Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина

На правах рукописи

Гукалова Алексея Александровича

УДК 533.72

Точные и приближенные решения уравнения Бриана-Пиддака

01.01.03 – математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Гордевский Вячеслав Дмитриевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Харьков – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Описание поведения разреженного газа осуществляется при помощи функции распределения, зависящей от скорости молекулы, ее положения в пространстве и от времени. Все макроскопические характеристики газа, т.е. его гидродинамические параметры (плотность, температура, массовая скорость и т.д.) легко выражаются через функцию распределения. Эта функция должна удовлетворять хорошо известному кинетическому уравнению Больцмана [1], полученному еще в 1872 году (перевод этой работы можно найти, например, в [2, 3]). Исследованию этого уравнения, а также вопросам его строгого обоснования и вывода из основных принципов статистической механики посвящено большое количество монографий, сборников статей, обзоров и т.д. [4–27]. С математической точки зрения уравнение Больцмана представляет собой достаточно сложное нелинейное интегро-дифференциально-функциональное уравнение, конкретный вид которого зависит от выбранной модели столкновений (взаимодействия) между молекулами газа. Среди многочисленных таких моделей наиболее естественной и часто рассматриваемой является модель твердых (жестких, абсолютно упругих) шаров (сфер), в ней предполагается, что молекулы являются одинаковыми шарами (для простоты договоримся сразу же считать массу каждой молекулы равной единице), которые мгновенно взаимодействуют между собой лишь в момент соударения, в результате которого их линейные скорости изменяются по законам классической механики с сохранением суммарных импульса и энергии [4–27]. Другая, не менее интерессная модель исследовалась гораздо реже, хотя она была предложена Брианом [28] еще а 1894 году (поскольку Пиддак [29] затем активно изучал эту модель, её иногда называют моделью Бриана-Пиддака). В ней молекулы предполагаются так называемыми шероховатыми сферами [7, 28, 32], которые в отличие от вышеописанных твердых сфер обладают не только поступательной, но и вращательной энергией. В результате соударения изменяются как линейные, так и угловые скорости молекул. Как отмечено в [7,32], эта модель удачно сочетает в себе сравнительную простоту и достаточное физические правдоподобие.

Важное место в кинетической теории газов занимает также модель максвелловских молекул (и некоторые ее обобщения), потенциал отталкивания между которыми обратно пропорционален пятой степени расстояния между их центрами. Эта особенность приводит к некоторому упрощению уравнения Больцмана и позволяет получить для него ряд результатов [33–35], не переносящихся на другие модели.

Среди различных известных направлений и методов исследования уравнения Больцмана укажем на следующие: вопросы существования и единственности решения [36, 37]; методы Гильберта, Чепмена-Энскога, Грэда [38–40]; линеаризация уравнения Больцмана [41, 42]; модель Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК-модель) [43,44]; одномерные и дискретные модели уравнения Больцмана [45–47]; иные модели взаимодействия между молекулами газа, уравнение Энскога и его модификации [32,48,49]; численные методы [15,19,50,51] и т.п.

Одним из важнейших направлений в исследовании уравнения Больцмана является поиск его точных и приближенных (в том или ином смысле) решений [6,52–55]. Для моделей твердых и шероховатых сфер единственным известным к настоящему моменту точным решением является максвелловское решение, обращающее обе части этого уравнения в нуль.

В более общем смысле, максвелловским распределением (состоянием, потоком) или, для краткости, максвеллианом, называется такое распределение, которое обращает в нуль правую часть уравнения Больцмана, т.е. интеграл столкновений [6–9,18,55]. Если максвеллиан не зависит от времени, то его называют стационарным; если он не зависит от пространственных координат – однородным. Стационарные, однородные максвеллианы принято называть глобальными, все остальные – локальными.

Актуальность темы. Несмотря на интерессные физические свойства шероховатых сфер, прежде они изучались достаточно мало, подробнее о них будет сказано в первом разделе диссертации. Актуальной на сегодняшний день остается нахождение общего ввида максвелловских решений для модели Бриана-Пиддака, а также взаимодействия некоторых потоков, являющихся приближенными решениями уравнения Больцмана.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина в рамках государственных научно-исследовательских работ по темам «Аналитические методы в качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления» (номер государственной регистрации 0109U001456) и «Аналитические методы решения качественных проблем теории управления и теории функционально-дифференциальных уравнений» (номер государственной регистрации 0111U010364).

Цель и задачи исследования. *Целью* диссертационной работы является нахождение общего ввида максвелловского решения для уравнения Бриана-Пиддака, а также некоторых явных приближенных его решений.

Основной задачей, которую приходится решать для достижения указанной цели, является поиск таких условий на коэффициентные функции бимодальных распределений и на поведение всех имеющихся параметров, которые были бы достаточными для того, чтобы соответствующая невязка могла быть сделана сколь угодно малой (при этом само бимодальное распределение, разумеется, не должно сводиться к известному точному решению, т.е. ни к одному из максвеллианов).

Таким образом, *объектом исследований* служит нелинейное кинетическое уравнение Больцмана.

Предметом исследований являются его точные и явные приближенные решения, имеющие вид бимодальных распределений с максвелловскими модами различных типов.

Методы исследования. При работе над диссертацией решалась специальная система дифференциальных уравнений в частных производных для гидродинамических параметров максвеллиана. При изучении поведения невязок между частями уравнения использовались методы математического анализа и теории обобщенных функций. Векторный анализ позволил исследовать физическую и геометрическую структуру как неоднородных [77], так и нестационарных максвеллианов [77], а также физический смысл найденных явных приближенных решений.

Научная новизна полученных результатов. В работе впервые:

1. получен общий вид локальных максвеллианов для модели Бриана-Пиддака и исследован его физический смысл;
2. построено приближенное решение в виде бимодального распределения с потоками типа «смерча». В качестве невязки между частями уравнения использовалось равномерно-интегральное отклонение;
3. исследовано взаимодействие двух «ускоряющихся-уплотняющихся» потоков в газе из шероховатых сфер. Использовано бимодальное распределение с максвелловскими модами специального вида. Получены различные условия, достаточные для минимизации равномерно-интегральной невязки между частями уравнения Бриана-Пиддака;
4. построены новые приближенные явные решения вида линейных комбинаций двух локальных максвеллианов типа «ускорение–уплотнение», которые минимизируют равномерно-интегральную невязку с весом между частями решаемого уравнения;
5. найдены коэффициентные функции для бимодального распределения с модами типа «смерча» при минимизации интегральной невязки;

6. получен явный вид бимодального распределения с винтовыми модами и найдены условия минимизации равномерно-интегральной невязки.

Практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении уравнения Бриана-Пиддака.

Личный вклад соискателя. В совместных с В.Д. Гордевским статьях соавтору принадлежат постановки задач, подходы к их решению и обсуждения результатов. Остальные результаты получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

1. XIV Международной научной конференции имени академика М.Кравчука, Киев, 19-21 апреля 2012г.;
2. XVI Международной конференции «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем», Киев, 29-31 мая 2013г.;
3. Международной конференции «Анализ и математическая физика», Харьков, 24-28 июня 2013г.;
4. Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск,18-24 августа 2013г.;
5. На научном семинаре при ФТИНТ НАН Украины (руководитель Е. Я. Хруслов), Харьков, ноябрь 2013г.

Публикации. Результаты диссертации нашли отражение в 10 научных публикациях, в том числе в 6 статьях [77–82] в специализированных изданиях и тезисах выступлений на 4 конференциях [83–86].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, выводов и списка использованных источников, который содержит 97 наименований и занимает 10 страниц. Общий объем диссертации составляет 120 страниц. Основные результаты, вынесенные на защиту, изложены в разделах 3 и 4.

Выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Гордевскому Вячеславу Дмитриевичу за ценные советы, внимание и поддержку.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

В этом разделе будет сделан краткий обзор литературы по теме диссертации и обоснован выбор направления исследования в данной работе.

1.1. Классические работы в кинетической теории газов

Основное уравнение кинетической теории разреженных газов было получено Людвигом Больцманом в 1872 году [1–3] и по праву носит его имя. Оно подробно описано в большом количестве монографий, учебников, обзорных статей, сборников научных работ и т.п. [4–27]. Некоторые из них, в основном, ориентированы на получение макроскопической информации о поведении газа на основе уравнения Больцмана и решении конкретных прикладных задач, таких как обтекание газом твердого тела, истечение газа в вакуум, движение между двумя параллельными пластинами и т.п., в частности, с использованием численных методов [7–9, 15]; в других основное внимание уделено теоремам существования и единственности решений задачи Коши для уравнения Больцмана и получению явного вида точных его решений для тех или иных моделей взаимодействия между молекулами [6, 18, 19]; третьи посвящены вопросам строгого обоснования этого уравнения и выяснению его связей с другими способами описания, возможными в кинетической теории (в частности, с цепочкой уравнений Н.Н. Боголюбова, известной в литературе как ББГКИ-цепочка) [4, 10, 14, 16, 17, 20–23, 25–27]. В некоторых из указанных монографий (см.,например [14, 16, 27]) предложены различные обобщения и модификации уравнения Больцмана, учитывающие те или иные особенности описываемых процессов.

Среди многочисленных моделей взаимодействия между частицами газа (молекулами), предлагавшимися до настоящего времени, наибольшее внимание исследователей традиционно привлекают модель твердых сфер (иногда ее называют также моделью упругих или жестких сфер либо шаров) и модель максвелловских молекул (известны и некоторые ее обобщения).

В первой из них (она рассмотрена уже в [1], но, по-видимому, была известна даже ранее) молекулы предполагаются одинаковыми, идеально круглыми и гладкими шарами, не взаимодействующими на расстоянии, а лишь в момент соударения, причем в этот момент происходит мгновенный обмен скоростями в соответствии с законами классической механики (т.е. с сохранением суммарного импульса и энергии частиц) [6–13, 17, 18, 22–27]. Во второй (ее обнаружил еще Дж.К. Максвелл) молекулы связаны силами отталкивания, обратно пропорциональными пятой степени расстояния между их центрами [8, 9, 11–15, 18, 19].

1.2. Модель шероховатых сфер

Модель, изучению которой посвящена диссертационная работа, изучалась авторами значительно реже. Это так называемая модель шероховатых сфер, предложенная Дж. Брианом еще в 1894 году в работе [28]. Она является простейшей из возможных моделей, учитывающих вращательную энергию молекул [7]. В ней предполагается, что каждая молекула имеет как поступательную скорость, так и угловую скорость вращения вокруг своей оси, произвольным образом ориентированной в пространстве. При столкновении двух таких молекул они «зацепляют» друг друга без скольжения приходящими в соприкосновение точками на их поверхностях, в результате чего указанные точки мгновенно обмениваются скоростями. При этом сумма вращательных и поступательных энергий в системе двух столкнувшихся молекул сохраняется.

В 1922 году Ф. Пиддак [29] перенес на модель Бриана основные методы кинетической теории, ранее развитые для вращающихся молекул. Поэтому в литературе, посвященной модели шероховатых сфер, вариант уравнения Больцмана, отвечающий этой модели, иногда называют уравнением Бриана-Пиддака [7].

В работе [30] Б. Маккой, С. Сандлер и Ж. Дахлер применили модель Бриана-Пиддака для изучения явлений переноса в плотных многоатомных газах. С целью учета эффектов, связанных с повышенной плотностью газа, авторам приходится использовать специально предназначенную для этого случая модификацию уравнения Больцмана, известную как уравнение Энскога. Применительно к случаю шероховатых сфер, они получают его путем «замыкания» ББГКИ-цепочки, опираясь на гипотезу молекулярного хаоса. Далее, применяя метод разложения Чепмена-Энскога, удается получить (не всегда строго) ряд полезных практических выводов.

Ц. Брау, Дж. Симанс и Х. Макомбер [31] изучали структуру ударных волн (в основном, с помощью моментных и численных методов) в двухатомных газах, привлекая для их описания различные модели (например, «гантельную» модель молекул), а затем сравнивали полученные таким путем результаты с аналогичными результатами, основанными на модели шероховатых сфер с несколько упрощенным интегралом столкновений.

Укажем в этой связи еще на работу К. Черчиньяни и М. Лямпис [32], где строится модифицированные по сравнению с работой [30] кинетическое уравнение (так называемое уточненное уравнение Энскога для модели шероховатых сфер). Указанное уточнение состоит в строгом учете микроскопических «подробностей» процесса столкновения между молекулами, в частности, наличия у молекул в момент соударения ненулевого радиуса. Кроме того, в силу высокой плотности газа здесь уже нельзя рассматривать двухчастичную функцию распределения молекул как произведение одночастичных, что приводит к необходимости ввести в интеграл столкновений новые члены, такие как функционал локальной плотности, вычисляемый в разных точках пространства. Построенное таким образом уравнение, хотя и является весьма сложным с математической точки зрения, как показано авторами, удовлетворяет H-теореме Больцмана [12], условиям сохранения и т.п.

1.3. Максвелловское решение для уравнения Больцмана

Одним из фундаментальных вопросов, возникших практически одновременно с построением основ кинетической теории газов и затем успешно решенным именно чисто аналитическими методами, явился вопрос об описании всех максвелловских решений истинного (трехмерного, нелинейного) уравнения Больцмана во всем пространстве. Общий вид распределений, обращающих правую часть уравнения, т.е. интеграл столкновений, в нуль, впервые описал Дж.К. Максвелл [52] при наличии внешних сил и без каких бы то ни было предположений о подробностях соударений между молекулами (это было еще до создания Больцманом своего уравнения – Максвелл искал распределение, отвечающее стационарному равновесному состоянию газа - поэтому оно заслуженно носит его имя). Несколько позже Л.Больцман [1–3] повторил этот результат, основываясь на своей H-теореме, причем его доказательство носило уже более строгий характер, чем у Максвелла, и устраняло некоторые пробелы в его рассуждениях.

Первоначало был найден лишь глобальный, т.е. стационарный и однородный максвеллиан, гидродинамические параметры которого (плотность, температура, массовая скорость газа) не зависели ни от времени, ни от пространственных координат молекулы. Однако Максвелл существенно обобщил этот результат, получив в работе [53] общий вид стационарных, но неоднородных максвеллианов (в отсутствие внешних сил), удовлетворяющих уравнению Больцмана. Оказалось, что это распределение описывает вращение газа как целого (наподобие твердого тела) вокруг неподвижной оси и его поступательное движение, но лишь вдоль этой же оси (винтовое или спиралевидное движение газа; при этом его плотность быстро растет по мере удаления от оси вращения – эффект «центрифугирования» [13]).

Дальнейшее продвижение на пути обобщения винтового распределения состоялось лишь спустя 70 лет – в 1949 году Г.Грэд [54], а затем Т. Карлеман [6] и О.Г. Фридлендер [55] описали наиболее общее (нестационарное) локально-максвелловское решение уравнения Больцмана. Именно, в [54] при отсутствии внешних сил найдено общее решение системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно гидродинамических параметров и, тем самым, описана их возможная зависимость от времени и температуры. Аналогичные результаты получены в [6].

Кроме того, в указанных работах проведен частичный анализ физического смысла нестационарных максвелловских решений (показано, что соответствующее движение представляет собой наложение поступательного потока, радиального расширения и вращения как твердого тела, а также подробно рассмотрены несколько частных случаев, для которых вычислены некоторые физические величины - полная масса и энергия, асимптотическая скорость распространения волны, асимптотика решений при стремлении времени к бесконечности и т.п.). В работе [55] проанализирована связь между структурой локально-максвелловских решений уравнения Больцмана и свойствами внешних сил (полей). Для некоторых частных случаев удается получить решения в замкнутой форме (например, для стационарной внешней силы в отсутствие вращения возможны и колебательные движения) или ответить на «обратный» вопрос: какие внешние поля совместимы с тем или иным заданным типом максвелловского движения?

Вместе с тем, в указанных работах недостаточно полно исследованы некоторые важные особенности локальных максвеллианов, такие как форма и скорость движения вращающихся потоков газа (в отличие от «винтов» они могут двигаться поступательно в любом направлении), эволюция гидродинамических параметров при конечных временах, распределение плотности в пространстве, в частности, наличие зон уплотнения или разрежения и т.п.

1.4. Распределение Тамма-Мотт-Смита и его обобщения

Переход к изучению более сложных явлений в газах, описание которых не может быть достигнуто за счет использования одного максвелловского распределения ввиду отсутствия для большинства основных моделей взаимодействия между молекулами точных решений, отвечающих таким явлениям и процессам, потребовал введения в рассмотрение тех или иных комбинаций максвеллианов с последующим исследованием вопроса о том, являются ли они точными или приближенными (в каком-то специально оговоренном смысле) решениями уравнения Больцмана.

Первым шагом в этом направлении следует считать распределение Тамма-Мотт-Смита (в дальнейшем – ТМС-распределение), аппроксимирующее плоскую стационарную ударную волну [56, 57]. Следует заметить, что работа [57] была опубликована намного ранее, в связи с чем долгое время этот результат приписывался только Мотт-Смиту, однако И.Е. Тамм [56] выполнил свою работу еще раньше, в 1947 году, и она не была опубликована лишь из соображений секретности. Поскольку указанное распределение имеет вид линейной комбинации двух максвеллианов специального вида, его и другие, имеющие ту же форму, принято называть бимодальным. Основной целью этих работ было вычисление толщины фронта ударной волны, ибо предшествующие подходы (на основе уравнения Навье-Стокса либо метода Чепмена-Энскога и т.п.) давали не слишком хорошее согласие с экспериментом для достаточно сильных волн.

Важно отметить, что в ТМС-подходе гидродинамические параметры потоков с самого начала жестко связаны между собой благодаря известным соотношениям Рэнкина-Гюгонио (они отражают законы сохранения массы, энергии и имнульса) и тем фактом, что обе массовые скорости направлены одинаково (вдоль оси пространственного распространения волны). Таким образом, ТМС-распределение удовлетворяет лишь необходимым условиям, которым должно удовлетворять любое точное решение уравнения Больцмана (подобная ситуация связана с любыми моментными методами, когда выбирается лишь конечный набор тех или иных моментов, и является их общим слабым местом). Оставшийся произвол в выборе параметров и коэффициентных функций бимодального распределения устранялся использованием еще какого-нибудь одного моментного уравнения.

Слабость метода состояла, по крайней мере, в следующем. Во-первых, как отмечено, например, в [13, 18], его результаты зависят от того, какое именно моментное уравнение выбирается, т.е. – являются неоднозначными (скажем, переход от квадратичного момента к кубическому приводит к изменению толщины ударной волны более чем на четверть ее величины).

Во-вторых, оставалось неясным, будут ли налагаемые на ТМС-распределение условия и достаточными для того, чтобы оно являлось точным решением уравнения Больцмана.

В работе А.Сакураи [58] была предпринята попытка доказать этот факт. Автор изучает упрощенное уравнение (столкновительный член не зависит от прицельного угла, а лишь от относительной скорости соударяющихся молекул – одномерная модель) и пытается подобрать параметры распределения так, чтобы минимизировать разность между частями этого уравнения при больших числах Маха, для чего предполагает, что параметры связаны некоторыми дополнительными соотношениями. Однако работа содержала большое количество неточных рассуждений и нестрогих доказательств (при получении асимптотик прибыточного и затратного членов интеграла столкновений; при переходе к пределу при стремлении чисел Маха к бесконечности, где вместо равномерного по скоростям обосновано существование лишь поточечного предела; при разложении в ряды по малому параметру, сходимость которых не обоснована и т.п.).

Ошибочность утверждений работы [58] была затем обнаружена рядом авторов [63–66] и др. Более того, в работе Р. Кэфлиша и Б. Николаенко [59] (см. также [18]) прямо сказано, что ТМС-распределение не является точным решением уравнения Больцмана и никакого математического обоснования этого метода не существует. Там же доказана интересная теорема существования гладкого решения задачи о слабой ударной волне, которую можно рассматривать как краевую задачу с максвелловскими условиями на бесконечности вверх и вниз по течению волны, если все соответствующие гидродинамические параметры этих условий достаточно близки. Огметим, что теорема не содержит утверждения о единственности решения, а также не дает описания его вида, который, очевидно, должен быть отличным от бимодального (см. выше).

