.

22. Коробов В.И. Синтез управления в уравнениях, содержащих неограниченный оператор / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 45. – С. 45–63.

23. Коробов В.И. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Матем. сборник. – 1987. – Т. 134(176), № 2(10). – С. 186–206.

24. Коробов В.И. Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 308, № 3. – С. 525–528.

25. Коробов В.И. О множестве позиционных ограниченных управлений, решающих задачу синтеза / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 6. – С. 1304–1308.

26. Коробов В.И. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 1914–1924.
27. Коробов В.И. Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 1. – С. 60–71.
28. Коробова Е.В. Один конструктивный метод отображения нелинейных систем на линейные / Е.В. Коробова, Г.М. Скляр // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1991. – № 55. – С. 68–74.
29. Коробов В.И. Управляемость треугольных систем с равномерно ограниченными возмущениями / В.И. Коробов, С.С. Павличков // Вісник Харківського університету. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 1999. – № 444. – С. 10 – 14.
30. Коробов В.И. Методы построения оптимальных управлений для канонических управляемых систем / В.И. Коробов, Г.М. Скляр, В.В. Флоринский // Матем. физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6, № 3/4. – С. 264–287.
31. Коробов В.И. Многочлен минимальной степени для определения всех моментов переключения в задаче быстродействия / В.И. Коробов, Г.М. Скляр, В.В. Флоринский // Матем. физика, анализ, геометрия. – 2000. – Т. 7, № 3. – С. 308–320.
32. Коробов В.И. Методи побудови множини позиційних керувань, що розв’язують задачу синтезу в гільбертових просторах / В.И. Коробов, Г.М. Скляр, В.А. Скорик // Доповіді НАН України. Сер. Математика, природознавство, технічні науки. – 2000. – № 10. – С. 7–11.
33. Коробов В.И. Непрерывная зависимость решения задачи управляемости от начального и конечного состояний для треугольных, нелинеаризуемых систем / В.И. Коробов, С.С. Павличков // Матем. физика, анализ, геометрия. – 2001. – Т. 8, № 2. – С. 189–204.

34. Коробов В.И. Отображение нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему / В.И. Коробов, Т.И. Иванова // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. – Т. 8, № 1. – С. 42–57.

35. Коробов В.І. Негладкі відображення траєкторій лінійних керованих систем / В.І. Коробов, Т.І. Іванова // Доповіді НАН України. – 2001. – № 8. – С. 9–14.

36. Коробов В.И. Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением / В.И. Коробов, В.А. Скорик // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 319–331.

37. Коробов В.И. Метод функции управляемости / В.И. Коробов. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.

38. Коробов В.И. Синтез инерционных управлений для аффинных систем с одномерным управлением / В.И. Коробов, В.А. Скорик // Динамические системы. – 2008. – Вып 25. – С. 51–64.

39. Коробов В.И. Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению / В.И. Коробов, М.О. Бебия // Доповіді НАН України. – 2014. – № 2. – С. 20–25.

40. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / И.Г. Малкин. – Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

41. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 465 с.

42. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977. – 392 с.

43. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1973. – 280 с.

44. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 273 с.

45. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.

46. Скляр Г.М. О распространимости одного метода построения позиционного синтезирующего управления на уравнения с неограниченным оператором / Г.М. Скляр // Вестник Харьк. унив. Серия “Прикладная математика и механика“. – 1992.– № 361. – С. 15–25.

47. Скляр Г.М. О множестве позиционных управлений, решающих задачу синтеза в гильбертовых пространствах / Г.М. Скляр, В.А. Скорик // Вісник Харківського університету. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 1999. – № 458. – С. 3–14.

48. Скляр Е.В. Нахождение в явном виде управления и траекторий, решающих задачу управляемости для некоторых нелинейных систем / Е.В. Скляр // Вісник Харківського університету. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 1999. – № 458. – С. 3–14.

49. Скляр Е.В. О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные /Е.В. Скляр // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2001. – Т. 8, № 2. – С. 205–214.

50. Скляр К.В. Необхідні та достатні умови відображення трикутних керованих систем на лінійні / К.В. Скляр // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 33–36.

51. Скляр Е.В. Отображение треугольных управляемых ситем на линейные без замены управления / Скляр Е.В. // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 34 – 43.