В связи с указанными недостатками метода многие авторы в дальнейшем пытались его усовершенствовать. Так, Х. Солвен, Ц. Грош и С. Зиринг [60] предложили тримодальный аналог ТМС-распределения (третья, «дополнительная» мода содержит еще одну, промежуточную, массовую скорость и линейный множитель перед экспонентой, но эта скорость также параллельна первым двум) для описания ударных волн в газе из максвелловских молекул. Однако оказалось, что уже такой переход связан с возникновением значительных технических трудностей, и дальнейший анализ становится возможным лишь численно. Он, по мнению самих авторов, показывает, что для слабых волн их результаты существенно уточняют результаты ТМС-теории, но для сильных являются неадекватными.

То же самое можно отнести и к модификации Л.Холвея [61], в которой распределение остается бимодальным, но в одной из мод вводятся различные весовые множители для различных компонент индивидуальной скорости молекулы (массовые скорости мод при этом остаются параллельными). Тримодальное распределение для случая многоатомных газов использовано и в [31].

При исследовании очень сильных ударных волн (волны «бесконечно большой интенсивности») широкое распространение приобрел подход, предложенный Г. Грэдом [62] В нем одна из двух максвелловских мод ТМС-распределения заменяется на δ-функпию в пространстве скоростей, а вторая гладкая мода может быть найдена из некоторого уравнения, по-видимому, еще более сложного, чем само уравнение Больцмана [13, 18] (в простейшем варианте метода она остается максвелловской).

Новый важный шаг в изучении распределений типа ТМС был сделан в работах Р. Нарасимхи и С. Дешпанде [63, 64]. Авторы впервые поставили задачу несколько шире: получить замкнутое выражение для прибыточного члена интеграла столкновений (т.е. самого сложного слагаемого в уравнении Больцмана) в случае модели твердых – сфер и произвольного бимодального распределения. Используя оригинальную технику с привлечением аппарата специальных функций, они вывели явное выражение для интеграла столкновений через вырожденную (конфлюэнтную) гипергеометрическую функцию Куммера.

На основании полученного представления путем моделирования на ЭВМ при числах Маха порядка 10 и равных коэффициентных функциях в ТМС-распределении сделаны важные выводы о сравнительном асимптотическом поведении при больших числах Маха самого распределения, прибыточного и затратного членов интеграла столкновений (заметим, впрочем, что все же не все выводы авторов оказались верными в общем случае, например, замеченное ими «смазанно двугорбое» поведение прибыточного члена в отличие от «одногорбого», присущего БГК-модели, на самом деле отражает его стремление к δ-функции, сосредоточенной не в двух точках, как для затратного члена и самого бимодального распределения, а на целой сфере, которой эти точки принадлежат [70–72]; из-за этого ошибочно и их утверждение о том, что вклад прибыточного члена асимптотически исчезаюше мал по сравнению с затратным).

Далее авторы вводят в рассмотрение локальную (зависящую от координат) и глобальную (интеграл по координатам) невязки между частями уравнения Больцмана, среднеквадратичные в пространстве скоростей, и, используя вариационный метод, с учетом граничных условий на $\pm\infty$ по пространственной координате, диктуемых постановкой задачи о структуре стационарной ударной волны, получают вид коэффициентных функций, обеспечивающий минимально возможное при выполнении указанных условий значение глобальной невязки (он совпадает с тем, который ранее был получен моментными методами). Как итог, впервые строго удается доказать, что указанная невязка не может быть сделана сколь угодно малой ни при каких числах Маха (даже стремящихся к бесконечности) и нетривиальных значениях остальных параметров распределения.

Таким образом, было опровергнуто утверждение работы [58] о том, что ТМС-распределение может быть сделано точным решением уравнения Больцмана путем подходящего подбора параметров, и доказано, что оно является лишь некоторой аппроксимацией истинного фронта ударной волны, впрочем, дающей достаточно хорошее совпадение с экспериментом в некотором диапазоне изменения параметров. Благодаря этому интерес к изучению бимодальных (и многомодальных) распределений не ослабевает и поныне, о чем свидетельствуют работы И. Хосокавы с соавторами [65, 66], С. Такаты, К. Аоки, К. Черчиньяни [67] и других.

В работе [65] получены уточненные результаты относительно толщины ударного слоя для случаев твердых сфер и максвелловских молекул, основанные на анализе H-функции Больцмана, вычисленной по ТМС-распределению. Окончательный вывод, подтверждающий результаты [63, 64] о невозможности сделать какое-либо бимодальное распределение, описывающее ударную волну даже бесконечной интенсивности, точным решением уравнения Больцмана, получен в [66]. С целью доказать это авторы вводят наиболее удобную безразмерную форму квадратичной невязки и в явном виде находят ее предел при бесконечно больших числах Маха. Непосредственно видно, что равенство нулю этого предела противоречит исходным предположениям о структуре распределения. Это приводит авторов к важному заключению о том, что само по себе предположение о бимодальной структуре приближенного решения, равно как и подход, основанный на минимизации той или иной невязки, являются вполне разумными и могут стать плодотворными, однако следует ослабить требования, которые налагаются в рамках ТМС на параметры и коэффициентные функции и являются слишком жесткими (указанная идея нашла воплощение и далеко идущее развитие в работах [70–76]). В работе [67], в частности, показано, что отличные от максвеллиана решения с конечными моментами всех порядков не могут быть позитивными.

Помимо задачи о структуре ударной волны, бимодальные и многомодальные распределения применялись и в кинетической теории испарения-конденсации газа. С.И. Анисимов [68] предложил тримодальное представление вдоль нормали к испаряющей поверхности. Ему удалось разрешить возникающую при этом систему уравнений сохранения для одного класса течений в рамках БГК-модели. Т. Итрехус [69] использовал такое же представление вместе с соответствующей системой моментных уравнений, следующих из уравнения Больцмана, для случая максвелловских молекул. Ему удалось показать, что эта система разрешима тогда и только тогда, когды число Маха ниже по потоку имеет порядок единицы – это, в частности, свидетельствует в пользу вывода о том, что одномерную задачу об испарении газа в вакуум нельзя рассматривать в стационарной постановке.

1.5. Некоторые основные работы по рассматриваемой тематике.

Ранее в пункте 1.2. уже шла речь о работе [32], имеющей важное значение для решения уравнения Бриана-Пиддака.

В работе [74] В.Д. Гордевским был получен вид бимодального распределения, т.е. линейной комбинации двух глобальных максвеллианов, и подобраны коэффициентные функции, зависящие от времени и пространственной координаты. В работе использовались две невязки: равномерно-интегральная и чисто-интегральная.

Приведем еще несколько работ, написанных сравнительно недавно.

Есть много вопросов, остающихся открытыми и связанными с устойчивостью нелинейных моделей волнового уравнения Больцмана, хотя соответствующая теория устойчивости сравнительно хорошо зарекомендовала себя для газовых динамических систем. В работе [87] исследуют нелинейную стабильность профиля волны разрежения для уравнения Больцмана с пограничным эффектом введенным с помощью зеркального отражения как для модели твердых сфер, так и жесткой потенциальной модели с угловой отсечкой. Анализ базируется на свойстве решения и его производных, которые положительны и ограничены на границе, возникающей из-за зеркального отражения, а также решения уравнения Больцмана введеном ранее для энергетического метода.

В [88] исследуют нормальную контактную жесткость шероховатой сферы и упругого полупространства с использованием 3-мерного исчисления при взаимодействия граничных элементов. Для малых нормальных сил, обнаружено, что жесткость ведет себя в соответствии с законом Порта-Попова для номинально плоских самоаффинных поверхностей, в то время как для более высоких нормальных сил, происходит переход к поведению Герца. Новая аналитическая модель является производным описанием контактного поведения при любой силе.

Сближение двух сфер вдоль их линии центров анализируется при условии, что каждая из них покрыта пористым слоем. Скольжения жидкости на поверхности пористых слоев затем позволяет сферам соприкосаться без особенности в соответствующей силе. С помощью анализа для «ровных» поверхностей, получено [89] аналитическое выражение для силы. Эта сила также конечна для исчезающей ширины зазора. Также там показано, каким образом свойства пористых слоев могут быть связаны со статистикой пространственных распределений неровностей поверхности. Наконец, отмечается, что конечная сила связана с конечной высотой неровностей.

В статье [90] представлено несколько численных результатов, выполненных с помощью полностью детерминированной схемы для дискретизации уравнения Больцмана из динамики разреженного газа в ограниченной области для нескольких важных проблем. Периодическое, зеркальное отражение и диффузные граничные условия обсуждаются и исследуются численно. В качестве оператора столкновений рассматривается приближение Фурье интеграла столкновений, которое гарантирует спектральную точность в скорости с вычислительной сложностью $MN\log(N)$, где N – число степеней свободы в пространстве скоростей и M представляет собой количество дискретных углов ядра столкновений. Этот алгоритм связан со вторым порядком конечной схемы по объему в пространстве и времени дискретизации, позволяющим иметь дело с разреженными режимами, а также с их гидродинамическим пределом. Численные результаты показывают, что предложенный подход значительно улучшает пристеночный без учета точности стационарного потока с использованием стандартных численных методов в широком диапазоне чисел Кнудсена. В частности, когда решение уравнения Больцмана замкнуто для локального равновесия и для потоков малой скорости.

Линейные и линеаризованные операторы столкновений Больцмана для твердых сфер в [93] изучаются методом, основанным на приведении интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям. Используется этот подход (в сочетании с численными методами) для изучения собственных значений операторов. Также использованы дифференциальные уравнения для исследования высокоэнергетических асимптотик решений линейных интегральных уравнений, связанных с разложением Чепмена-Энскога

1.6. Работы автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [77–82] и отражены в тезисах международных конференций [83–86].

1.7. Выводы к разделу

Приведеный краткий обзор литературы позволяет прийти к следующим выводам.

Модель Бриана-Пиддака с физической точки зрения представляет собой весьма большой интерес, потому что она описывает молекулы, которые обладают не только линейной скоростью, но и угловой, т.е. в отличии от твердых шаров, вращаются, что более соответствует реальным процессам в природе. Однако несмотря на перечисленные достоинства этой модели, изучалась она недостаточно и, как мы увидели, многие вопросы до сих пор оставались нерешеными.

Основное направление данной дисертационной работы это поиск точных и приближенных решений уравнения Бриана-Пиддака. Стоит сразу же отметить, что в явном виде точное решение этого уравнения на сегодняшний день известно только одно. Оно было получено Максвеллом для твердых шаров, а позже обобщено на модель шероховатых сфер, хотя полностью вопрос о зависимости от времени и координат не был исследован. К сожалению, маловероятно найти иные явные точные решения, а вот обобщить известное вполне возможно. Для модели шероховатых сфер найденное решение является глобальным максвеллианом [7] (зависит только от линейной и угловой скорости молекулы) и его обобщением явяется попытка выяснить наиболее общий вид зависимости входящих в него гидродинамических параметров от времени и пространственной координаты.

Относительно приближенных явных решений следует отметить, что их поиск в рамках данной работы будет осуществляться в виде бимодального распределения с некоторыми модами специального типа (смерчи, ”ускорения-уплотнения”), а коэффициентные функции будут подбираться исходя из некоторых соотношений, необходимых для минимизации используемых невязок (равномерно-интегральная, чисто-интегральная или невязка с весом).

РАЗДЕЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этом разделе будут приведены основные определения и обозначения, необходимые для постановки задачи и ее решения.

2.1. Уравнение Бриана-Пиддака

Определение 2.1. Функция распределения частиц $f(t,V,x,\omega)$ описывает количество частиц или молекул, которые в момент времени t находятся вблизи точки пространства x и имеют линейную скорость близкую к V и угловую скорость близкую к ω.

Функция распределения частиц играет важную роль в кинетической теории газов, ибо через неё выражаются все макроскопические величины, описывающие процессы в газе.

Уравнение Больцмана для модели шероховатых сфер имеет вид [7,28,29,32,74]:

$$D(f) \equiv Q(f,f), \tag{2.1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2.2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha)$$
$$\times \left[f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t,V,x,\omega) f(t, V_1, x, \omega_1) \right]. \tag{2.3}$$

Здесь d – диаметр молекулы, который связан с её моментом инерции I следующим соотношением:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \tag{2.4}$$

где b – параметр, $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, характеризующий изотропное распределение вещества внутри молекулы; t – время; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – пространственная координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $w = (w^1, w^2, w^3) \in R^3$ – линейная и угловая скорости молекулы соответственно; $\frac{\partial f}{\partial x}$ – градиент функции f по переменной x; Σ – единичная сфера в пространстве R^3; α – единичный вектор из R^3, соединяющий центры сталкивающихся молекул в момент соударения;

$$B(V - V_1, \alpha) = |(V - V_1, \alpha)| - (V - V_1, \alpha) \tag{2.5}$$

– ядро интеграла столкновений(”столкновительный член”).

Линейные (V^*, V_1^*) и угловые (w^*, w_1^*) скорости молекул после столкновения выражаются через соответствующие скорости до столкновения следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}
V^* &= V - \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha * (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right); \\
V_1^* &= V_1 + \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha * (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right); \\
\omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha * (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\}; \\
\omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha * (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

знаком $*$ обозначено векторное произведение.

2.2. Точное решение рассматриваемого уравнения

Единственным точным решением уравнения Больцмана (2.1), которое известно в явном виде до настоящего времени, является выражение, аналогичное полученному Максвеллом в 1859г. для случая модели твердых сфер, т.е. такое, которое удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} D(f) = 0, \\ Q(f, f) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Для рассматриваемой нами модели такое выражение тоже использовалось в монографии [7], где утверждалось, что натуральный логарифм этого выражения имеет следующий вид:

$$\ln f = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} V - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \right) + \alpha^{(4)} (I\omega + [x \times V]). \qquad (2.8)$$

В общем случае коэффициенты $\alpha^{(j)}, j = 1..4$ зависят и от времени, и от пространственной координаты. До настоящего времени, в частности, в монографии [7] исследовано только два частных случая: так называемый глобальный максвеллиан (когда рассматриваемое выражение зависит только от линейной и угловой скоростей молекулы), и один из локальных (так называемый винт или спираль, т.е. стационарный неоднородный максвеллиан, у которого в отличие от глобального, есть еще зависимость и от пространственной координаты x).

Поэтому одной из задач данной работы является поиск самого общего вида такого нестационарного решения (т.е. вида зависимости коэффициентов $\alpha^{(j)}, j = 1..4$ не только от x но и от времени t), а также исследование его физического смысла и выделение особо интересных частных случаев подобно тому, как это было сделано для модели твердых сфер в [6, 54, 55, 76]. Этой задаче будет посвящен третий раздел диссертации.

2.3. Приближенные явные решения уравнения Больцмана для модели шероховатых сфер

Приближенное решение будем искать в виде следующего бимодального распределения:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \qquad (2.9)$$

где функции $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$ – неотрицательные и гладкие(здесь и всюду далее, если не оговорено иное, индекс i принимает только значения 1 и 2), а максвелианы M_i описывают один из возможных типов движения потоков газа.

Поиск явных приближенных решений кинетических уравнений, которые имели бы бимодальную структуру, осуществлялся рядом авторов, в частности, для интересующей нас модели взаимодействия между молекулами этому вопросу были посвящены работы [74, 75].

Так, в работе [75] было исследовано взаимодействие двух "винтов" (стационарных неоднородных максвеллианов специального типа) в газе из шероховатых сфер. В разделе 4 нашей задачей будет исследование взаимодействия двух "смерчей" (нестационарных неоднородных максвеллианов) и движения типа "ускорение-уплотнения" для модели Бриана-Пиддака.

При нахождении явных приближенных решений мы будем использовать следующие невязки, предложеные Гордевским В.Д. в работах [74, 92]:

–"равномерно-интегральное" отклонение:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} \int_{R^3} dV d\omega \left| D(f) - Q(f,f) \right|; \tag{2.10}$$

–"чисто-интегральная" невязка:

$$\Delta_1 = \int_R dt \int_{R^3} dx \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| D(f) - Q(f,f) \right|; \tag{2.11}$$

–"невязка с весом":

$$\widetilde{\Delta} = \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|. \tag{2.12}$$

С помощью указанных отклонений между частями уравнения Бриана-Пиддака будут подбираться коэффициентные функции φ_i с целью обеспечения условия бесконечной малости хотя бы одной из невязок (2.10), (2.11) или (2.12).

2.4. Выводы к разделу

В разделе 2 приведен вид уравнения Больцмана для модели шероховатых сфер, приведены формулы выражающие скорости молекул после столкновения через соответствующие скорости до столкновения, а также основные обозначения.

Сформулирована задача поиска наиболее общего вида явного точного решения уравнения Бриана-Пиддака, что фактически означает получение самого общего возможного вида максвелловских распределений для модели Бриана-Пиддака, а также их классификации, что ранее уже было сделано в $[6, 54, 55, 76]$ для модели твердых сфер. Данная задача актуальна, т.к. она позволит получить представление о возможных типах движения для рассматриваемой модели. Таким образом, одной из основных задач является нахождение вида точного решения уравнения Бриана-Пиддака в случае, когда коэффициенты в представлении (2.8) являются функциями от времени t и пространственной координаты x.

Вторым направлением исследования является построение явных приближенных решений уравнения Бриана-Пиддака имеющих некоторый специальный вид (2.9). Ввиду того, что это решение не является точным, будем использовать отклонения между частями уравнения (2.1), представленные в формулах (2.10), (2.11) или (2.12).

РАЗДЕЛ 3

МАКСВЕЛЛОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТЫХ СФЕР

В этом разделе будет получен общий вид локальных максвеллианов для модели Бриана-Пиддака, а также осуществлена физическая трактовка найденных решений. Во втором пункте этого раздела будет приведена классификация типов движения, которые возможны для данной модели.

3.1. Зависимость коэффициентов $\alpha^{(j)}$ от переменных t и x

Как было указано в предыдущем разделе, натуральный логарифм функции распределения для модели шероховатых сфер должен иметь вид (2.8). Однако при непосредственной подстановке выражения (2.8) в выражения (2.2) и (2.3) оказывается, что в общем случае оно не удовлетворяет системе (2.7), что показано в третьем пункте данного раздела. Именно, нетрудно убедится в том, что в выражении (2.8) должно отсуствовать слагаемое $\alpha^{(4)}I\omega$. Это обьясняется тем, что авторы посчитали равными среднюю угловую скорость по всем молекулам и угловую скорость газа в целом (как твердого тела), что в действительности не всегда верно.

После устранения обнаруженной неточности указанный ранее логарифм для функции распределения частиц имеет следующий вид:

$$\ln f = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}V - \alpha^{(3)}\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) + \alpha^{(4)}[x \times V]. \qquad (3.1)$$

Однако, даже исправив эту неточность, мы все-равно не получим наиболее общего выражения, описывающего максвеллиан в газе из шероховатых молекул, ибо возможный вид коэффициентов $\alpha^{(j)}, j = 1..4$ ранее нигде не исследовался.

Для решения этой задачи воспользуемся подходом, применеными для модели твердых сфер в [6, 54, 55]. Его суть состоит в следующем. Наличие зависимости параметров $\alpha^{(j)}, j = 1..4$ от переменных t и x не влияет на обнуление правой части уравнения (2.1), что не останется верным для левой части $D(f)$ уравнения Бриана-Пиддака. Поэтому вид коэффициентов $\alpha^{(j)}, j = 1..4$ будем получать из требования равенства нулю выражения $D(f)$, описываемого представлением (2.2). Это и будет продемонстрировано при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.1. Общий вид максвеллианов для модели шероховатых сфер задается формулой (3.1), где коэффициенты $\alpha^{(j)}, j = 1..4$ имеют следующее представление:

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = Cx + C_1; \\ \alpha^{(2)} = -Ct + C_3; \\ \alpha^{(3)} = -2C_2; \\ \alpha^{(4)} = C_4, \end{cases} \tag{3.2}$$

где C, C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные числовые и векторные константы.

Доказательство. Для начала преобразуем выражение (3.1):

$$\begin{aligned} &\ln f \\ &= \alpha^{(1)} - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + \alpha^{(2)} \cdot V - (V, [x \times \alpha^{(4)}]) \\ &= \alpha^{(1)} - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + (V, \alpha^{(2)} - [x \times \alpha^{(4)}]). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha^{(1)} = a(t, x),$$

$$\alpha^{(3)} = -2b(t, x),$$

$$\alpha^{(2)} + [\alpha^{(4)} \times x] = c(t, x),$$

где новые искомые функции таковы:

$$a(t,x):\ R^4 \to R^1,$$
$$b(t,x):\ R^4 \to R^1,$$
$$c(t,x):\ R^4 \to R^3.$$

Перепишем равенство (3.3) в новых обозначениях:

$$\begin{gathered}\ln f\\ = a(t,x) + b(t,x)(V^2 + I\omega^2) + c(t,x)\cdot V\\ = a(t,x) + b(t,x)(V^1)^2 + b(t,x)(V^2)^2 + b(t,x)(V^3)^2\\ +Ib(t,x)(\omega^1)^2 + Ib(t,x)(\omega^2)^2 + Ib(t,x)\\ \times(\omega^3)^2 + c_1(t,x)\cdot V^1 + c_2(t,x)\cdot V^2 + c_3(t,x)\cdot V^3.\end{gathered}$$

Потребуем, чтобы выражение (2.2) тождественно равнялось нулю, в соответствии с (7), однако вместо функции f будем подставлять выражение lnf ибо

$$(lnf)' = \frac{1}{f}\cdot f',$$

а дробь $\frac{1}{f}$ не обращается в нуль:

$$\begin{gathered}\frac{\partial a}{\partial t} + (V^1)^2\frac{\partial b}{\partial t} + (V^2)^2\frac{\partial b}{\partial t} + (V^3)^2\frac{\partial b}{\partial t}\\ +I(\omega^1)^2\frac{\partial b}{\partial t} + I(\omega^2)^2\frac{\partial b}{\partial t} + I(\omega^3)^2\frac{\partial b}{\partial t} + V^1\frac{\partial c_1}{\partial t} + V^2\frac{\partial c_2}{\partial t}\\ +V^3\frac{\partial c_3}{\partial t} + V^1\frac{\partial a}{\partial x^1} + (V^1)^3\frac{\partial b}{\partial x^1} + V^1(V^2)^2\frac{\partial b}{\partial x^1} + V^1(V^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^1}\\ +IV^1(\omega^1)^2\frac{\partial b}{\partial x^1} + IV^1(\omega^2)^2\frac{\partial b}{\partial x^1} + IV^1(\omega^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^1} + (V^1)^2\frac{\partial c_1}{\partial x^1} + V^1V^2\frac{\partial c_2}{\partial x^1}\\ +V^1V^3\frac{\partial c_3}{\partial x^1} + V^2\frac{\partial a}{\partial x^2} + (V^1)^2V^2\frac{\partial b}{\partial x^2} + (V^2)^3\frac{\partial b}{\partial x^2} + V^2(V^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^2}\\ +IV^2(\omega^1)^2\frac{\partial b}{\partial x^2} + IV^2(\omega^2)^2\frac{\partial b}{\partial x^2} + IV^2(\omega^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^2} + V^1V^2\frac{\partial c_1}{\partial x^2} + (V^2)^2\frac{\partial c_2}{\partial x^2}\\ +V^2V^3\frac{\partial c_3}{\partial x^2} + V^3\frac{\partial a}{\partial x^3} + (V^1)^2V^3\frac{\partial b}{\partial x^3} + (V^2)^2V^3\frac{\partial b}{\partial x^3} + (V^3)^3\frac{\partial b}{\partial x^3}\end{gathered}$$

$$+IV^3(\omega^1)^2\frac{\partial b}{\partial x^3}+IV^3(\omega^2)^2\frac{\partial b}{\partial x^3}+IV^3(\omega^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^3}$$
$$+V^1V^3\frac{\partial c_1}{\partial x^3}+V^2V^3\frac{\partial c_2}{\partial x^3}+(V^3)^2\frac{\partial c_3}{\partial x^3},$$

что тождественно должно быть равным нулю.

Приравнивая нулю коэффициенты при компонентах векторов линейной и угловой скоростей V и ω и их различных степенях, а также произведениях, имеем прежде всего:

1) во-первых, справедливо равенство:

$$\frac{\partial a}{\partial t}=0,$$

что означает отсутствие зависимости у функции $a(t,x)$ от времени t, т.е. функция a зависит только от пространственной координаты x:

$$a=a(x); \tag{3.4}$$

2) для любого $k=1,2,3$ при квадратах угловой скорости $(\omega^k)^2$:

$$\frac{\partial b}{\partial t}=0, \tag{3.5}$$

откуда получаем, что:

$$b=b(x).$$

Учитывая коэффициенты при $(V^k)^3$ имеем равенства:

$$\frac{\partial b}{\partial x^k}=0, \tag{3.6}$$

т.е.

$$b=b(t).$$

Таким образом, ввиду полученных результатов (3.5) и (3.6), b – произвольная скалярная величина:

$$b=const\in R^1. \tag{3.7}$$

Принимая во внимание найденный только что вид функции $a(t,x)$ и $b(t,x)$, представленный формулами (3.4), (3.7) соответственно, из остальных соотношений получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial x^1} = 0 & (3.8.1) \\ \frac{\partial c_2}{\partial x^2} = 0 & (3.8.2) \\ \frac{\partial c_3}{\partial x^3} = 0 & (3.8.3) \\ \frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x^1} = 0 & (3.8.4) \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x^2} = 0 & (3.8.5) \\ \frac{\partial c_3}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x^3} = 0 & (3.8.6) \\ \frac{\partial c_2}{\partial x^1} + \frac{\partial c_1}{\partial x^2} = 0 & (3.8.7) \\ \frac{\partial c_3}{\partial x^1} + \frac{\partial c_1}{\partial x^3} = 0 & (3.8.8) \\ \frac{\partial c_3}{\partial x^2} + \frac{\partial c_2}{\partial x^3} = 0 & (3.8.9) \end{cases} \qquad (3.8)$$

Из уравнений (3.8.1) – (3.8.3) имеем:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1(t, x^2, x^3), \\ c_2 &= c_2(t, x^1, x^3), \qquad (*) \\ c_3 &= c_3(t, x^1, x^2) \end{aligned}$$

Определим вид функции c_1.

Из уравнения (3.8.1) следуют равенства:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2 \partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^1} = 0.$$

Продифференцируем уравнение (3.8.7) по переменой x^3, а уравнение (3.8.8) по переменной x^2:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^3 \partial x^1} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2 \partial x^3} = 0.$$

Складывая почлено полученые равенства, имеем:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^3 \partial x^1} + \frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2 \partial x^1} + 2\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^2} = 0$$

учитывая, что производная по x^1 уравнения (3.8.9) такова:

$$\frac{\partial^2 c_3}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^1 \partial x^3} = 0,$$

получаем, что:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^2} = 0.$$

Из первого уравнения системы очевидно, что:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial (x^1)^2} = 0,$$

из уравнений (3.8.7) и (*) вытекает, что:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial (x^2)^2} = 0,$$

а из (3.8.8) и (*) следует равенство:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial (x^3)^2} = 0.$$

Значит, $c_1 -$ линейная функция от x^2 и x^3, но коэффициенты при данных компонентах пространственной координаты могут зависить и от времени t.

Аналогично, можно показать, что $c_2 -$ линейная функция по компонентам пространственной координаты x^1 и x^3, но коэффициенты могут зависить от t, а также $c_3 -$ линейная функция по x^1 и x^2, и у них коэффициенты тоже могут зависить от времени t.

Таким образом, имеем следующий вид для функций c_1, c_2 и c_3:

$$c_1(t, x^2, x^3) = c_{11}(t) + c_{12}(t) \cdot x^2 + c_{13}(t) \cdot x^3, \tag{3.9}$$

$$c_2(t, x^1, x^3) = c_{21}(t) + c_{22}(t) \cdot x^1 + c_{23}(t) \cdot x^3, \tag{3.10}$$

$$c_3(t, x^1, x^2) = c_{31}(t) + c_{32}(t) \cdot x^1 + c_{33}(t) \cdot x^2. \tag{3.11}$$

Теперь используя уравнения (3.8.7)–(3.8.9), определим зависимость между некоторыми функциями c_{ij}.

Из (3.8.7) следует, что:

$$c_{22}(t) + c_{12}(t) = 0,$$

т.е.

$$c_{22}(t) = -c_{12}(t).$$

Аналогично, можно получить следующие равенства:

$$c_{32}(t) + c_{13}(t) = 0,$$

$$c_{33}(t) + c_{23}(t) = 0,$$

из чего следует:

$$c_{32}(t) = -c_{13}(t), \tag{3.12}$$

$$c_{33}(t) = -c_{23}(t). \tag{3.13}$$

Далее уравнение (3.8.4) благодаря (3.9) даёт равенство:

$$c'_{11}(t) + c'_{12}(t)x^2 + c'_{13}(t)x^3 = -\frac{\partial a}{\partial x^1}.$$

Нам уже известно, что $a = a(x)$, значит:

$$c'_{11}(t) = C, \quad c'_{12}(t) = C_1, \quad c'_{13}(t) = C_2,$$

$$C, C_1, C_2 \in R^1.$$

Отсюда интегрированием последних равенств по переменной t и, используя зависимость (3.12) получаем, что:

$$c_{11}(t) = C \cdot t + C_3,$$

$$c_{12}(t) = C_1 \cdot t + C_4,$$

$$c_{13}(t) = C_2 \cdot t + C_5,$$

$$c_{22}(t) = -C_1 \cdot t - C_4,$$

$$c_{32}(t) = -C_2 \cdot t - C_5, \quad C_3,\, C_4,\, C_5 \in R^1.$$

Итак,

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = -C - C_1 \cdot x^2 - C_2 \cdot x^3, \tag{3.14}$$

тогда проинтегрировав последнее равенство (3.14) по переменной x^1 имеем:

$$a = -Cx^1 - C_1x^1x^2 - C_2x^1x^3 + \varphi(x^2, x^3). \tag{3.15}$$

Далее из уравнения (3.8.5) и выражения (3.10) получаем:

$$c_{21}^{'}(t) - C_1x^1 + c_{23}^{'}(t)x^3 = -\frac{\partial a}{\partial x^2}.$$

Уже известно, что $a = a(x)$, значит,

$$c_{21}^{'}(t) = C_6, \quad c_{23}^{'}(t) = C_7, \quad C_6, C_7 \in R^1,$$

интегрируя последние равенства по времени t и, вспоминая условие (3.13), находим, что:

$$\begin{aligned} &c_{21}(t) = C_6 \cdot t + C_8, \\ &c_{23}(t) = C_7 \cdot t + C_9, \\ &c_{33}(t) = -C_7 \cdot t - C_9, \qquad C_8, C_9 \in R^1 \end{aligned}$$

следовательно:

$$\frac{\partial a}{\partial x^2} = -C_6 + C_1x^1 - C_7x^3,$$

или:

$$a = -C_6x^2 + C_1x^1x^2 - C_7x^2x^3 + \varphi_1(x^1, x^3). \tag{3.16}$$

Как и прежде из уравнения (3.8.6) с учетом представления (3.11) видим, что:

$$c_{31}^{'}(t) - C_2 \cdot x^1 - C_7 \cdot x^2 = -\frac{\partial a}{\partial x^3}.$$

Ранее было отмечено, что $c_{31}^{'}(t) = C_{10}$, откуда, интегрируя по переменной t, получаем:

$$c_{31}(t) = C_{10} \cdot t + C_{11}, \quad C_{10}, C_{11} \in R^1.$$

Таким образом:

$$\frac{\partial a}{\partial x^3} = -C_{10} + C_2 \cdot x^1 + C_7 \cdot x^2,$$

значит,

$$a = -C_{10}x^3 + C_2x^1x^3 + C_7x^2x^3 + \varphi_2(x^1, x^2). \qquad (3.17)$$

Итак, получены три выражения $(3.15), (3.16)$ и (3.17), которые описывают искомую функцию $a = a(x)$, но в них пока ещё присутствуют неизвестные функции $\varphi(x^2, x^3), \varphi_1(x^1, x^3)$ и $\varphi_2(x^1, x^2)$. С целью уточнения вида функций φ, φ_1 и $\varphi_2,$ а также окончательного представления функции $a(x),$ подставим выражения $(3.15), (3.16)$ и (3.17) в уравнения начальной системы (3.8.4), (3.8.5) и (3.8.6).

Подстановка (3.15) в (3.8.4) дает тождество, т.к. (3.15) получено из (3.8.4), а в (3.8.5) приводит к тому, что:

$$C_6 - C_1x^1 + C_7x^3 - C_1x^1 + \frac{\partial\varphi(x^2, x^3)}{\partial x^2} = 0.$$

Тогда:

$$\varphi = -C_7x^2x^3 - C_6x^2 + 2C_1x^1x^2 + \psi(x^3),$$

а из уравнения (3.8.6) имеем:

$$C_{10} - C_2x^1 - C_7x^2 - C_2x^1 + \frac{\partial\varphi(x^2, x^3)}{\partial x^3} = 0,$$

$$C_{10} - 2C_2x^1 - 2C_7x^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x^3} = 0,$$

т.е. $C_2 \equiv 0$ и $C_7 \equiv 0,$ а функция ψ имеет вид:

$$\psi = -C_{10} \cdot x^3 + D.$$

Значит, (3.15) преобразуется следующим образом:

$$a(x) = -Cx^1 + C_1x^1x^2 - C_6x^2 - C_{10}x^3 + D, \qquad D \in R^1.$$

Подставим (3.16) в уравнения (3.8.4)-(3.8.6):

в (3.8.4):

$$C + 2C_1x^2 + \frac{\partial\varphi_1(x^1, x^3)}{\partial x^1} = 0.$$

Поскольку здесь последнее слагаемое не зависит от переменной x^2, то $C_1 \equiv 0$, и тогда:

$$\varphi_1(x^1, x^3) = -C \cdot x^1 + \xi(x^3).$$

Далее, подстановка в (3.8.5) и (3.8.6) дает:

$$C_6 - C_6 + \frac{\partial \varphi_1(x^1, x^3)}{\partial x^2} = 0,$$
$$C_{10} + \frac{\partial \varphi_1(x^1, x^3)}{\partial x^3} = 0,$$

откуда,

$$C_{10} + \frac{\partial \xi}{\partial x^3} = 0$$

значит,

$$\xi(x^3) = -C_{10} \cdot x^3 + D_1, \qquad D_1 \in R^1. \tag{3.18}$$

Итак, (3.16) преобразуется в

$$a(x) = -C_6 x^2 - C x^1 - C_{10} x^3 + D_1.$$

Аналогично, подставив (3.17) в уравнения (3.8.4)-(3.8.6), получаем:

$$a(x) = -C_{10} x^3 - C x^1 - C_6 x^2 + D_2,$$

где $D_2 \in R^1$.

Нами показано, что:

$$a(x) = -C x^1 - C_6 x^2 - C_{10} x^3 + D,$$

или же

$$a(x) = (-C, -C_6, -C_{10}) x + D.$$

Также преобразовались функции c_{lk}, $(l = 1..3, k = 1..3)$ к следующему виду:

$$c_{11}(t) = C \cdot t + C_3 \qquad c_{12}(t) = C_4 \qquad c_{23}(t) = C_9$$
$$c_{21}(t) = C_6 \cdot t + C_8 \qquad c_{13}(t) = C_5 \qquad c_{32}(t) = -C_5$$
$$c_{31}(t) = C_{10} \cdot t + C_{11} \qquad c_{22}(t) = -C_4 \qquad c_{33}(t) = -C_9$$
$$C, C_3, C_4, C_5, C_6, C_8, C_9, C_{10}, C_{11} \in R^1.$$

Окончательно, имеем представление для функции $a(x)$:

$$a(x) = (-C, -C_6, -C_{10})(x^1, x^2, x^3) + D,$$

и для вектор-функции $c(t, x)$:

$$c(t,x) = \begin{pmatrix} C \\ C_6 \\ C_{10} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_4x^2 + C_5x^3 + C_3 \\ -C_4x^1 + C_9x^3 + C_8 \\ -C_5x^1 - C_9x^2 + C_{11} \end{pmatrix}.$$

Итак, получено следующее решение системы (3.8) (здесь за вновь введенными векторными и скалярными константами сохранены обозначения, использованные выше для иных величин):

$$\begin{aligned} &a(x) = Cx + C_1, \quad C \in R^3, C_1 \in R^1 \\ &b(x) = C_2, \quad C_2 \in R^1 \\ &c(t,x) = -Ct + C_3 + [C_4 \times x], \quad C_3, C_4 \in R^3 \end{aligned}$$

Возвращаясь к начальным обозначениям, получим (3.2). Теорема доказана. $\square$

3.2. Физический смысл найденного решения

Для обсуждения физического смысла найденного общего вида локальных максвеллианов в модели Бриана-Пиддака, сначала преобразуем выражение (3.1).

Подставим найденные коэффициенты (3.2) в выражение (3.3) и преобразуем:

$$\begin{aligned} &\ln f \\ &= Cx + C_1 + C_2(V^2 + I\omega^2) + V(-Ct + C_3 + [C_4 \times x]) \\ &= Cx + C_1 + C_2\left(V - \frac{Ct - C_3 + [x \times C_4]}{2C_2}\right)^2 \\ &- \frac{(Ct - C_3 + [x \times C_4])^2}{4C_2} + IC_2\omega^2 \end{aligned}$$

$$= Cx + C_1 - \frac{(Ct - C_3 + [x \times C_4])^2}{4C_2}$$
$$+C_2 \left(\left(V - \frac{Ct - C_3 + [x \times C_4]}{2C_2} \right)^2 + I\omega^2 \right).$$

Сначала рассмотрим случай, когда $C_4 \neq 0$.

Выразив отсюда функцию f и подобрав константы $C, C_k (k = 1..4)$ следующим образом (подобно тому, как это было сделано в [76] в случае модели твердых сфер)

$$C = 2\beta[\overline{\omega} \times \overline{u_0}] - 2\beta\widetilde{V}; \quad C_1 = \ln\left(\rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3\right);$$
$$C_2 = -\beta; \quad C_3 = -2\beta[\overline{\omega} \times x_0] + 2\beta\widetilde{V}; \quad C_4 = 2\beta\overline{\omega},$$

имеем:

$$f(t, V, x, \omega) = \rho_0 I^{3/2} e^{\beta([\overline{\omega} \times (x - \overline{x}_0 - \overline{u}_0 t)]^2 - 2\widetilde{W}_{||} x)} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3$$
$$\times e^{-\beta\left(\left(V - \widehat{V}_{||}(t) - [\overline{\omega} \times (x - x_0 - \overline{u}_0 t)]\right)^2 + I\omega^2\right)} \tag{3.19}$$

где ρ_0 – плотность газа, $\overline{\omega}$ – угловая скорость потока газа в целом; $\overline{V}(t, x)$ – массовая скорость, имеющая вид:

$$\overline{V}(t, x) = \widehat{V}_{||}(t) + [\overline{\omega} \times (x - x_0 - \overline{u}_0 t)]; \tag{3.20}$$

$x_0, \overline{x}_0$ – точки, через которые проходят оси скорости и плотности соответственно, в момент времени $t = 0$:

$$x_0 = \frac{1}{\overline{\omega}^2}\left[\overline{\omega} \times \widetilde{V}\right], \quad \overline{x}_0 = \frac{1}{\overline{\omega}^2}\left[\overline{\omega} \times (\widetilde{V} - \overline{u}_0)\right] \tag{3.21}$$

$\overline{u}_0$ – произвольный вектор, перпендикулярный к $\overline{\omega}$ (поступательная скорость этих осей);

β – обратная температура газа, определяющаяся следующим образом:

$$\beta = \frac{1}{2T}; \tag{3.22}$$

$\widehat{V}_{||}(t) = \widetilde{V}_{||} + \widetilde{W}_{||} t$ – составляющая вектора $\widehat{V}(t) = \widetilde{V} + \widetilde{W} t,$ параллельная $\overline{\omega},$ где $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in R^3$ – произвольные постоянные векторы.