52. Скорик В.А. О множестве позиционных управлений, решающих задачу глобального синтеза для линейного уравнения в гильбертовых пространствах / В.А. Скорик // Вісник Харківського національного

університету ім. В.Н. Каразіна. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 2013. – № 1081. – С. 76–83.

53. Сморцова Т.И. Отображение линейных систем второго порядка с двумерным управлением / Т.И. Сморцова // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 2012. – № 1018. – С. 4–20.

54. Чоке Риверо А.Э. Функция управляемости как время движения. I / А.Э Чоке Риверо, В.И. Коробов, В.А. Скорик // Мат. физика анализ, геометрия. – 2004. – Т. 11, № 2. – С. 208–225.

55. Чоке Риверо А.Э. Функция управляемости как время движения. II / А.Э Чоке Риверо, В.И. Коробов, В.А. Скорик // Мат. физика анализ, геометрия. – 2004. – Т. 11, № 3. – С. 341–354.

56. Чуйко С.М. О решении матричных уравнения Ляпунова / С.М. Чуйко // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 2014. – № 1120. – С. 85–94.

57. Чуйко С.М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра / С.М. Чуйко // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16, Вып. 1. – С. 52–66.

58. Чуйко С.М. О решении линейных матричных уравнений / С.М. Чуйко // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія „Математика, прикладна математика і механіка“. – 2015. – Т. 82. – С. 27–33.

59. Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина нётеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения / С.М. Чуйко // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 8. – С. 74–83.

60. Astolfi A. Analysis and design of nonlinear control systems / A. Astolfi and L. Marconi. – New York: Springer-Verlag, 2008. – 483 p.

61. Bacciotti A. Liapunov functions and stability in control theory/ A. Bacciotti and L. Rosier. – New York: Springer-Verlag, 2005. – 235 p.

62. Bebiya M.O. Synthesis problem for systems with power nonlinearity / M.O. Bebiya // II International conference „Analysis and Mathematical Physics“, 16-20 June 2014: book of abstracts. - Kharkiv. – 2014. – P. 30–31.

63. Bebiya M.O. Stabilization of systems with power principal part / M.O. Bebiya // III International conference „Analysis and Mathematical Physics“, 15-19 June 2015: book of abstracts. - Kharkiv. – 2015. – P. 17–18.

64. Bebiya M.O. Stabilization of Systems with Multiple Power Nonlinearities / M.O. Bebiya // International conference „Dynamical Systems and Their Applications“, 22-26 June 2015: book of abstracts. - Kyiv. – 2015. – P. 21.

65. Bebiya M.O. Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity / M.O. Bebiya // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. „Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics“. – 2015. – Vol. 81. – P. 36–51.

66. Bebiya M.O. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part / M.O. Bebiya and V.I. Korobov // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2016. – Vol. 12, No. 2. – P. 113–133.

67. Bebiya M.O. Synthesis problem for a class of nonlinear systems / M.O. Bebiya // IV International conference „Analysis and Mathematical Physics“, 13-17 June 2016: book of abstracts. - Kharkiv. – 2016. – P. 15–16.

68. Boyd S. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.

69. Brockett R.W. Finite dimensional linear systems / R.W. Brockett. – New York: Wiley, 1970. – 243 p.
70. Brockett R.W. Feedback invariance for nonlinear systems / R.W. Brockett // Proc. 7 World Congress IFAC, Helsinki. – 1978. – No. 2. – P. 1115–1120.
71. Byrnes C.I., Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum-phase nonlinear systems / C.I. Byrnes, A. Isidori // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, No. 10. – P. 1122–1137.
72. Byrnes C.I. New results and examples in non-linear feedback stabilization / C.I. Byrnes, A. Isidori // Syst. Control Lett. – 1989. – Vol. 12. – P. 437–442.
73. Celikovsky S. Global linearization of nonlinear systems – A survey / S. Celikovsky // Geom. in Nonlin. Control and Diff. Incl., Banach Center Publications. – 1995. – Vol. 32. – P. 123–137.
74. Celikovsky S. Numerical algorithm for nonsmooth stabilization of triangular form systems / S. Celikovsky // Kybernetika. – 1996. – Vol. 32, No. 3. – P. 261–274.
75. Celikovsky S. Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case / S. Celikovsky, H. Nijmeijer // Systems and Control Lett.– 1996. – Vol. 27, No. 3. – P. 135–144.
76. Celikovsky S. On the relation between local controllability and stabilizability for a class of nonlinear systems / S. Celikovsky, H. Nijmeijer // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42, No. 1. – P. 90–94.
77. Celikovsky S. Constructive nonsmooth stabilization of triangular systems / S. Celikovsky, E. Aranda-Bricaire // Systems and Control Lett. – 1999. – No. 36. – P. 21–37.