Во-первых, следует отметить, что температура газа из шероховатых сфер не зависит от времени, а в работе [76] показано, что для модели твердых сфер такая зависимость существует и имеет вполне конкретный вид.

Во-вторых, показатель экспоненты в выражении для плотности квадратично зависит от перпендикулярной, по отношению к $\overline{\omega}$, составляющей вектора x, и лишь линейно – от параллельной его составляющей (в отличии от модели твердых сфер – [76], где присутствует еще слагаемое, пропорциональное x^2). Далее, в массовой скорости отсуствует член, пропорциональный tx, т.е. теперь невозможны движения типа разогрев – остывание и расширение – сжатие (подробнее такие движения в случае модели твердых сфер также описаны в [76]).

Отметим, что полученное выражение (3.19) при $\widetilde{W} = 0$ является аналогом смерча (в верности этого утверждения можно убедиться и непосредственно, подставив его в систему (2.7)).

Теперь исследуем случай $C_4 \equiv 0$. Имеем:

$$\ln f$$

$$= Cx + C_1 - \frac{(Ct - C_3)^2}{4C_2} + C_2 \left(\left(V - \frac{Ct - C_3}{2C_2} \right)^2 + I\omega^2 \right).$$

Подберем коэффициенты $C_k,\ k = 1..4$ следующим образом:

$$C = 2\overline{u}\beta;$$

$$C_1 = \ln \left(\rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^3 \right);$$

$$C_2 = -\beta;$$

$$C_3 = 2\beta\widehat{V},$$

тогда получаем:

$$f(t,V,x,\omega)$$

$$= \rho_0 I^{3/2} e^{\beta\left((\widehat{V}-\overline{u}t)^2+2\overline{u}x]\right)} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(\left(V-\widehat{V}+\overline{u}t\right)^2+I\omega^2\right)} \tag{3.23}$$

Выражение (3.23) описывает движение типа ускорение – уплотнение, т.е. $\overline{\omega}=0$, а $\overline{u}\neq 0$ (подробнее о таком движении в случае модели твердых сфер сказано в работе [94]).

Также следует отметить, что ”винт” (т.е. ”стационарный смерч” или ”спираль” – терминология [75]) в газе из шероховатых сфер теперь выглядит следующим образом:

$$f(V,x,\omega)$$

$$= \rho_0 I^{3/2} e^{\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(\left(V-\widetilde{V}-[\overline{\omega}\times(x-x_0)]\right)^2+I\omega^2\right)}.$$

3.3. Неточность в формуле, описывающей общий вид максвеллианов для модели Бриана-Пиддака

Ранее в тексте диссертации сообщалось, что выражение (2.8) содержит лишний член, но строго это не было доказано.

Лемма 3.1. Функция f из выражения (2.8) не удовлетворяет системе уравнений (2.7).

Доказательство. Выражение (2.8) может быть преобразовано к следующему виду:

$$f = \rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2} e^{-\beta\left(\left(V-\widehat{V}_{||}-[\overline{\omega}\times(x-x_0)]\right)^2+I(\omega-\overline{\omega})^2\right)}. \tag{3.24}$$

Поскольку $\widehat{V}_{||}||\overline{\omega}$, правая часть выражения (3.24) может быть записана так:

$$\rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2} e^{-\beta\left((V-\widehat{V}_{||}-[\overline{\omega}\times(x-x_0)])^2+I(\omega-\overline{\omega})^2\right)}$$

$$= \rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2} e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2}$$

$$\times e^{2\beta(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2}$$

$$= \rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2+2\beta(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2}. \qquad (3.25)$$

Подставим теперь полученное представление (3.25) в уравнения (2.1) – (2.3).

Производная по t попросту равна нулю (нет зависимости от времени), а градиент по x таков:

$$\rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2+2\beta\left(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)]\right)-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2} \cdot 2\beta[V\times\overline{\omega}]$$

т.е.

$$\rho_0 \cdot 2\beta I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2+2\beta(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2} \cdot (V,[V\times\overline{\omega}]) = 0,$$

значит:

$$D(f) = 0.$$

Для того, чтобы $Q(f,f)$ также равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее равенство [7] (см. также [9, 13]):

$$f(V_1^*, x, \omega_1^*) f(V^*, x, \omega^*) - f(V, x, \omega) f(V_1, x, \omega_1) = 0. \qquad (3.26)$$

Проверим выполнение равенства (3.26). Разделив его на коэффициент $\left(\rho_0 I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3\right)^2$ (ненулевой из физических соображений), и приравняв соответствующие аргументы экспонент, получим, что оно сводится к следующему соотношению:

$$-\beta(V^*-\widehat{V}_{||})^2 - I\beta(\omega^*-\overline{\omega})^2 + 2\beta(V^*,[\overline{\omega}\times(x-x_0)]) - \beta(V_1^*-\widehat{V}_{||})^2$$

$$-I\beta(\omega_1^*-\overline{\omega})^2 + 2\beta(V_1^*,[\overline{\omega}\times(x-x_0)]) + \beta(V-\widehat{V}_{||})^2 + I\beta(\omega-\overline{\omega})^2$$

$$-2\beta(V,[\overline{\omega}\times(x-x_0)]) + \beta(V_1-\widehat{V}_{||})^2 + I\beta(\omega_1-\overline{\omega})^2$$

$$-2\beta(V_1,[\overline{\omega}\times(x-x_0)]) = 0.$$

Сократим его на $(-\beta) \neq 0$ и далее упростим, используя следующие законы механики:
закон сохранения импульса:

$$V + V_1 = V^* + V_1^*$$

и закон сохранения суммарной энергии:

$$V^2 + I\omega^2 + V_1^2 + I\omega_1^2 = (V^*)^2 + I(\omega^*)^2 + (V_1^*)^2 + I(\omega_1^*)^2$$

(их справедливость ясна как из физических соображений, так и соотношений (2.6), из которых они могут быть проверены формально).

Именно,

$$\begin{gathered}(V^* - \widehat{V}_{||})^2 + I(\omega^* - \overline{\omega})^2 - 2(V^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) + (V_1^* - \widehat{V}_{||})^2 \\ +I(\omega_1^* - \overline{\omega})^2 - 2(V_1^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) - (V - \widehat{V}_{||})^2 - I(\omega - \overline{\omega})^2 \\ +2(V, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) - (V_1 - \widehat{V}_{||})^2 - I(\omega_1 - \overline{\omega})^2 + 2(V_1, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) \\ = (V^*)^2 - 2V^*\widehat{V}_{||} + \cancel{\widehat{V}_{||}^2} + I(\omega^*)^2 - 2I(\omega^*, \overline{\omega}) + \cancel{I}\overline{\omega}^2 + (V_1^*)^2 - 2V_1^*\widehat{V}_{||} \\ + \cancel{\widehat{V}_{||}^2} + I(\omega_1^*)^2 - 2I(\omega_1^*, \overline{\omega}) + \cancel{I}\overline{\omega}^2 - V^2 + 2V\widehat{V}_{||} - \cancel{\widehat{V}_{||}^2} - I\omega^2 - \cancel{I}\overline{\omega}^2 \\ +2I(\omega, \overline{\omega}) - V_1^2 + 2V_1\widehat{V}_{||} - \cancel{\widehat{V}_{||}^2} - I\omega_1^2 + 2I(\omega_1, \overline{\omega}) - \cancel{I}\overline{\omega}^2 + 2(V + V_1 \\ -V^* - V_1^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) = (V^*)^2 + I(\omega^*)^2 + (V_1^*)^2 + I(\omega_1^*)^2 \\ -(V^2 + I\omega^2 + V_1^2 + I\omega_1^2) + 2(V + V_1 - V^* - V_1^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) \\ +2I(\omega + \omega_1 - \omega^* - \omega_1^*, \overline{\omega}) = 2I(\omega + \omega_1 - \omega^* - \omega_1^*, \overline{\omega}) = 0.\end{gathered}$$

Из формул (2.6) видно, что:

$$\omega - \omega^* = \omega_1 - \omega_1^*,$$

значит последнее равенство еще упрощается:

$$4I(\omega - \omega^*, \overline{\omega}) = 0.$$

Однако, принимая во внимание, что $\overline{\omega}-$ произвольный вектор из пространства R^3, получаем, что в общем случае это неверно, откуда

$$Q(f, f) \neq 0.$$

Следовательно выражение (2.8) не является решением системы (2.7), что и требовалось доказать. □

3.4. Выводы к разделу

В разделе 3 впервые был найден общий вид локальных максвеллианов для модели Бриана-Пиддака, а также выделены основные частные случаи и приведен их физический смысл. Кроме этого, стоит отметить, что в ходе исследований была обнаружена неточность в ранее предложеном представлении для функции распределения, что подробно проверено в пункте 3.3. данного раздела.

РАЗДЕЛ 4

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БРИАНА-ПИДДАКА

В этом разделе будут построены приближенные решения уравнения Бриана-Пиддака (2.1)–(2.3) в виде бимодального распределения (2.9), а величиной отклонения левой части уравнения от правой будут выступать невязки (2.10), (2.11) или (2.12). В роли максвеллианов M_i, которые входят в бимодальное распределение (2.9), будем брать те или иные частные случаи общего вида (3.19).

4.1. Взаимодействие смерчеобразных потоков для модели Бриана-Пиддака

В этом пункте будут построены приближенные решения уравнения Бриана-Пиддака с максвелловскими модами, описывающими смерчеобразное движение газа. В качестве меры неточности решений используем невязки (2.10), (2.11), и в случае каждой из этих невязок получим свои коэффициентные функции $\varphi_i(t,x)$.

4.1.1. Случай равномерно-интегрального отклонения

В пункте 3.2. кратко было сказано о смерче (потоке газа, описывающем смерчеобразное движение газа), но явно вид не был указан, а лишь как частный случай выражения (3.19).

Построим приближенное решение уравнения Бриана-Пиддака (2.1)–(2.3) в виде (2.9), где $\varphi_i = \varphi_i(t,x)$ – некоторые коэффициентные функции, а максвеллианы M_i имеют следующий вид:

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{\beta_i [\overline{\omega}_i \times (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)]^2} e^{-\beta_i \left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}, \tag{4.1}$$

где у разных потоков гидродинамические параметры различны.

Как известно, для интеграла столкновений (2.3) имеет место представление [9, 13]:

$$Q(f,g) = G(f,g) - fL(g), \tag{4.2}$$

где $G(f,g)$ называется прибыточным членом интеграла столкновений и имеет вид:

$$G(f,g) \\ = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V-V_1,\alpha) f(t,x,V_1^*,\omega_1^*) g(t,x,V^*,\omega^*), \tag{4.3}$$

а $L(g)$ – затратный член вида:

$$L(g) \\ = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V-V_1,\alpha) g(t,x,V_1,\omega_1). \tag{4.4}$$

Сформулируем и докажем лемму, которой будем пользоваться при доказательстве теорем.

Лемма 4.1. Для модели шероховатых сфер интеграл столкновений, проинтегрированый по пространству линейных и угловых скоростей обнуляется, т.е. верно равенство:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega Q\left(M_i, M_j\right) = 0, \quad (i \neq j). \tag{4.5}$$

Доказательство. Подставляя вместо функций f, g глобальные максвеллианы M_2 и M_1 соответственно в формулы (4.3), (4.4), после соответствующей замены переменной можно получить следующее равенство:

$$L(M_1) = \frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\rho_1 \int_{R^3} \left| V - \overline{V}_1 - \frac{w_1}{\sqrt{\beta_1}} \right| e^{-w_1^2} dw_1, \tag{4.6}$$

а если проинтегрировать прибыточный член, то получим:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_i, M_j) \\ = \frac{d^2\rho_1\rho_2}{\pi^2} \int_{R^3}\int_{R^3} du du_1 e^{-u^2-u_1^2} \cdot \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_1}} + \overline{V}_1 - \frac{u_1}{\sqrt{\beta_2}} - \overline{V}_2 \right|, \tag{4.7}$$

что и указано в статье [74].

Для проверки верности утверждения (4.5) в виду представления (4.2) достаточно убедиться, что выполняется следующее равенство:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_i, M_j) = \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega M_i L(M_j). \tag{4.8}$$

Т.о. имеем следующее:

$$\begin{aligned}
&\int_{R^3}\int_{R^3} dV d\omega M_2 L(M_1) \\
&= \int_{R^3}\int_{R^3} dV d\omega \rho_2 I^{3/2} \left(\frac{\beta_2}{\pi}\right)^3 e^{-\beta_2\left(\left(V-\overline{V}_2\right)^2+I\omega^2\right)} \\
&\quad \times \frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\rho_1 \int_{R^3} \left|V-\overline{V}_1-\frac{w_1}{\sqrt{\beta_1}}\right| e^{-w_1^2} dw_1 \\
&= \frac{d^2\rho_1\rho_2}{\sqrt{\pi}} I^{3/2} \left(\frac{\beta_2}{\pi}\right)^3 \int_{R^3} dV \int_{R^3} e^{-\beta_2\left(V-\overline{V}_2\right)^2} \left|V-\overline{V}_1-\frac{w_1}{\sqrt{\beta_1}}\right| e^{-w_1^2} dw_1 \\
&\quad \times \int_{R^3} e^{-\beta_2 I\omega^2} d\omega.
\end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену:

$$\sqrt{\beta_2 I}\omega = s,$$

якобиан которой имеет вид:

$$J = \left(\frac{1}{\beta_2 I}\right)^{3/2},$$

после которой этот интеграл сводится к трехкратному интегралу Эйлера-Пуассона, и получаем:

$$\int_{R^3} e^{-\beta_2 I\omega^2} d\omega = \left(\frac{\pi}{\beta_2 I}\right)^{3/2}. \tag{4.9}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_{R^3}\int_{R^3} dV d\omega M_2 L(M_1) \\
&= \frac{d^2\rho_1\rho_2}{\beta_2^{3/2}\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta_2}{\pi}\right)^3 \pi^{3/2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} e^{-\beta_2\left(V-\overline{V}_2\right)^2-w_1^2} \left|V-\overline{V}_1-\frac{w_1}{\sqrt{\beta_1}}\right| dw_1.
\end{aligned}$$

Сделаем тут еще одну замену переменных:

$$V = \tfrac{u}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_2, \qquad w_1 = u_1, \tag{4.10}$$

якобиан которой таков:

$$J = \frac{1}{\beta_2^{3/2}}.$$

Таким образом, учитывая замену переменных (4.10), получаем:

$$\int_{R^3}\int_{R^3} dV d\omega M_2 L(M_1)$$
$$= \frac{d^2\rho_1\rho_2}{\pi^2}\beta_2^{3/2}\frac{1}{\beta_2^{3/2}}\int_{R^3} du \int_{R^3} du_1 e^{-u^2-u_1^2}\left|\frac{u_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_2 - \overline{V}_1 - \frac{u}{\sqrt{\beta_1}}\right|$$
$$= \frac{d^2\rho_1\rho_2}{\pi^2}\int_{R^3}\int_{R^3} du du_1 e^{-u^2-u_1^2}\left|\frac{u}{\sqrt{\beta_1}} + \overline{V}_1 - \frac{u_1}{\sqrt{\beta_2}} - \overline{V}_2\right|$$
$$= \int_{R^3}\int_{R^3} dV d\omega G(M_1, M_2).$$

Следовательно, утверждение (4.5) доказано. □

Далее сформулируем и подробно докажем несколько теорем относительно приближенных решений (2.9) уравнения Бриана-Пиддака (2.1)–(2.3) с максвелловскими модами (4.1), используя равномерно-интегральную невязку (2.10).

Теорема 4.1. Пусть для функций φ_i имеет место представление:

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{4.11}$$

и для любых $(t, x) \in R^4$ следующие функции ограничены:

$$\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|, \psi_i \left|\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)\right|,$$
$$\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)\right]\right| \tag{4.12}$$

при этом:

$$r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}[\overline{\omega}_i \times (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)]^2, \tag{4.13}$$

$$\overline{x}_{0i} = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i \times (\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i})\right]. \tag{4.14}$$

Также пусть

$$\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i}\beta_i^{-m_i}, \tag{4.15}$$

где $m_i \geq \frac{1}{2}$, а $\overline{\omega}_{0i}$ – произвольный фиксированный вектор из R^3.

Тогда существует такая величина $\Delta^{'}$, что:

$$\Delta \leq \Delta^{'}, \tag{4.16}$$

причем:

1) если

$$m_i > \frac{1}{2}, \tag{4.17}$$

то выполняется неравенство:

$$\begin{gathered}\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta^{'} \\ \leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| \\ +4\pi d^2 \rho_1 \rho_2 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1 \psi_2).\end{gathered} \tag{4.18}$$

2) если

$$m_i = \frac{1}{2}, \tag{4.19}$$

то вместо неравенства (4.18) будем иметь:

$$\begin{gathered}\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta^{'} \\ \leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| \\ +4\pi d^2 \rho_1 \rho_2 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1 \psi_2) \\ +\frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left| \overline{\omega}_{0i} \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right| \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_i.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Доказательство. Для получения неравенства (4.16) сначала оценим модуль разности левой и правой частей уравнения (2.1), имея их представления (2.2) и (2.3), подставляя в них исследуемую функцию (2.9). При вычислении оператора $D(f)$ воспользуемся тем, что M_i представляют собой точные решения уравнения Бриана-Пиддака.

Итак, левая часть уравнения (2.1) примет вид:

$$\begin{aligned} &D(f) \\ &= M_1 D(\varphi_1) + \varphi_1 D(M_1) + M_2 D(\varphi_2) + \varphi_2 D(M_2) \\ &= M_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + M_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \end{aligned} \tag{4.21}$$

а интеграл столкновений преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &Q(f,f) \\ &= \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \\ &\Big[(\varphi_1 M_1(V_1^*, \omega_1^*) \ + \varphi_2 M_2(V_1^*, \omega_1^*)) \cdot (\varphi_1 M_1(V^*, \omega^*) + \varphi_2 M_2(V^*, \omega^*)) - \\ &(\varphi_1 M_1(V_1, \omega_1) + \ \varphi_2 M_2(V_1, \omega_1)) \cdot (\varphi_1 M_1(V, \omega) + \varphi_2 M_2(V, \omega)) \Big] \\ &= \frac{d^2}{2} \varphi_1 \varphi_2 \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \Big[M_1(V_1^*, \omega_1^*) M_2(V^*, \omega^*) \\ &+ M_2(V_1^*, \omega_1^*) M_1(V^*, \omega^*) - M_1(V_1, \omega_1) M_2(V, \omega) - M_2(V_1, \omega_1) M_1(V, \omega) \Big], \end{aligned}$$

т.е. для бимодального распределения f (2.9) интеграл столкновений $Q(f,f)$ может быть представлен следующим соотношением:

$$Q(f,f) = \varphi_1 \varphi_2 \Big(Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1) \Big). \tag{4.22}$$

Для удобства дальнейших вычислений максвеллианы преобразуем к виду:

$$M_i = e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \widetilde{M_i}. \tag{4.23}$$

Теперь, имея вид выражений (2.2), (2.3) для функции (2.9) и обозначение (4.23), а также представление для интеграла столкновений (4.2) продолжим ранее начатую оценку:

$$
\begin{gathered}
|D(f)-Q(f,f)| \\
=\left|\sum_{i=1}^{2} D(\varphi_i)e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\widetilde{M_i}-\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\left(Q\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right)+Q\left(\widetilde{M_2},\widetilde{M_1}\right)\right)\right| \\
=\left|\sum_{i=1}^{2} D(\varphi_i)e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\widetilde{M_i}-\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\left(G\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right)-\widetilde{M_1}L\left(\widetilde{M_2}\right)\right.\right. \\
\left.\left.+G\left(\widetilde{M_2},\widetilde{M_1}\right)-\widetilde{M_2}L\left(\widetilde{M_1}\right)\right)\right| \\
\le\left|\sum_{i=1}^{2} D(\varphi_i)e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\widetilde{M_i}+\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\left(\widetilde{M_1}L\left(\widetilde{M_2}\right)+\widetilde{M_2}L\left(\widetilde{M_1}\right)\right)\right| \\
+\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\left(G\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right)+G\left(\widetilde{M_2},\widetilde{M_1}\right)\right).
\end{gathered}
$$

Проинтегрируем полученную оценку по всему пространству линейных и угловых скоростей, и воспользуемся равенством (4.8)

$$
\begin{gathered}
\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega\,|D(f)-Q(f,f)| \\
\le\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{2}\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega\left|D(\varphi_i)e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}+\varphi_i\varphi_j e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}L(M_j)\right|M_i \\
+\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega\Big(G\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right)+G\left(\widetilde{M_2},\widetilde{M_1}\right)\Big) \\
=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{2}\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega\left|D(\varphi_i)+\varphi_i\varphi_j e^{\beta_j\overline{\omega}_j^2 r_j^2}L(M_j)\right|e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}M_i \\
+2\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega G\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right) \\
\le\sum_{i=1}^{2}\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega|D(\varphi_i)|e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\widetilde{M_i}+4\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2} \\
\times\int_{R^3} dV\int_{R^3} d\omega G\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right)=\sum_{i=1}^{2}\rho_i\left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2}e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\int_{R^3} dV\,|D(\varphi_i)| \\
\times e^{-\beta_i(V-\overline{V}_i)^2}+4\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1\overline{\omega}_1^2 r_1^2+\beta_2\overline{\omega}_2^2 r_2^2}\int_{R^3}\int_{R^3} dV\,d\omega G\left(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}\right).
\end{gathered}
$$

Вычислим $D(\varphi_i)$, учитывая условие (4.11):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} + \psi_i e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{\partial}{\partial t}\Big(- \beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 \Big). \tag{4.24}$$

Из выражения (4.1) и, принимая во внимание, что:

$$\overline{\omega}_i \perp \overline{u}_{0i}, \tag{4.25}$$

получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\Big(- \beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 \Big) \\ &= -\beta_i \frac{\partial}{\partial t}\Big([\overline{\omega}_i \times (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)]^2 \Big) \\ &= 2\beta_i \Big([\overline{\omega}_i \times (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)] \times \overline{\omega}_i, \overline{u}_{0i} \Big) \\ &= 2\beta_i \left(x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t, \overline{u}_{0i} \right) \overline{\omega}_i^2 - 2\beta_i (\overline{\omega}_i, \overline{u}_{0i})(\overline{\omega}_i, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t) \\ &= 2\beta_i (x, \overline{u}_{0i}) \overline{\omega}_i^2 - 2\beta_i \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t - 2\beta_i \left(\overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right), \overline{u}_{0i} \right) \\ &= 2\beta_i \overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - 2\beta_i \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t - 2\beta_i \left(\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i} \right). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Далее найдем слагаемое $\left(V, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)$, зная условие (4.25) и принимая во внимание, что:

$$\overline{\omega}_i \perp \left[\overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right],$$

имеем:

$$\begin{aligned} &\left(V, \frac{\partial}{\partial x}\Big(- \beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 \Big) \right) \\ &= -2\beta_i \Big(V, [\overline{\omega}_i \times (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)] \times \overline{\omega}_i \Big) \\ &= -2\beta_i \left(V, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t \right) \overline{\omega}_i^2 + 2\beta_i (V, \overline{\omega}_i)(\overline{\omega}_i, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t) \\ &= -2\beta_i \left(V, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t \right) \overline{\omega}_i^2 + 2\beta_i (V, \overline{\omega}_i)(\overline{\omega}_i, x). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Подставим полученные результаты в имеющуюся оценку:

$$\begin{aligned} &\int_{R^3} \int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)| \, dV d\omega \\ &\leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \int_{R^3} |D(\varphi_i)| \, e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2} dV \\ &+ 4\varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \int_{R^3} \int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2 \right) dV d\omega \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \int_{R^3} \Big| D(\varphi_i) + 2\beta_i \psi_i \Big(\overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t$$

$$- \left(\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}\right) - (V, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)\, \overline{\omega}_i^2 + (V, \overline{\omega}_i)(\overline{\omega}_i, x) \Big) \Big| \, e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2} dV$$

$$+4\psi_1 \psi_2 \int_{R^3} \int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\right) dV d\omega$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \int_{R^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \Big(\overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t \right.$$

$$- \left(\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}\right) - \Big(V, x - \overline{u}_{0i} t\Big) \overline{\omega}_i^2 + \Big(V, \overline{\omega}_i \times \Big(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\Big)\Big)$$

$$\left. + (V, \overline{\omega}_i)(\overline{\omega}_i, x) \Big) \right| e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2} dV + 4\psi_1 \psi_2 \int_{R^3} \int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\right) dV d\omega.$$

Теперь сделаем замену переменных в интеграле, входящем в последнюю сумму:

$$V = \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i,$$

якобиан которой, очевидно, составляет:

$$J = \beta_i^{-3/2}.$$

Итак, получаем:

$$\int_{R^3} \int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)| \, dV d\omega$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right.$$

$$+2\beta_i \psi_i \left(\overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t - \left(\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i} \right) \right.$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i, x - \overline{u}_{0i} t \right) \overline{\omega}_i^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i, \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) \right) \Bigg| \, e^{-p^2} dp + 4\psi_1 \psi_2 \int_{R^3} \int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\right) dV d\omega$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \Big(\overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t \right.$$

$$- \left(\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \widehat{V}_i, x - \overline{u}_{0i} t \right) \overline{\omega}_i^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}\right) + \left(\overline{\omega}_i \times x, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\right)\right) - \left(\overline{\omega}_i \times \overline{u}_{0i}, \overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i\right) t \\
&+ \overline{\omega}_i^2 \overline{u}_{0i}^2 t + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i, \overline{\omega}_i\right) (\overline{\omega}_i, x)\Bigg)\Bigg| e^{-p^2} dp \\
&+4\psi_1\psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\right) dV\, d\omega.
\end{aligned}
$$

Для дальнейших преобразований используем следующую формулу из векторной алгебры, справедливую для четырех произвольных векторов a, b, c, d из R^3:

$$
\Big([a, b], [c, d]\Big) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c). \tag{4.28}
$$

Тогда:

$$
\begin{aligned}
&\int_{R^3}\int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)|\, dV\, d\omega \\
&\le \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} \Bigg| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i\right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\
&+2\beta_i\psi_i \Bigg(\overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, x - \overline{u}_{0i} t\right) \overline{\omega}_i^2 \\
&-\overline{\omega}_i^2 \left(\widehat{V}_i, x - \overline{u}_{0i} t\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\right)\right) + \overline{\omega}_i^2 \left(x, \widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\right) \\
&- \left(\overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\right)\right) (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 \left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i\right) t + \left(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i\right) (\overline{\omega}_i, \overline{u}_{0i}) t \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i\right) (\overline{\omega}_i, x) + \left(\widehat{V}_i, \overline{\omega}_i\right) (\overline{\omega}_i, x)\Bigg)\Bigg| e^{-p^2} dp \\
&+4\psi_1\psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\right) dV\, d\omega \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} \Bigg| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i\right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\
&+2\beta_i\psi_i \Bigg(- \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, x - \overline{u}_{0i} t\right) \overline{\omega}_i^2 \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i\right) (\overline{\omega}_i, x)\Bigg)\Bigg| e^{-p^2} dp \\
&+4\psi_1\psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2\right) dV\, d\omega.
\end{aligned}
$$

Теперь, воспользовавшись предположением (4.15), имеем:

$$\int_{R^3}\int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dV d\omega$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right.$$

$$+ 2\beta_i \psi_i \left(- \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, x - \overline{u}_{0i} t \right) \beta^{-2m_i} \overline{\omega}_{0i}^2 \right.$$

$$\left. \left. + \beta^{-m_i} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right) + \beta^{-2m_i} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) \right) \right| e^{-p^2} dp$$

$$+ 4\psi_1 \psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2 \right) dV d\omega.$$

В последнем неравенстве возьмем супремум от обеих частей, а затем сделаем оценку (4.16):

$$\Delta$$

$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3}\int_{R^3} dv d\omega |D(f) - Q(f,f)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right.$$

$$+ 2\beta_i \psi_i \left(- \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, x - \overline{u}_{0i} t \right) \beta^{-2m_i} \overline{\omega}_{0i}^2 \right.$$

$$\left. \left. + \beta^{-m_i} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right) + \beta^{-2m_i} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p, \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) \right) \right| e^{-p^2} dp$$

$$+ 4 \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_1 \psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2 \right) dV d\omega.$$

Воспользовавшись доказанным в приложении к статье [74] равенством, имеем, что:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \psi_1 \psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} G\left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2 \right) dV d\omega$$

$$= \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_1 \psi_2 \int_{R^3}\int_{R^3} du du_1 e^{-u^2 - u_1^2} \left| \frac{u}{\beta_1} + \overline{V}_1 - \frac{u_1}{\beta_2} - \overline{V}_2 \right|.$$

Теперь необходимо сделать предельный переход в полученой оценке, для обоснования возможности которого воспользуемся доказанной в статье [74] леммой, причем рассмотрим поочередно два случая (4.17) и (4.19).

1) итак, если выполнено неравенство (4.17), то:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta^{'}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_i}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|e^{-p^2}dp$$

$$+4\pi d^2\rho_1\rho_2\left|\widehat{V}_1-\widehat{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\rho_i\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|+4\pi d^2\rho_1\rho_2\left|\widehat{V}_1-\widehat{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2.$$

и, таким образом, неравенство (4.18) выполняется.

2) если имеет место равенство (4.19), то получаем:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta^{'}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_i}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\psi_i\left(p,\overline{\omega}_{0i}\times\left(\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i}\right)\right)\right|e^{-p^2}dp$$

$$+4\pi d^2\rho_1\rho_2\left|\widehat{V}_1-\widehat{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\rho_i\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|+4\pi d^2\rho_1\rho_2\left|\widehat{V}_1-\widehat{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2$$

$$+2\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_i}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}\left|\left(p,\overline{\omega}_{0i}\times\left(\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i}\right)\right)\right|e^{-p^2}dp\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_i$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2}\rho_i\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|+4\pi d^2\rho_1\rho_2\left|\widehat{V}_1-\widehat{V}_2\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2$$

$$+\int_{R^3}|p|e^{-p^2}dp\cdot 2\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_i}{\pi^{3/2}}\left|\left(\overline{\omega}_{0i}\times\left(\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i}\right)\right)\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_i.$$

Последний интеграл можно легко вычислить, переходя к сферической системе координат:

$$\int_{R^3}|p|e^{-p^2}dp=2\pi.$$

Значит, в случае (4.19) справедливо следующее неравенство:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta^{'}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| + 4\pi d^2 \rho_1 \rho_2$$

$$\times \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1 \psi_2) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left| \overline{\omega}_{0i} \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right| \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_i,$$

что и доказывает верность оценки (4.20). □

Теорема 4.2. Пусть остается в силе представление (4.15), но вместо (4.11) предположим, что:

$$\left[\overline{\omega}_{0i} \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right] = 0, \tag{4.29}$$

а также ограничены следующие функции:

$$\varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \quad \varphi_i \left| \overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t) \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2},$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \left[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t) \right] \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}. \tag{4.30}$$

Тогда, как и в первой теореме, имеет место оценка (4.16), при этом:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta'$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \mu_i(t,x) + \right.$$

$$\left. + \varphi_1 \varphi_2 \mu_1(t,x) \mu_2(t,x) \pi d^2 \rho_j \left| \widehat{V}_i - \widehat{V}_j \right| \right| +$$

$$+ 2\rho_1 \rho_2 \pi d^2 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} \left[\mu_1(t,x) \mu_2(t,x) \varphi_1 \varphi_2 \right], \tag{4.31}$$

где:

1) $\mu_i(t,x) = exp\left\{ \left[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t) \right]^2 \right\}$, если $m_i = \frac{1}{2}$;

2) $\mu_i(t,x) = 1,$ если $m_i > \frac{1}{2}$.

Доказательство. Как показано при доказательстве Теоремы 4.1:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \, |D(f) - Q(f,f)|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \cdot \int_{R^3} dV \, |D(\varphi_i)| \, e^{-\beta_i \left(V - \widehat{V}_i\right)^2}$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \int_{R^3} \int_{R^3} dV d\omega G\left(\widetilde{M}_1; \widetilde{M}_2\right).$$

Теперь сделаем такую же замену переменных, как и при доказательстве предыдущей теоремы, в интеграле первых двух слагаемых и продолжим ранее начатую оценку:

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{1}{\beta_i^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \widehat{V}_i\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \int_{R^3} \int_{R^3} dV d\omega G\left(\widetilde{M}_1; \widetilde{M}_2\right),$$

вспоминая обозначение (4.13) и учитывая условие теоремы (4.29), получаем что:

$$\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2 = \beta_i \left[\overline{\omega}_i \times (x - \overline{u}_{0i} t)\right]^2.$$

Благодаря наложенным условиям об ограниченности функций(4.30) можем перейти к супремуму. Таким образом, имеем:

$$\Delta$$
$$\leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \frac{1}{\pi^{3/2}} \sup_{(t,x)\in R^4} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \widehat{V}_i\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$
$$+4 \sup_{(t,x)\in R^4} \left(\varphi_1\varphi_2 e^{\beta_1 [\overline{\omega}_1 \times (x - \overline{u}_{01} t)]^2} e^{\beta_2 [\overline{\omega}_2 \times (x - \overline{u}_{02} t)]^2}\right)$$
$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} \int_{R^3} dV d\omega G\left(\widetilde{M}_1; \widetilde{M}_2\right).$$

Вновь воспользовавшись приложением к статье [74] и вспоминая условие (4.15), получаем:

$$\Delta$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \rho_i \pi^{-3/2} \sup_{(t,x)\in R^4} e^{\beta_i^{1-2m_i}[\overline{\omega}_{0i}\times(x-\overline{u}_{0i}t)]^2}$$

$$\times \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_i}} p + \widehat{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$

$$+4 \sup_{(t,x)\in R^4} \left(\varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1^{1-2m_1}[\overline{\omega}_{01}\times(x-\overline{u}_{01}t)]^2 + \beta_2^{1-2m_2}[\overline{\omega}_{02}\times(x-\overline{u}_{02}t)]^2} \right)$$

$$\times \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} \int_{R^3} du du_1 e^{-u^2-u_1^2} \left| \frac{u}{\beta_1} + \widehat{V}_1 - \frac{u_1}{\beta_2} - \widehat{V}_2 \right|.$$

Осуществив предельный переход под знаком неравенства, когда $\beta_i \to +\infty$, получаем:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x)\in R^4} \rho_i \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|$$

$$\times \lim_{\beta_i \to +\infty} e^{\beta_i^{1-2m_i}[\overline{\omega}_{0i}\times(x-\overline{u}_{0i}t)]^2} + 4 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \pi^3$$

$$\times \lim_{\beta_i \to +\infty} \sup_{(t,x)\in R^4} \left(\varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1^{1-2m_1}[\overline{\omega}_{01}\times(x-\overline{u}_{01}t)]^2} \; e^{\beta_2^{1-2m_2}[\overline{\omega}_{02}\times(x-\overline{u}_{02}t)]^2} \right).$$

В случае $m_i = \frac{1}{2}$ в точности имеем (4.31), где:

$$\mu_i(t,x) = exp \left\{ [\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)]^2 \right\},$$

а если $m_i > \frac{1}{2}$, то получаем это же самое выражение при

$$\mu_i(t,x) = 1,$$

что и доказывает утверждение Теоремы 4.2. □

Доказаные теоремы позволяют сформулировать в виде следствий из них условия, достаточные для бесконечной малости невязки (2.10).

Следствие 4.1. Пусть выполнены условия Теоремы 4.1. В случае (4.17) предположим, что; $\psi_i = C_i \left(x - \widehat{V}_i t \right) -$ произвольные неотрицательные непрерывно-дифференцируемые функции и $\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2$. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \beta_0 : \quad \forall \beta_i > \beta_0, \quad \Delta < \varepsilon. \tag{4.32}$$

При выполнении равенства (4.19) для справедливости утверждения (4.32) необходимо также наложить условие (4.29).

Справедливость этого следствия очевидным образом вытекает из неравенств (4.18), (4.20), учитывая, что функции ψ_i обращают в нуль первое слагаемое, а дополнительные условия относительно скоростей $\widehat{V}_i, \overline{\omega}_{0i}$ и $\overline{u}_{0i}$ обнуляют оставшиеся слагаемые.

Следствие 4.2. Если выполнены условия Теоремы 4.2 (функции φ_i в точности совпадают с функциями ψ_i из Следствия 4.1) и также остается верным равенство $\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2$, то по-прежнему выполняется утверждение (4.32).

Доказательство этого следствия следует из равенства (4.31), где первое слагаемое обнулится из-за вида функции φ_i, а второе и третье – ввиду условия совпадения скоростей $\widehat{V}_i$.

Замечание 4.1. Таким образом, при достаточно низких температурах потоков и замедлении их вращения, а также при совпадении линейных скоростей бимодальное распределение (2.9) удовлетворяет уравнению Больцмана со сколь угодно высокой степенью точности (в смысле минимизации невязки (2.10)).

4.1.2. Чисто-интегральное отклонение

По-прежнему будем рассматривать бимодальное распределение (2.9), где искомые функции $\varphi_i = \varphi_i(t, x)$. Максвеллианы M_i также описывают смерчеобразное движение, только несколько преобразуем их вид:

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i\left(\left(V-\overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}, \tag{4.33}$$

где плотность газа такова:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{4.34}$$

множитель r_i^2 имеет все то же представление (4.13).

Далее будут приведены теоремы относительно приближенных решений типа (2.9) с максвелловскими модами (4.33), но за отклонение между частями уравнения (2.1) возьмём теперь чисто-интегральную невязку (2.11).

Теорема 4.3. Пусть выполняются условия (4.15) с такими же значениями коэффициента m_i как и в Теореме 4.1 и условие (4.29) Теоремы 4.2.

Пусть функции φ_i в распределении (2.9) не зависят от β_i и такие, что выражения:

$$\varphi_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}; \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right| e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}; \quad \varphi_i \Big| [\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)] \Big| e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2};$$
$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \Big[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t) \Big] \right| e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \tag{4.35}$$

принадлежат пространству $L_1(R^4)$ при всех положительных β_i.