78. Chuiko S.M. The Green's operator of a generalized matrix differential-algebraic boundary value problem / S.M. Chuiko // Sib. Math. J. – 2015. – Vol. 56, No. 4. – P. 752–760.

79. Conte G. Nonlinear control systems: an algebraic setting / G. Conte, C.H. Moog and A.M. Perdon. – London: Springer-Verlag, 1999. – 167 p.

80. Coron J.-M. Adding an integrator for the stabilization problem / J.-M. Coron and L. Praly // Syst. Control Lett. – 1991. – Vol. 17, No. 2. – P. 89–104.

81. Coron J.-M. Control and nonlinearity / J.-M. Coron. – AMS, 2007. – 426 p.

82. Dayawansa W.P. Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems / W.P. Dayawansa, C.F. Martin, and G. Knowles // SIAM J. Control Optim. – 1990. – Vol. 28, No. 6. – P. 1321-–1349.

83. Freeman R.A. Robust nonlinear control dsign / R.A. Freeman and P.V. Kokotović. – Boston: Birkhäuser, 1996. – 257 p.

84. Hermes H. Asymptotic stabilization of planar nonlinear systems / H. Hermes // Syst. Control lett. – 1991. – Vol. 12. – P. 437–445.

85. Huang X. Global Finite-Time Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems / X. Huang, W. Lin and B. Yang // Automatica. – 2005. – Vol. 41. – P. 881-888.

86. Isidory A. Nonlinear control systems: an introduction / A. Isidory. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 479 p.

87. Isidory A. Nonlinear control systems II / A. Isidory. – London: Springer-Verlag, 1999. – 293 p.

88. Kawski M. Stabilization of nonlinear systems in the plane / M. Kawski // Systems Control Lett. – 1989. – Vol. 12, No. 2. – P. 169–175.

89. Kawski M. Homogeneous stabilizing feedback laws / M. Kawski // Contr. Theory & Advanced Tech. – 1990. – Vol. 6, No. 4. – P. 497–516.

90. Khalil H.K. Nonlinear systems / N.K. Khalil. – New Jersey: Prentice Hall, 2002.–750 p.

91. Korobov V.I. An optimal control problem with a mixed cost function / V.I. Korobov, V.I. Krutin, and G.M. Sklyar // SIAM J. Control and Optim. – 1993. – Vol. 31, No. 3. – P. 624–645.

92. Korobov V.I. Nonsmooth Mapping of Linear Control Systems / V.I. Korobov and T.I. Ivanova // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2001. – Vol. 108, No. 2. – P. 389–405.

93. Korobov V.I. The controllability problem for certain nonlinear integro-differential Volterra systems / V.I. Korobov, S.S. Pavlichkov and W. Schmidt // Optimization. – 2001. – Vol. 50, No. 3-4. – P. 155–186.

94. Korobov V.I. Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control / V.I. Korobov and V.O Skoryk // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 275, No. 1. – P. 84–107.

95. Korobov V.I. Global positional synthesis and stabilization in finite time of mimo generalized triangular systems by means of controllability function method / V.I. Korobov, S.S. Pavlychkov, W.H. Schmidt // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. - Vol. 189, No. 5. – P. 795-894.

96. Korobov V.I. Robust stabilization of one class of nonlinear systems / V.I. Korobov, A.V. Lutsenko // Autom. Remote Control. – 2014. – Vol. 75, No. 8, P. 1433–1444.

97. Korobov V.I. Construction of Restricted Controls for a Non-equilibrium Point in Global Sense / V.I. Korobov, V.O. Skoryk // Vietnam J. Math. – 2015. – Vol. 43, No. 2. – P. 459–469.

98. Korobov V.I. Construction of a Set of Restricted Inertial Controls for $C^{(1)}$-Smooth Affine Systems with Multidimensional Control / V.I. Korobov, V.O. Skoryk // J. Dyn. Control Syst. – 2015. – Vol. 21, No. 4. – P. 513–538.

99. Krener A.J. On the equivalence of control systems and the linearization of non-linear systems / A.J. Krener // SIAM J. Control. – 1973. – Vol. 11, No. 4. – P. 670–676.

100. Krstić M. Nonlinear and Adaptive Control Design / M. Krstić, I. Kanellakopoulos and P.V. Kokotović. – New York: John Wiley & Sons, 1995, 563 p.

101. Liao X. Stability of dynamical systems / X. Liao, L. Wang and P. Yu. – Amsterdam: Elsiver, 2007. – 706 p.

102. Lin W. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high order lower-triangular systems / W. Lin, C. Quan // Systems Control Letters. – 2000. – Vol. 39, No. 5. – P. 339–351.

103. Lin W. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: an adding a power integrator technique / W. Lin, C. Quan // Systems Control Letters. – 2000. – Vol. 39, No. 5. – P. 353–364.

104. Liu Y.-H. Adaptive tracking control for a class of uncertain pure-feedback systems / Y.-H. Liu // Int. J. Robust Nonlinear Control. – 2016. – Vol. 26, No. 5. – P. 1143–1154.

105. Marino R. Dynamic output feedback linearization and global stabilization / R. Marino, P. Tomei // Systems and Control Letters. – 1991. – Vol. 17. – P. 115–121.

106. Nijmeijer H. Nonlinear dynamical control systems / H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. – New York: Springer-Verlag, 1990. – 468 p.

107. Respondek W. Geometric methods in linearization of control systems / W. Respondek // Math. Control Theory, Banach Center Publications. – 1985. – Vol. 14. – P. 453–467.

108. Saberi A. Global Stabilization of Partially Linear Composite Systems / A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann // SIAM J. Control Optim. – 1990. – Vol. 28, No 6. – P. 1491–1503.

109. Sklyar G.M. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1 / G.M. Sklyar, K.V. Sklyar and S.Yu. Ignatovich // Systems Control Lett. – 2005. – Vol 54, No. 11. – P. 1097–1108.

110. Sklyar K.V. Conditions of linearizability for multi-control systems of the class C^1 / K.V. Sklyar, S.Yu. Ignatovich and V.O. Skoryk // Commun. Math. Anal. – 2014. – Vol. 17. – P. 359–365.

111. Sklyar K.V. Linearizability of systems of the class C^1 with multi-dimensional control / K.V. Sklyar, S.Yu. Ignatovich // Systems Control Lett. – 2016. – Vol. 94, No. 2. P. 92–96.

112. Slotine J.-J.E. Applied nonlinear control / J.-J.E. Slotine and W. Li. – New Jersey: Prentice-Hall, 1991. – 459 p.

113. Su R. On the linear equivalents of nonlinear systems / R. Su // Systems and Control Lett. – 1982. – Vol. 2. – P. 48–52.

114. Sun Z. State-feedback adaptive stabilizing control design for a class of high-order nonlinear systems with unknown control coefficients / Z. Sun, Y. Liu // Jrl. Syst. Sci. & Complexity. – 2007. – Vol. 20, No. 3. – P. 350–361.

115. Terrell W.J. Stability and stabilization: an introduction / W. J. Terrel. – New Jersey: Princeton University Press, 2009. – 457 p.

116. Tsinias J. Sufficient lyapunov-like conditions for stabilization / J. Tsinias // J. Math. Control Signal Systems. – 1989. – Vol. 2, No. 4, – P. 343–357.

117. Yang B. Finite-Time Stabilization of Nonsmoothly Stabilizable Systems / B. Yang and W. Lin // Proc. of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic. – 2005. – P. 382–387.

118. Zabczyk J. Mathematical control theory: an introduction / J. Zabczyk. – Boston: Birkhäuser, 1995. – 260 p.

119. Zhao G. A continuous state feedback controller design for high-order nonlinear systems with polynomial growth nonlinearities / G. Zhao and N. Duan // IJAC. – 2013.– No. 10, No. 4, P. 267–274.

120. Zinober A. Nonlinear and adaptive control: NCN4 2001 / A. Zinober and D. Owens. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. – 398 p.