Тогда существует такая величина Δ_1', что выполняется неравенство:

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1', \tag{4.36}$$

причем:

1) Если верно (4.19), то:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \mu_i(t,x)$$
$$+4d^2 \rho_{01} \rho_{02} \pi \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \varphi_1 \varphi_2 \mu_1(t,x) \mu_2(t,x), \tag{4.37}$$

где

$$\mu_i(t,x) = exp\{[\overline{\omega}_{0i} \times (x - u_{0i} t)]^2\}; \tag{4.38}$$

2) В случае (4.17) выполняется (4.37) при:

$$\mu_i(t,x) = 1. \tag{4.39}$$

Доказательство. Воспользумся полученными представлениями для левой $D(f)$ и правой части $Q(f,f)$ при доказательстве Теоремы 4.1 выражениями (4.21), (4.22) для оценки модуля разности частей уравнения (2.1):

$$
\begin{gathered}
|D(f) - Q(f,f)| \\
= |M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2) - \varphi_1\varphi_2 \left(Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1)\right) \\
= |M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2) - \varphi_1\varphi_2 \left[G(M_1, M_2) - M_1 L(M_2)\right. \\
\left. + G(M_2, M_1) - M_2 L(M_1)\right]| \\
\leqslant M_1 |D(\varphi_1)| + M_2 |D(\varphi_2)| \\
+ \varphi_1\varphi_2 \left(G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1) + M_1 L(M_2) + M_2 L(M_1)\right),
\end{gathered}
$$

т.е. в итоге получаем:

$$
\begin{gathered}
|D(f) - Q(f,f)| \\
\leqslant M_1(|D(\varphi_1)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_2)) + M_2(|D(\varphi_2)| + \varphi_1\varphi_2 L(M_1)) \\
+ \varphi_1\varphi_2 (G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1)).
\end{gathered}
\tag{4.40}
$$

Далее проинтегрируем найденную оценку (4.40) по всему пространству линейных и угловых скоростей:

$$
\begin{gathered}
\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)| \\
\leqslant \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega M_i (|D(\varphi_i)| + \varphi_i\varphi_j L(M_j)) \\
+ 2\varphi_1\varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2) \\
= \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(\varphi_i)| M_i + 4\varphi_1\varphi_2 \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega G(M_1, M_2).
\end{gathered}
\tag{4.41}
$$

Применяя формулу (4.7) и выражение для максвеллиана (4.33), а также представление (2.2), имеем:

$$
\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left((V - \overline{V}_i)^2 + I\omega^2 \right)}
$$

$$
+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \qquad (4.42)
$$

Используя вычисленный интеграл (4.9) только с заменой параметра β_2 на β_i продолжим ранее полученную оценку (4.42):

$$
\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2}
$$

$$
+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|,
$$

а, делая замену переменных

$$
\beta_i (V - \overline{V}_i)^2 = p^2,
$$

получаем следующее неравенство:

$$
\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \cdot \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-p^2}
$$

$$
+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.
$$

Теперь подставляя выражение для плотности газа ρ_i из формулы (4.34), имеем:

$$
\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)|
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}}{\pi^{3/2}} e^{-p^2}
$$

$$
+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_{01} \rho_{02} e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2}}{\pi^2}
$$

$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Благодаря условию ограниченности (4.35) и, принимая во внимание вид массовой скорости газа (3.20) можно проинтегрировать последнее неравенство по пространственной координате x, а далее – по времени t. Будем иметь следующую оценку для величины Δ_1 :

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \\ &\leqslant \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} \\ &+ \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx 4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_{01}\rho_{02} e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2}}{\pi^2} \\ &\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Теперь, вспоминая выражения для r_i^2 и $\overline{x}_{0i}$, представленные в формулах (4.13), (4.14) и, учитывая условия (4.15), (4.29) получаем следующее представление для оценки величины Δ_1 :

$$\begin{aligned} &\Delta_1 \\ &\leqslant \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \\ &\times \frac{\rho_{0i} e^{\beta_i \left[\overline{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)\right]^2} e^{-p^2}}{\pi^{3/2}} \\ &+ \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \frac{4\varphi_1\varphi_2 d^2 \rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2} e^{\beta_1 \left[\overline{\omega}_{01} \beta_1^{-m_1} \times (x - \overline{u}_{01} t)\right]^2 + \beta_2 \left[\overline{\omega}_{02} \beta_2^{-m_2} \times (x - \overline{u}_{02} t)\right]^2} \\ &\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Таким образом, мы видим, что:

$$e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} = e^{\beta_i^{1-2m_i} [\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)]^2},$$

следовательно, справедливо равенство:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} = \left[\begin{array}{ll} e^{[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)]^2}, & m_i = \frac{1}{2}; \\ 1, & m_i > \frac{1}{2}. \end{array} \right. = \mu_i(t, x). \tag{4.45}$$

Выполним предельный переход в неравенстве (4.44) при $\beta_i \to +\infty$, а в правой части того же неравенства сделаем переход к пределу под знаком интеграла. Это возможно ввиду предположения (4.35) и равномерной относительно β_i сходимости всех, входящих в неравенство (4.44), интегралов на произвольной окрестности, благодаря присутствию быстроубывающих по переменным q и q_1 экспонент. Таким образом, получаем:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta_1^{'}$$

$$= \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_{0i} \mu_i(t,x)}{\pi^{3/2}} e^{-p^2}$$

$$+4 \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \frac{\varphi_1 \varphi_2 d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \mu_1(t,x) \mu_2(t,x) \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| e^{-q^2 - q_1^2}.$$

Вычисляя теперь в последнем равенстве интегралы по переменным p, q и q_1, находим:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta_1^{'}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \mu_i(t,x) +$$

$$+4d^2 \rho_{01} \rho_{02} \pi \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \varphi_1 \varphi_2 \mu_1(t,x) \mu_2(t,x).$$

Таким образом, было показано, что в случае (4.19) получаем результаты (4.37), (4.38), а когда рассматривается вариант (4.17), то снова имеет место равенство (4.37) при (4.39). Теорема доказана. □

Прежде, чем сформулировать достаточные условия для минимизации чисто-интегральной невязки (2.11) приведем несколько определений, которые нам понадобятся в будущем.

Определение 4.1. Будем рассматривать области $G \subset R^n$ такие, что число компонент связности пересечения этой области с любой прямой параллельной любой из координатных осей, конечно.

Определение 4.2. Через $G_\delta(\delta > 0)$ обозначим $\delta-$окрестность области G, где "$\delta-$окрестность множества" ("$\delta-$раздутие" $-$ по Иванову)– это множество всех точек, расстояние которых до множества G меньше $\delta.$

Определение 4.3. В случае $n = 4$: обозначим через G_x-проекцию области G на гиперплоскость $t = 0,$ а через $G_k,$ $(k = 1, 2, 3)$ – проекцию той же области G на гиперплоскость $x^k = 0.$

Теперь, используя определения 4.1, 4.2, сформулируем важное для дальнейшего определение.

Определение 4.4. Пусть область $G \subset R^n, \delta > 0.$ Тогда $\delta-$плато над областью G называется непрерывно-дифференцируемая функция $\varphi_\delta(G, t, x),$ определяемая следующим образом:

$$\varphi_\delta(G,t,x) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in G, \\ 0, & (t,x)\overline{\in} G_\delta, \\ 0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1, & (t,x) \in G_\delta \backslash G, \end{cases} \tag{4.46}$$

которая, кроме того, на любой прямой параллельной какой-нибудь из координатных осей, имеет не более конечного числа строгих экстремумов.

Теперь, пользуясь определением 4.4 приведем достаточное условие для минимизации невязки Δ_1.

Следствие 4.3. Пусть выполняются условия (4.15), (4.29), а также

$$m_i \geqslant \frac{1}{2}, \tag{4.47}$$

а функции $\varphi_i, i = 1, 2$ имеют вид финитных "плато" [73] таких, что:

$$V\left[(supp\varphi_i)_{G_x}\right] \to 0, \tag{4.48}$$

$$\widehat{V}_i^k \cdot V\left[(supp\varphi_i)_{G_k}\right] \to 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{4.49}$$

где, как ранее было указано в определении 4.3 под G_x и $G_k, k = 1, 2, 3$ понимаются проекции множества $G \subset R^4$ на гиперплоскости $t = 0$ и

$x^k = 0,\ k = 1,2,3$ соответственно, а под $V-$ объем указанных проекций. Пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из требований:

$$\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2, \tag{4.50}$$

$$supp\varphi_1 \cap supp\varphi_2 = \emptyset, \tag{4.51}$$

$$d \to 0. \tag{4.52}$$

Тогда:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta_1 = 0. \tag{4.53}$$

Доказательство. Условие (4.35) выполняется благодаря финитности функций φ_i, а, учитывая, что условия (4.15), (4.29) тоже накладываются, видим, что соотношения (4.37) справедливо с функциями $\mu_i(t,x)$ вида (4.38) или (4.39), при этом в обоих случаях все интегралы, которые входят в (4.37) сходятся благодаря указанной финитности. Далее, учитывая выполнение условий (4.48), (4.49), как показано в [73], можно убедиться, что интегралы от выражений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$$

стремяться к нулю. Легко видить, что последнее слагаемое в равенстве (4.37) тоже становится бесконечно малым благодаря наличию хотя бы одного из условий (4.50), (4.51) или (4.52). Таким образом утверждение (4.53) выполняется. □

Теорема 4.4. Пусть снова выполняется условие (4.15) Теоремы 4.1, а также имеет место разложение (4.11), при этом функции (4.12) принадлежат пространству $L_1(R^4)$.

Тогда имеет место оценка (4.36), при этом в случае (4.19) выполняется соотношение (4.37) с добавлением к правой части еще одного слагаемого вида:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left| \left[\overline{\omega}_{0i} \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i} \right) \right] \right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_i, \tag{4.54}$$

при этом функции (4.38) сохраняются, а во втором случае (4.17) соотношение (4.37) остается верным без изменений с функциями (4.39).

Доказательство. Будем опираться на оценку (4.43), полученую при доказательстве Теоремы 4.3. Для вычисления производных функции φ_i воспользуемся ранее приведеными выкладками (4.24), (4.26) и (4.27), таким образом имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left\{ \overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t - (\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}) \right\} \right), \tag{4.55}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \left\{ \overline{\omega}_i (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t \right\} \right). \tag{4.56}$$

Далее подставляем производные (4.55) и (4.56) в подинтегральную функцию в неравенстве (4.43):

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \\ &= \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \left\{ \overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t - (\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}) \right. \right. \\ &\quad + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i \times (x - \overline{u}_{0i} t)], \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) \\ &\quad \left. \left. - \overline{\omega}_i^2 \left(x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t, \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i \times (x - \overline{u}_{0i} t)] \right) \right\} \right|. \end{aligned}$$

Используя свойства скалярного, векторного и смешанного произведений, получаем следующее:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i \psi_i \left\{ \overline{\omega}_i^2 (x, \overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2 \overline{\omega}_i^2 t - (\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}) \right. \right. \\ &\quad + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i, \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t \right) \\ &\quad \left. \left. - \overline{\omega}_i^2 \left([\overline{\omega}_i \times (x - \overline{u}_{0i} t)], x - \overline{u}_{0i} t - \frac{1}{\overline{\omega}_i^2} \left[\overline{\omega}_i \times (\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}) \right] \right) \right\} \right|. \end{aligned}$$

Далее используем формулу (4.28) приведенную в Теореме 4.1, тогда получим:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\beta_i\psi_i\left\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i})-\overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t-(\overline{\omega}_i\times\widehat{V}_i,\overline{u}_{0i})\right.\right.$$
$$+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i,\overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i,x)-\overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i,x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t\right)$$
$$\left.\left.+\overline{\omega}_i^2(x-\overline{u}_{0i}t,\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i})-(\overline{\omega}_i,\widehat{V}_i)(\overline{\omega}_i,x)\right\}\right|,$$

и снова применяя свойства скалярного произведения, имеем:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\beta_i\psi_i\left\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i})-\overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t-(\overline{\omega}_i\times\widehat{V}_i,\overline{u}_{0i})\right.\right.$$
$$+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}},\overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i,x)-\overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}},x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t\right)$$
$$-\overline{\omega}_i^2\left(\widehat{V}_i,x-\overline{u}_{0i}t\right)-\frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i\times(\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i})\right]+\overline{\omega}_i^2\left(x,\widehat{V}_i\right)-\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i})$$
$$\left.\left.-\,\overline{\omega}_i^2 t\left(\overline{u}_{0i},\widehat{V}_i\right)+\overline{\omega}_i^2\overline{u}_{0i}^2 t\right\}\right|.$$

После упрощений будем иметь:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\beta_i\psi_i\left\{(\widehat{V}_i,\overline{\omega}_i\times\overline{u}_{0i})+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}},\overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i,x)\right.\right.$$
$$-\overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}},x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t\right)-\overline{\omega}_i^2\left(\widehat{V}_i,x\right)+\overline{\omega}_i^2 t\left(\widehat{V}_i,\overline{u}_{0i}\right)$$
$$\left.\left.-\,(\widehat{V}_i,\overline{\omega}_i\times\overline{u}_{0i})+\overline{\omega}_i^2\left(x,\widehat{V}_i\right)-\overline{\omega}_i^2 t\left(\overline{u}_{0i},\widehat{V}_i\right)\right\}\right|,$$

то есть:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\,2\beta_i\psi_i\left\{\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}},\overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i,x)-\overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}},x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t\right)\right\}\right|. \tag{4.57}$$

Далее возвращаясь к неравенству (4.43) и делая подстановку функции φ и её производных, т.е. выражения (4.11), (4.55), (4.56), учитывая полученое представление для части подинтегральной функции в первом слагаемом правой части неравенства можно получить следующую оценку:

$$\Delta_1$$

$$\leqslant \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right.$$

$$\left. + 2\beta_i \psi_i \left\{ \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t \right) \right\} \right| \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} e^{-p^2}$$

$$+4 \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_1 \psi_2 \frac{d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Значит, мы получили следующее представление для величины $\Delta_1^{'}$:

$$\Delta_1^{'}$$

$$= \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{\beta_i} \psi_i \left\{ (p, \overline{\omega}_i)(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 (p, x - \overline{u}_{0i} t) + (p, \overline{\omega}_i, \widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}) \right\} \right| \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} e^{-p^2}$$

$$+ \frac{4 d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_1 \psi_2 \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Далее, выполняя предельный переход в последнем равенстве, обоснованность возможности которого аналогична тому, что представлена в Теореме (4.3), и вспоминая условие (4.45), мы получаем необходимое утверждение. Теорема доказана. □

Следствие 4.4. Пусть выполнены все условия Теоремы 4.4, причем функции ψ_i удовлетворяют тем же требованиям, которые накладываются на функции φ_i в следствии 4.3. Тогда, если справедливо (4.17), или (4.19) вместе с (4.29), то при выполнении хотя бы одного из требований (4.50) – (4.52) имеет место равенство (4.53).

Доказательство. Утверждение этого следствия проверяется по той же схеме, что и доказательство Следствия 4.3, с заменой функций φ_i на ψ_i, с тем только отличием, что теперь, как видим из утверждения Теоремы

4.4 верно или (4.38) или (4.39), а дополнительный член вида (4.54), который возникает в предположении (4.19), автоматически обнуляется благодаря требованию самосогласованности смерчей (4.29). □

4.2. Взаимодействие потоков, описывающих движение типа "ускорение-уплотнение" для модели шероховатых сфер

В данном пункте будут приведены несколько теорем, предоставляющих конкретный вид явных приближенных решений уравнения Бриана-Пиддака, полученных в виде бимодального распределения (2.9) с максвелловскими модами, описывающими ускоряющееся-уплотняющееся движение газа. Будут приведены условия на вид функций $\varphi_i(t,x)$, достаточные для бесконечной малости невязок (2.10) и (2.12).

4.2.1. Случай равномерно-интегральной невязки

Как и прежде приближенное решение строим в виде бимодального распределения (2.9) с некоторыми коэффициентными функциями $\varphi_i(t,x)$ и максвеллианами M_i, описывающими ускоряющееся-уплотняющееся движение. Явный вид таких максвеллианов задается представлением (4.33), где по-прежнему ρ_i – плотность газа, однако она имеет другой вид:

$$\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \left(\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)}, \tag{4.58}$$

а массовая скорость $\overline{V}_i$ задается следующим образом:

$$\overline{V}_i = \widehat{V}_i - \overline{u}_i t. \tag{4.59}$$

Все параметры сохраняют предыдущий смысл, за исключением $\overline{u}_i, \widehat{V}_i$ – произвольных постоянных из пространства R^3.

Далее приведем результаты, предоставляющие различные достаточные условия для минимизации невязки (2.10) за счет подходящего выбора коэффициентных функций φ_i и параметров распределения.

Теорема 4.5. Пусть функции φ_i в распределении (2.9) имеют вид:

$$\varphi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} C_i \left(x + \overline{u}_i \frac{\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}{2\overline{u}_i^2} \right), \tag{4.60}$$

где константы D_i, ξ_i удовлетворяют следующим неравенствам:

$$D_i > 0, \quad \xi_i \geqslant \frac{1}{2}, \tag{4.61}$$

и функции C_i – неотрицательные, принадлежащие пространству $C^1(R^3)$, обладающие конечным носителем (т.е. финитные) либо быстроубывающие на бесконечности. Также пусть выполняются следующие требования:

$$\widehat{V}_i = \frac{\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \quad \overline{u}_i = \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}} \tag{4.62}$$

с такими условиями

$$k_i \geqslant \frac{1}{2}, \quad n_i \geqslant 1, \quad k_i \geqslant \frac{1}{2} n_i, \tag{4.63}$$

и $\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i}$ – произвольные фиксированные трехмерные векторы.

Тогда справедливо следующее утверждение:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall D_1, D_2 : 0 < D_1, D_2 < \delta, \\ \exists \beta_0, \forall \beta_i > \beta_0, \\ \Delta < \varepsilon. \end{gathered} \tag{4.64}$$

Доказательство. Сначала покажем, что существует такая величина Δ', что выполняется неравенство (4.16), причем имеет место равенство:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta' = K(\xi_1, \xi_2) \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{x \in R^3} \Big[\eta_i(x) C_i(x + a_i) \Big], \tag{4.65}$$

где функции $\eta_i(x)$ следующего вида:

$$\eta_i(x) = \left[\begin{array}{lll} 1, & n_i > 1; & k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{2\overline{u}_{0i} x}, & n_i = 1; & k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{\widehat{V}_{0i}^2 + 2\overline{u}_{0i} x}, & n_i = 1; & k_i = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \tag{4.66}$$

$K(\xi_1, \xi_2)$ – некоторая постоянная, а векторные константы a_i имеют вид:

$$a_i = \left[\begin{array}{ll} \frac{\overline{u}_{0i}\widehat{V}_{0i}^2}{2\overline{u}_{0i}^2}, & k_i = \frac{1}{2}n_i; \\ 0, & k_i \neq \frac{1}{2}n_i. \end{array}\right. \tag{4.67}$$

При указанных условиях теоремы мы можем прийти к выражению (4.42), а далее, интегрируя по пространству угловых скоростей ω (трехмерный интеграл Эйлера-Пуассона), получим:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i \left(V - \overline{V}_i \right)^2}$$

$$+ \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Вводя замену переменной:

$$V = \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i, \tag{4.68}$$

якобиан которой составляет $\beta_i^{-3/2}$ и, учитывая вид массовой скорости (4.59), получим следующее неравенство, часто использующееся в наших дальнейших вычислениях:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$

$$+ \frac{4d^2 \rho_1 \rho_2 \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1) t \right|. \tag{4.69}$$

Для существования величины (2.10) и истинности неравенства (4.16), как видно из последней оценки (4.69), достаточно проверить, чтобы произведение плотности газа (4.58) на такие функции, как

$$\varphi_i; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}; \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|; \quad \varphi_i t; \quad \left(\overline{u}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) t \tag{4.70}$$

было ограниченным для любых (t,x) из R^4.

В представлении функций (4.60) введем такое переобозначение:

$$l = x + \overline{u}_i \frac{\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}{2\overline{u}_i^2},$$

откуда:

$$\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 = 2\overline{u}_i l - 2\overline{u}_i x,$$

а следовательно, имеет место равенство:

$$\varphi_i \rho_i = \rho_{0i} e^{2\overline{u}_i l \beta_i} \frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} C_i(l). \tag{4.71}$$

Произведение (4.71) – ограниченная функция по $(t,x) \in R^4$ благодаря свойствам функции $C_i(l)$. Следует отметить, что ограниченность останется в силе и при умножении (4.71) на переменную t благодаря наличию в знаменателе выражения $(1+t^2)^{\xi_i}$ и условию (4.61). Аналогично можно доказать ограниченность последних трех произведений, вследствие следующих равенств, получаемых непосредственным дифференцированием функции φ_i (4.60) по времени t и положению в пространстве x:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$

$$= -\frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} \left[\frac{2t\xi_i}{1+t^2} C_i(l) + \left(C_i^{'}(l), \overline{u}_i\right) \frac{\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_i\right) - t\overline{u}_i^2}{\overline{u}_i^2} \right], \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} C_i^{'}(l). \tag{4.73}$$

Принимая во внимание представления (4.62), имеем низкотемпературный такой предел $(\beta_i \to +\infty)$ плотности (4.58) в зависимости от чисел n_i и k_i:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \rho_i = \rho_{0i} \cdot \left[\begin{array}{ll} 1, & n_i > 1,\ \ k_i > \frac{1}{2}; \\ e^{2\overline{u}_{0i} x} & n_i = 1,\ \ k_i > \frac{1}{2}; \\ e^{\widehat{V}_{0i}^2 + 2\overline{u}_{0i} x} & n_i = 1,\ \ k_i = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Также очевидно следующее равенство, полученное с учетом равенств (4.62) и условий (4.63)

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+(\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|=0. \tag{4.74}$$

В итоге, делая подстановку вычисленных производных (4.72), (4.73) в (4.69), и вычисляя супремум от обеих частей неравенства (4.69), а также выполняя низкотемпературный предельный переход с использованием техники [74, 78, 92, 94] можно получить следующее равенство:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta^{'}=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\sup_{(t,x)\in R^4}\left\{\eta_i(x)\lim_{\beta_i\to+\infty}\frac{2|t|\xi_iC_i(l)}{(1+t^2)^{\xi_i+1}}\right\},$$

где переменную l представим в виде суммы переменных x и r_i, последняя из которых может быть записана в следующем виде:

$$r_i=\frac{\overline{u}_{0i}}{2\overline{u}_{0i}^2}\left(\frac{\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i-\frac{1}{2}n_i}}-\frac{\overline{u}_{0i}t}{\beta_i^{\frac{1}{2}n_i}}\right)^2,$$

и тогда имеем, что:

$$a_i=\lim_{\beta_i\to+\infty}(l-x)=\left[\begin{array}{ll}0, & k_i>\frac{1}{2}n_i;\\ \overline{u}_{0i}\frac{\widehat{V}_{0i}^2}{2\overline{u}_{0i}^2}, & k_i=\frac{1}{2}n_i.\end{array}\right.$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned}&\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta^{'}\\ &=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\sup_{(t,x)\in R^4}\left\{\eta_i(x)\frac{2|t|\xi_i}{(1+t^2)^{\xi_i+1}}C_i(x+a_i)\right\}\\ &\leqslant K(\xi_1,\xi_2)\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\sup_{x\in R^3}\Big[\eta_i(x)C_i(x+a_i)\Big],\end{aligned}$$

где постоянная $K(\xi_1,\xi_2)$ определяется следующим образом

$$K(\xi_1,\xi_2)=2\max_i\left\{\xi_i\sup_{t\in R}\frac{|t|}{(1+t^2)^{\xi_i+1}}\right\}.$$

Таким образом, мы показали, что равенство (4.65) выполняется, а из него с учетом (4.16) очевидным образом следует утверждение теоремы (4.64). □

Теорема 4.6. Предположим, что функции $\varphi_i(t,x)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \cdot e^{-\beta_i\left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)}, \tag{4.75}$$

где:

$$\psi_i = D_i \cdot C_i(t,x),$$

здесь $D_i > 0$, C_i – финитная функция.

Пусть также выполняется условие:

$$\overline{u}_i = \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \quad n_i \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4.76}$$

Тогда:

а)если выполняется следующее равенство:

$$supp\, C_1 \cap supp\, C_2 = \varnothing,$$

или условие (4.50), то справедливо утверждение (4.64).

б)В случае произвольных носителей функций C_1 и C_2, и скоростей $\widehat{V}_1$, $\widehat{V}_2$ утверждение Теоремы 4.5 по-прежнему выполняется, если будет дополнено условием бесконечной малости диаметра частицы газа $(d < \delta)$, что соответсвует физическому требованию околосвободномолекулярного течения (газ, близкий к кнудсеновскому).

Доказательство. С начала введём и докажем вспомогательное утверждение: существует такая величина $\Delta^{'}$, что выполняется неравенство (4.16), при этом если $n_i > \frac{1}{2}$, то:

$$\begin{aligned} &\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta^{'} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| \\ &+ 4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1 \psi_2), \end{aligned} \tag{4.77}$$

а для $n_i = \frac{1}{2}$ имеем:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta^{'}$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|$$
$$+4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1\psi_2) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} |\overline{u}_{0i}| \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_i. \tag{4.78}$$

Если это утверждение верно, то истинность пунктов (а) и (б) доказываемой теоремы – очевидна.

Отметим, что неравенство (4.69) остается верным, поэтому необходимо вычислить производные функции (4.75) по переменным t и x:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$
$$= e^{-\beta_i\left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_i \right) - t\overline{u}_i^2 \right) \right\}, \tag{4.79}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i\left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \overline{u}_i \psi_i \right\}. \tag{4.80}$$

Учитывая, что функции $\psi_i(t,x)$ – гладкие, неотрицательные и исходя из их вида следует, что перечисленные выражения в (4.70) остаются ограниченными и после замены $\varphi_i(t,x)$ на $\psi_i(t,x)$, поэтому можно перейти к супремуму в неравенстве (4.69), прежде подставив в него выражения для производных (4.79) и (4.80). То есть имеем:

$$\Delta \leqslant \Delta^{'}$$
$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| e^{-\beta_i\left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_i \right) - t\overline{u}_i^2 \right) \right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right) e^{-\beta_i\left(\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2 + 2\overline{u}_i x\right)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \overline{u}_i \psi_i \right) \right| e^{-p^2}$$
$$+4 \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_1\psi_2 e^{-\beta_1\left(\left(\widehat{V}_1 - \overline{u}_1 t\right)^2 + 2\overline{u}_1 x\right) - \beta_2\left(\left(\widehat{V}_2 - \overline{u}_2 t\right)^2 + 2\overline{u}_2 x\right)} \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2}$$
$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t \right|.$$

Используя представление для плотности (4.58) и раскрывая скобки, после приведения подобных слагаемых, получим, что величина Δ' равна следующему выражению:

$$\sup_{(t,x)\in R^4}\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}dp\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i-\overline{u}_i t\right)\cdot\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-\frac{2\beta_i\overline{u}_i\psi_i}{\sqrt{\beta_i}}p\right|e^{-p^2}$$
$$+4\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{d^2\psi_1\psi_2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}$$
$$\times\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+(\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|.$$

Далее, используя требование (4.76), величину Δ' преобразуем к виду:

$$\sup_{(t,x)\in R^4}\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}dp\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i-\frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}t\right)\cdot\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i^{\frac{1}{2}-n_i}\overline{u}_{0i}\psi_i p\right|e^{-p^2}$$
$$+4\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{d^2\psi_1\psi_2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}$$
$$\times\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+\left(\frac{\overline{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}}-\frac{\overline{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}}\right)t\right|,$$

что можно оценить сверху такой суммой:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}dp\sup_{(t,x)\in R^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i-\frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}t\right)\cdot\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|e^{-p^2}$$
$$+\frac{4\rho_{01}\rho_{02}d^2}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}$$
$$\times\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+\left(\frac{\overline{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}}-\frac{\overline{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}}\right)t\right|$$
$$+2\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\int_{R^3}dp\sup_{(t,x)\in R^4}\beta_i^{\frac{1}{2}-n_i}\left|\overline{u}_{0i}\psi_i p\right|e^{-p^2}.$$

Теперь выполняя предельный переход $(\beta_i\to+\infty)$ под знаком неравенства и супремума как и при доказательстве Теоремы 4.5, можно получить равенство (4.77) при $n_i>\frac{1}{2}$, а истинность значения предела (4.78) доказывается с использованием следующего равенства

$$\int_{R^3}|p|e^{-p^2}dp=2\pi,$$

получаемого непосредственным интегрированием в сферической системе координат. Таким образом, мы показали верность утверждений Теоремы 4.6.

$\square$

Теорема 4.7. Пусть функции φ_i в распределении (2.9) имеет следующий вид:

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \cdot e^{-\beta_i\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}, \tag{4.81}$$

и выполняется условие (4.76), но для $n_i \geqslant 1$.

Тогда утверждение Теоремы 4.6 остается верным, если:

а) функции ψ_i имеют вид:

$$\psi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} C_i\left(\left[x \times \widehat{V}_i\right]\right), \tag{4.82}$$

а также выполняется условие (4.61) и $\widehat{V}_i \bot \overline{u}_{0i}$.

б) имеет место представление:

$$\psi_i(t,x) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} C_i\left(x\right), \tag{4.83}$$

причем на используемые здесь функции C_i накладываются такие же ограничения, как и в Теореме 4.5.

Доказательство. Прежде, чем доказать справедливость Теоремы 4.7, докажем некоторое утверждение, состоящее в том, что как и ранее существует такая величина $\Delta^{'}$ и выполняется неравенство (4.16), причём имеет место следующее равенство:

$$\begin{gathered}
\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta^{'} \\
= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \mu_i(x) \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| \\
+4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} \left[\mu_1(x)\mu_2(x)\psi_1(t,x)\psi_2(t,x)\right] \\
+\theta \cdot 2 \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left| \left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i\right) \right| \sup_{(t,x)\in R^4} \left[\mu_i(x)\psi_i(t,x)\right],
\end{gathered} \tag{4.84}$$

где:

$$\begin{cases} \theta = 0, \mu_i = 1, & n_i > 1 \\ \theta = 1, \mu_i(x) = e^{2\overline{u}_{0i}x}, & n_i = 1. \end{cases} \tag{4.85}$$

Оценка (4.69) верна и в случае этой теоремы, поэтому снова начнем с вычисления производных функций (4.81), входящих в указанное неравенство. Производная по времени t выражается следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2} \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\overline{u}_i, \widehat{V}_i \right) - \overline{u}_i^2 t \right) \right\}, \tag{4.86}$$

а по пространственной координате x:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} e^{-\beta_i\left(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)^2}. \tag{4.87}$$

Принимая во внимания наложенные условия на функции $\psi_i(t, x)$ и найденные производные (4.86), (4.87) перейдем в неравенстве (4.69) к супремуму, существование которого вытекает из условий на C_i в формулировке доказываемой теоремы, и преобразуем полученное выражение, учитывая представление (4.58), тогда величина Δ' сводится к следующему выражению:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i \overline{u}_i x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left(\left(\overline{u}_i, \widehat{V}_i \right) - \overline{u}_i^2 t \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$

$$+ \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02} \psi_1 \psi_2 e^{2x(\beta_1 \overline{u}_1 + \beta_2 \overline{u}_2)}}{\pi^2}$$

$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1) t \right|,$$

которое допускает ограничение сверху следующей суммой:

$$\sup_{(t,x)\in R^4} \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i^{1-n_i} \overline{u}_{0i} x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$

$$+ \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_1 \psi_2 e^{2x\left(\beta_1^{1-n_1} \overline{u}_{01} + \beta_2^{1-n_2} \overline{u}_{02}\right)}$$

$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2-q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + \left(\frac{\overline{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}} - \frac{\overline{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}} \right) t \right|$$

$$+2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i} e^{2\beta_i^{1-n_i} \overline{u}_{0i} x}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \sup_{(t,x)\in R^4} \psi_i \left| \left(\frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}, \widehat{V}_i \right) - \frac{\overline{u}_{0i}^2}{\beta_i^{2n_i}} t \right| e^{-p^2}.$$

Таким образом, если теперь сделать переход к низкотемпературному пределу получим утверждение (4.84) с соответствующими значениями θ и $\mu_i(x)$, указаными в (4.85).

Проверка пункта (б), т.е. случая функций вида (4.83) достаточно очевидна, а вот случай (4.82) следует рассмотреть подробнее.

Для начала введем новый ортогональный (в силу условий пункта а)) базис, состоящий из векторов: $\overline{u}_i,\ \widehat{V}_i$ и $\left[\overline{u}_i \times \widehat{V}_i\right]$. Далее, разложим произвольный вектор x по этому базису:

$$x = x^1 \overline{u}_i + x^2 \widehat{V}_i + x^3 \left[\overline{u}_i \times \widehat{V}_i \right].$$

Тогда имеем следующее представление для произведения $\psi_i e^{2\beta_i \overline{u}_i x}$:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} C_i \left(x^1 \left[\overline{u}_i \times \widehat{V}_i \right] - x^3 \overline{u}_i \widehat{V}_i^2 \right) e^{2\beta_i \overline{u}_i^2 x^1},$$

что постоянно по второй компоненте x^2. Нетрудно видеть, что по остальным компонентам $\left(x^1, x^3\right)$, а также и по β_i оно тоже будет ограничено, учитывая свойство финитности функции C_i и требование (4.76).

Далее вычислим производную по x:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{\xi_i}} \left[\widehat{V}_i \times C_i' \left(\left[x \times \widehat{V}_i \right] \right) \right],$$

и скалярно умножим её на $\widehat{V}_i$, тогда, очевидно, указанное произведение обнуляеться согласно свойству скалярного произведения.

Теперь, используя утверждение (4.84), несложно показать истинность утверждения для функций вида (4.82). Теорема доказана. □

Теорема 4.8. Предположим, что имеет место следующее представление:

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) \cdot e^{-2\beta_i \overline{u}_i x}, \tag{4.88}$$

и сохраняется требование (4.62), но:

$$n_i \geqslant \frac{1}{2},\ k_i \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4.89}$$

Пусть функция $\psi_i(t,x)$ имеет вид:

$$\psi_i(t,x) = D_i C_i(t) E_i(x), \tag{4.90}$$

где $D_i > 0,\ C_i(t)$ – обладает такими же свойствами, как и в предыдущих теоремах 4.5, 4.6, 4.7, а $E_i(x)$ – неотрицательная, финитная или быстроубывающая на бесконечности и ограничена вместе со своим градиентом по x функция. Тогда выполняется утверждение (4.64).

Доказательство. Итак, как и в предыдущих теоремах мы начнем с введения вспомогательного утверждения. Снова докажим, что существует такая величина Δ', что выполняется неравенство (4.16) и ее низкотемпемпературный предел равен:

а) при $n_i > \frac{1}{2},\ k_i > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|; \tag{4.91}$$

б) в случае $n_i > \frac{1}{2},\ k_i = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} e^{\widehat{V}_{0i}^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|; \tag{4.92}$$

в) если $n_i = \frac{1}{2},\ k_i > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ e^{t^2 \overline{u}_{0i}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t \overline{u}_{0i}^2 \right| \right\}$$
$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} |\overline{u}_{0i}| \sup_{(t,x)\in R^4} \left(e^{t^2 \overline{u}_{0i}^2} \psi_i \right); \tag{4.93}$$

г) и наконец $k_i = n_i = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ e^{\left(\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t\right)^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t \overline{u}_{0i}^2 \right| \right\}$$
$$+2 \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left(\frac{2|\overline{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} + \left| \left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i} \right) \right| \right) \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ e^{\left(\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t\right)^2} \psi_i \right\}. \tag{4.94}$$

Используя неравенство (4.69), оставшееся в силе, учитывая, что изменился только вид функции φ_i, найдем производные функции (4.88) по переменным t и x:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = e^{-2\beta_i\overline{u}_i x}\frac{\partial\psi_i}{\partial t}, \tag{4.95}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = e^{-2\beta_i\overline{u}_i x}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\overline{u}_i\psi_i\right). \tag{4.96}$$

Теперь в неравенстве (4.69), вычисляя супремум от обеих частей оценки и пользуясь ограниченностью слагаемых, подставим найденные выражения для производных (4.95), (4.96) и в результате будем иметь следующее выражение для величины Δ':

$$\sup_{(t,x)\in R^4}\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}e^{\beta_i\left(\widehat{V}_i-\overline{u}_i t\right)^2}}{\pi^{3/2}}$$
$$\times\int_{R^3}dp\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\overline{u}_i\psi_i\right)\right|e^{-p^2}$$
$$+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2 e^{\beta_1\left(\widehat{V}_1-\overline{u}_1 t\right)^2+\beta_2\left(\widehat{V}_2-\overline{u}_2 t\right)^2}$$
$$\times\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|,$$

что с учетом условий (4.62) и (4.89) может быть переписано в следующем виде:

$$\sup_{(t,x)\in R^4}\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}e^{\beta_i\left(\frac{\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}-\frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}t\right)^2}}{\pi^{3/2}}$$
$$\times\int_{R^3}dp\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \frac{\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}} - \frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}t\right)\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i^{1-n_i}\overline{u}_{0i}\psi_i\right)\right|e^{-p^2}$$
$$+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\psi_1\psi_2 e^{\beta_1\left(\frac{\widehat{V}_{01}}{\beta_1^{k_1}}-\frac{\overline{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}}t\right)^2+\beta_2\left(\frac{\widehat{V}_{02}}{\beta_2^{k_2}}-\frac{\overline{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}}t\right)^2}$$
$$\times\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \frac{\widehat{V}_{01}}{\beta_1^{k_1}} - \frac{\widehat{V}_{02}}{\beta_2^{k_2}} + \left(\frac{\overline{u}_{02}}{\beta_2^{n_2}} - \frac{\overline{u}_{01}}{\beta_1^{n_1}}\right)t\right|$$

Теперь выполняя, как и ранее, предельный переход и несложные преобразования, можно получить значения низкотемпературных пределов величины Δ', указанные в формулах (4.91)–(4.94).

Далее вычисляя производную по переменной t, подставляя в выражения (4.91) – (4.94), убеждаемся в справедливости утверждения (4.64). □

4.2.2. Невязка "с весом"

В отличие от пункта 4.2.1. здесь мы рассмотрим еще не использованное ранее в предыдущих теоремах отклонение (2.12), а приближенное решение будем строить так же, как и в пункте 4.2.1..

Теорема 4.9. Пусть коэффициентные функции $\varphi_i(t,x)$ сохраняют вид (4.88), где функции ψ_i таковы, что произведение множителя

$$e^{\beta_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_i t)^2}\cdot\frac{1}{1+|t|} \tag{4.97}$$

на величины (4.70)(с заменной φ_i на ψ_i) ограничены по t,x на R^4.

Пусть, кроме того, выполняются соотношения:

$$\overline{u}_i=\frac{s_i\overline{u}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}, \tag{4.98}$$

$$\widehat{V}_i=\frac{s_i\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}, \tag{4.99}$$

где $\overline{u}_{0i},\widehat{V}_{0i}\in R^3$ – некоторые фиксированые векторы, s_i – произвольная положительная константа, а показатели степени k_i удовлетворяют неравенству:

$$k_i\geqslant\frac{1}{2}. \tag{4.100}$$

Тогда существует такая величина $\widetilde{\Delta}'$, что:

$$\widetilde{\Delta}\leqslant\widetilde{\Delta}', \tag{4.101}$$

причем она имеет такие конечные пределы:

а) при $k_i>\frac{1}{2}$ верно равенство:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \overline{u}_{0i}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 \right| \right\} +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} s_i \rho_{0i} |\overline{u}_{0i}| \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \overline{u}_{0i}^2} \psi_i \right\}; \qquad (4.102)$$

б) при $k_i = \frac{1}{2}$ получаем:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 \right| e^{s_i^2 (\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)^2} \right\} +$$

$$+2 \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left(\frac{2 s_i |\overline{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} + s_i^2 \left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i} \right) \right) \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2 (\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)^2} \psi_i \right\}. \qquad (4.103)$$

Доказательство. Ввиду наложенных условий неравенство (4.69) по-прежнему остается верным. Домножая обе части неравенства (4.69) на множитель $\frac{1}{1+|t|}$ и переходя к супремуму по всем $(t,x) \in R^4$, будем иметь:

$$\widetilde{\Delta} \leqslant \widetilde{\Delta}'$$

$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left[\sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} \right.$$

$$+ \frac{4\varphi_1 \varphi_2 d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2}$$

$$\left. \int_{R^3} \int_{R^3} dq dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1) t \right| \right]. \qquad (4.104)$$

Далее, подставляя выражения для производных (4.95), (4.96) и используя равенство (4.58), из оценки (4.104) можно получить:

$$\widetilde{\Delta}'$$

$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right.$$

$$+2\beta_i\psi_i\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta_i}}(\overline{u}_i,p)-(\overline{u}_i,\widehat{V}_i)+\overline{u}_i^2t\right)\Bigg|\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}e^{\beta_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_it)^2}e^{-p^2}$$

$$+\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\cdot\frac{4\psi_1\psi_2d^2\rho_{01}\rho_{02}e^{\beta_1(\widehat{V}_1-\overline{u}_1t)^2+\beta_2(\widehat{V}_2-\overline{u}_2t)^2}}{\pi^2}$$

$$\times\int_{R^3}\int_{R^3}dqdq_1e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+(\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|\Bigg]. \qquad (4.105)$$

Само существование величины $\widetilde{\Delta}'$ вытекает из предположения об ограниченности величин (4.70) после умножения на множитель (4.97) и вида выражения (4.105). Далее осуществим низкотемпературный предельный переход ($\beta_i \to +\infty$) в неравенстве (4.105), возможность которого обосновывается с помощью Леммы 1 работы [95] и стандартных теорем о предельном переходе под знаком интеграла – условия всех этих теорем легко проверяются благодаря структуре выражения (4.105), гладкости функций, которые входят в него и хорошей сходимости всех интегралов.

Принимая во внимание соотношения (4.98), (4.99) видим, что:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+(\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|=0. \qquad (4.106)$$

Используя вновь условия теоремы (4.98) и (4.99), получаем следующее:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}e^{\beta_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_it)^2}=\begin{cases} e^{s_i^2\overline{u}_{0i}^2t^2}, & k_i>\frac{1}{2},\\ e^{s_i^2(\widehat{V}_{0i}-\overline{u}_{0i}t)^2}, & k_i=\frac{1}{2}.\end{cases} \qquad (4.107)$$

Кроме того, очевидно, существует такой предел:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\left[\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i-\overline{u}_it\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\beta_i\psi_i\left(-\frac{1}{\sqrt{\beta_i}}(\overline{u}_i,p)-(\overline{u}_i,\widehat{V}_i)+\overline{u}_i^2t\right)\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} 2\psi_i(ts_i^2\overline{u}_{0i}^2-s_i(\overline{u}_{0i},p)), & k_i>\frac{1}{2},\\ 2\psi_i(ts_i^2\overline{u}_{0i}^2-s_i^2(\overline{u}_{0i},\widehat{V}_{0i})-s_i(\overline{u}_{0i},p)), & k_i=\frac{1}{2}.\end{array}\right. \qquad (4.108)$$

Таким образом, принимая во внимание (4.106), (4.107) и (4.108), получаем, что результат перехода к низкотемпературному пределу в равенстве (4.105) при $k_i>\frac{1}{2}$ с последующей оценкой сверху после вычисления соответствующих интегралов и выполнении элементарных преобразований будет иметь вид:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}'$$

$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i (t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 - s_i(\overline{u}_{0i}, p)) \right| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 t^2} e^{-p^2}$$

$$\leqslant \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 \right| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 t^2} e^{-p^2}$$

$$+ \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp 2\psi_i s_i |\overline{u}_{0i}||p| \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 t^2} e^{-p^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \overline{u}_{0i}^2} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 \right| \right\}$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} s_i \rho_{0i} |\overline{u}_{0i}| \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2 s_i^2 \overline{u}_{0i}^2} \psi_i \right\},$$

что и доказывает утверждение (4.102).

В случае $k_i = \frac{1}{2}$, также используя результаты (4.106), (4.107), (4.108), можно получить:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}'$$

$$= \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i \Big(t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 - s_i^2 (\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i}) - s_i(\overline{u}_{0i}, p) \Big) \right|$$

$$\times \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} e^{s_i^2 (\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)^2} e^{-p^2}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i t s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 \right| e^{s_i^2 (\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)^2} \right\}$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \left(\frac{2 s_i |\overline{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} + s_i^2 \left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_{0i} \right) \right) \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2 (\widehat{V}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)^2} \psi_i \right\},$$

а это означает истинность утверждения (4.103). Теорема доказана.

□

Теперь рассмотрим несколько следствий, в которых указаны условия, достаточные для минимизации рассматриваемой невязки с весом $\widetilde{\Delta}$ (2.12).

Следствие 4.5. Пусть функции ψ_i при $k_i > \frac{1}{2}$ имеют вид:

$$\psi_i(t,x) = C_i(x)e^{-s_i^2\overline{u}_{0i}^2t^2}, \tag{4.109}$$

где $C_i(x)-$ произвольные положительные, гладкие, ограниченные на R^3 функции вместе с $C_i'(x)$. Тогда невязка $\widetilde{\Delta}$ является произвольно малой при достаточно малых значениях $s_1, s_2, T_1, T_2,$ т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $\beta_0 > 0$ такие, что для всех $s_1, s_2,$ удовлетворяющих неравенству $0 < s_1, s_2 < \delta,$ и всех $\beta_1, \beta_2 > \beta_0$ выполнено неравенство

$$\widetilde{\Delta} < \varepsilon.$$

Доказательство. Для начала проверим, что функции ψ_i вида (4.109) при $k_i > \frac{1}{2}$ и достаточно малых $T_1, T_2 > 0$ обеспечивают ограниченность функций (4.70)(с заменой φ_i на ψ_i) умноженых на множитель (4.97). Проверим это для одной из функций (4.70)(с заменой φ_i на ψ_i), (для остальных это проверяется аналогично).

$$t\psi_i e^{\beta_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_it)^2}\cdot\frac{1}{1+|t|}$$
$$= \frac{t}{1+|t|}C_i(x)e^{\beta_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_it)^2-s_i^2\overline{u}_{0i}^2t^2}$$
$$= \frac{t}{1+|t|}C_i(x)e^{\beta_i\left(\frac{s_i\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}-\frac{s_i\overline{u}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}t\right)^2-s_i^2\overline{u}_{0i}^2t^2}$$
$$= \frac{t}{1+|t|}C_i(x)e^{s_i^2\widehat{V}_{0i}^2\beta_i^{1-2k_i}-2s_i^2(\overline{u}_{0i},\widehat{V}_{0i})t\beta_i^{1-k_i}}.$$

Далее вычислим производную функции ψ_i по переменной t, которая входит в неравенство (4.102):

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = C_i(x)e^{-s_i^2\overline{u}_{0i}^2t^2}(-2s_i^2\overline{u}_{0i}^2t) = -2\psi_is_i^2\overline{u}_{0i}^2t. \tag{4.110}$$

Подставляя выражение для производной (4.110) в равенство (4.102) и используя достаточную малость величин $s_1, s_2, T_1, T_2,$ получаем утверждение Следствия (4.5). □

Следствие 4.6. В случае $k_i = \frac{1}{2}$ пусть остаются верны все условия Следствия 4.5, и выполняется еще одно условие:

$$\overline{u}_i \perp \widehat{V}_i. \tag{4.111}$$

Тогда утверждение Следствия 4.5 остается в силе.

Доказательство. Снова проверим ограниченность одной из величин (4.70)(с заменой φ_i на ψ_i), умноженой на функцию (4.97), для функции $\psi_i,$ вида (4.109) :

$$t\psi_i e^{\beta_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_i t)^2} \cdot \frac{1}{1+|t|} = \frac{t}{1+|t|} C_i(x) e^{s_i^2 \widehat{V}_{0i}^2 \beta_i^{1-2k_i}}$$

Далее, используя производную (4.110) и малость величин s_1, s_2, T_1, T_2, а также условие (4.111), помогающее обратить в нуль второе слагаемое в правой части равенства (4.103), вновь получаем утверждение Следствия(4.5). □

Теорема 4.10. Пусть имеет место следующее представление:

$$\varphi_i(t,x) = C_i\left(x + \overline{u}_i \frac{(\widehat{V}_i - \overline{u}_i t)^2}{2\overline{u}_i^2}\right), \tag{4.112}$$

где C_i – неотрицательные, финитные или достаточно быстроубывающие на бесконечности гладкие функции.

Также пусть имеют место соотношения (4.62), (4.63). Тогда верно утверждение:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{4.113}$$

Доказательство. Легко показать, что следующие функции

$$t\varphi_i\rho_i(t,x); \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,x); \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|\rho_i(t,x); \quad t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)\rho_i(t,x)$$

после умножения на $\frac{1}{1+|t|}$ - ограничены на R^4. Далее в силу предположения, что φ_i – гладкая функция, следует, что такое же "ограничение с весом" имеет место и для функций:

$$\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i(t,x), \quad |t|\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x),$$

а также $\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)$. Значит корректно определена оценка (4.101).

Очевидно, что остается верно неравенство (4.104), а правая часть выражения (4.58) с учетом предположения (4.62) имеет вид:

$$\rho_{0i}e^{\beta_i\left(\left(\frac{\widehat{V}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}-\frac{\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}t\right)^2+\frac{2\overline{u}_{0i}x}{\beta_i^{n_i}}\right)} \tag{4.114}$$

Дальше найдем производные по переменным t и x функции φ_i, используя ее представление (4.112):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=C_i^{'}\left(x+\overline{u}_i\frac{(\widehat{V}_i-\overline{u}_it)^2}{2\overline{u}_i^2}\right), \tag{4.115}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}$$

$$=\frac{t\overline{u}_i^2-(\overline{u}_i,\widehat{V}_i)}{\overline{u}_i^2}\left(\overline{u}_i,C_i^{'}\left(x+\frac{\overline{u}_i(\widehat{V}_i-\overline{u}_it)^2}{2\overline{u}_i^2}\right)\right). \tag{4.116}$$

Теперь перейдем к низкотемпературному пределу в правой части (4.104)(обоснование возможности такого перехода, аналогично сделаному в доказательстве Теоремы 4.9).

Таким образом, используя выражение (4.114) и условие (4.63), можно утверждать, что:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\rho_i=\rho_{0i}\eta_i(x), \tag{4.117}$$

где введено обозначение:

$$\eta_i(x)=\left[\begin{array}{ll}1, & n_i>1,k_i>\frac{1}{2},\\ e^{2\overline{u}_{0i}x}, & n_i=1,k_i>\frac{1}{2},\\ e^{\widehat{V}_{0i}^2+2\overline{u}_{0i}x}, & n_i=1,k_i=\frac{1}{2}.\end{array}\right. \tag{4.118}$$

Принимая во внимание условие (4.62) перейдем также к пределу в самом выражении (4.112):

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\varphi_i=C(x+a_i), \tag{4.119}$$

где:

$$a_i=\left[\begin{array}{ll}0, & k_i>\frac{1}{2}n_i,\\ \frac{\overline{u}_{0i}\widehat{V}_{0i}^2}{2\overline{u}_{0i}^2}, & k_i=\frac{1}{2}n_i.\end{array}\right. \tag{4.120}$$

Теперь вычислим пределы производных функции $\varphi_i,$ пользуясь их явным видом (4.115), (4.116), а также условием теоремы (4.62):

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0, \tag{4.121}$$

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = C_i'(x + a_i). \tag{4.122}$$

В случае функции (4.112) очевидно выполнение равенства (4.106). Тогда, используя ранее найденые значения (4.117) – (4.122), можно утверждать, что:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}' = 0, \tag{4.123}$$

а значит, справедливо и утверждение (4.113). □

Теорема 4.11. Пусть функции φ_i в распределении (2.9) имеют вид (4.75), где $\psi_i(t,x)$ таковы, что выражения:

$$t\psi_1\psi_2; \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \quad t\psi_i; \quad \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|; \quad t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right), \tag{4.124}$$

умноженые на $\frac{1}{1+|t|}$, ограничены на R^4; пусть также выполняется представление (4.76) для $n_i > \frac{1}{2}$.

Тогда верна оценка (4.101), причем:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta_i \to +\infty} \widetilde{\Delta}' \\
&= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| \\
&+4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} |\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2| \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|} (\psi_1\psi_2).
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Доказательство. Как и выше, остается верным неравенство (4.104). Пользуясь видом функции φ_i (4.75), найдем ее производные по времени t

и пространственной координате x:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \rho_{0i}\rho_i^{-1}(t,x)\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\widehat{V}_i,\overline{u}_i) - t\overline{u}_i^2\right)\right\}, \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \rho_{0i}\rho_i^{-1}(t,x)\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right\}. \tag{4.127}$$

Подставим найденые производные (4.126), (4.127) в неравенство (4.104):

$$\widetilde{\Delta}' = \pi^{-\frac{3}{2}} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}\sum_{i=1}^{2}\int_{R^3} dp \left|\rho_{0i}\rho_i^{-1}(t,x)\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\widehat{V}_i,\overline{u}_i) - t\overline{u}_i^2\right)\right\}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)\rho_{0i}\rho_i^{-1}(t,x)\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)\right|\rho_i e^{-p^2}$$
$$+\frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\psi_1\psi_2$$
$$\times\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t\right|.$$

Преобразуем полученое выражение:

$$\widetilde{\Delta}' = \pi^{-\frac{3}{2}} \sup_{(t,x)\in R^4} \frac{1}{1+|t|}\sum_{i=1}^{2}\int_{R^3} dp \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i - \overline{u}_i t\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right.$$
$$\left. -2\sqrt{\beta_i}\psi_i(\overline{u}_i,p)\right|\rho_{0i}e^{-p^2} + \frac{4d^2\rho_{01}\rho_{02}}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\psi_1\psi_2$$
$$\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t\right|. \tag{4.128}$$

Далее, снова выполняя предельный переход в равенстве (4.128), и принимая во внимание, что низкотемпературный предел величины

$$\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t\right|,$$

с учетом условия теоремы (4.76), будет таким:

$$|\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2|, \tag{4.129}$$

видим, что соответствующий предел величины $\widetilde{\Delta}'$, описываемой равенством (4.128) при выполнении (4.76) и (4.129), действительно будет иметь вид (4.125).

□

Следствие 4.7. Пусть функции ψ_i в (4.75) имеют такой вид:

$$\psi_i = C_i\left(x - \widehat{V}_i t\right) \tag{4.130}$$

или

$$\psi_i = C_i\left(\left[x \times \widehat{V}_i\right]\right), \tag{4.131}$$

где C_i - неотрицательные, гладкие, финитные функции.

Тогда:

1)Если выполняется равенство (4.50) или (4.51), то верно утверждение (4.113).

2)При произвольных $C_1, C_2, \widehat{V}_1, \widehat{V}_2$ будем иметь

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\beta_i\to+\infty}\widetilde{\Delta}' = 0. \tag{4.132}$$

Доказательство. Указаные функции ψ_i удовлетворяют условиям Теоремы 4.11. Очевидно, что в случае (4.130):

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = -\left(\widehat{V}_i, C_i'\right), \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial x} = C_i', \tag{4.133}$$

а в случае (4.131):

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial x} = \left[\widehat{V}_i \times C_i'\right]. \tag{4.134}$$

Найденые производные (4.133), (4.134) обнуляют первое слагаемое в правой части равенства (4.125), а дополнительные условия (4.50), (4.51) или условие $d \to 0$ обращают в нуль второе слагаемое в равенстве (4.125). Таким образом, выполняется утверждения (4.113) или (4.132) соответственно. □

Теорема 4.12. Предположим, что функции $\varphi_i(t,x)$ имеют вид (4.81), причём выражения:

$$
\begin{gathered}
t\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1\overline{u}_1 x+2\beta_2\overline{u}_2 x}; \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial t}e^{2\beta_i\overline{u}_i x}; \\
t\psi_i e^{2\beta_i\overline{u}_i x}; \quad \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| e^{2\beta_i\overline{u}_i x}; \quad t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)e^{2\beta_i\overline{u}_i x}
\end{gathered}
\tag{4.135}
$$

ограниченны с весом $\frac{1}{1+|t|}$ и выполняется условие (4.76), но $n_i \geqslant 1$.

Тогда имеет место оценка (4.101), причём в случае $n_i > 1$ выполняется утверждение (4.125), а при $n_i = 1$ низкотемпературный предел величины $\widetilde{\Delta}'$ таков:

$$
\begin{gathered}
\lim_{\beta_i\to+\infty}\widetilde{\Delta}' \\
= \sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left|\mu_i(x)\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\widehat{V}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)\right| \\
+4\pi d^2\rho_{01}\rho_{02}|\widehat{V}_1-\widehat{V}_2|\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left[\mu_1(x)\mu_2(x)\psi_1(t,x)\psi_2(t,x)\right] \\
+2\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\left|\left(\overline{u}_{0i},\widehat{V}_i\right)\right|\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\left\{\mu_i(x)\psi_i(t,x)\right\},
\end{gathered}
\tag{4.136}
$$

где:

$$
\mu_i(x) = e^{2\overline{u}_{0i}x}. \tag{4.137}
$$

Доказательство. Используем неравенство (4.104), которое, очевидно сохраняет силу. Производные функции φ_i вида (4.81) по переменным t и x представлены формулами (4.86) и (4.87).

Производные (4.86), (4.87) подставим в неравенство (4.104) и получим следующее выражение для $\widetilde{\Delta}'$:

$$
\begin{gathered}
\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\sum_{i=1}^{2}\int_{R^3}dp\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left((\overline{u}_i,\widehat{V}_i)-t\overline{u}_i^2\right)\right. \\
\left.+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i-\overline{u}_i t\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|\frac{\rho_{0i}e^{2\beta_i\overline{u}_i x}}{\pi^{3/2}}e^{-p^2}
\end{gathered}
$$

$$+\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\frac{4\rho_{01}\rho_{02}\psi_1\psi_2 d^2 e^{2\beta_1\overline{u}_1 x+2\beta_2\overline{u}_2 x}}{\pi^2}$$
$$\times\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+(\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|,$$

что не превосходит такой величины:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\int_{R^3}dp\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i-\overline{u}_i t\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|e^{2\beta_i\overline{u}_i x}e^{-p^2}$$
$$+\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\frac{4\rho_{01}\rho_{02}\psi_1\psi_2 d^2 e^{2x(\beta_1\overline{u}_1+\beta_2\overline{u}_2)}}{\pi^2}$$
$$\times\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1 e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\widehat{V}_1-\widehat{V}_2+(\overline{u}_2-\overline{u}_1)t\right|$$
$$+2\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}}\sup_{(t,x)\in R^4}\frac{1}{1+|t|}\int_{R^3}dp\beta_i\psi_i\left|\left((\overline{u}_i,\widehat{V}_i)-t\overline{u}_i^2\right)\right|e^{2\beta_i\overline{u}_i x}e^{-p^2}.$$

Далее, переходя к низкотемпературному пределу в последнем выражении и используя условие (4.76), получаем выражение (4.125) при $n_i>1$, а в случае $n_i=1$ имеем утверждение (4.136) с функциями $\mu_i(x)$ вида (4.137). □

В последней теореме получен предел величины $\widetilde{\Delta}'$ из оценки (4.101), что позволяет сформулировать еще одно достаточное условие минимизации невязки (2.12).

Следствие 4.8. Пусть выполняется условие (4.76) при $n_i\geqslant 1,$ а также условие (4.111) Следствия 4.6, а функции ψ_i имеют вид (4.130) или (4.131). Тогда выполняются утверждения (4.113) и (4.132).

Доказательство. Сначала проверим, что данные функции при выполнении условий этого следствия удовлетворяют требованию Теоремы 4.12. Равенство:

$$t\psi_1\psi_2 e^{2\beta_1\overline{u}_1 x+2\beta_2\overline{u}_2 x}=0$$

выполняется в силу первого пункта Следствия 4.7, а в случае $\widehat{V}_1=\widehat{V}_2$

сделаем замену переменных:

$$y = x - \widehat{V}_i t$$

и получим:

$$tC_1(y)C_2(y)e^{2y(\beta_1\overline{u}_1+\beta_2\overline{u}_2)},$$

что, учитывая финитность функции $C_i(y)$, после умножения на $\frac{1}{1+|t|}$, будет ограниченно.

Если же функции ψ_i брать в виде (4.131) и снова рассмотреть предположение $\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2$, то после разложения вектора x по ортогональному базису $\overline{u}_i, \widehat{V}_i, \left[\overline{u}_i \times \widehat{V}_i\right]$ (вследствие (4.111)) благодаря специфике своего аргумента, функция $\psi_i = C_i\left(\left[x \times \widehat{V}_i\right]\right)$ зануляется в тех направлениях в R^3, по которым соотвествующие экспоненты в условиях Теоремы 4.12 возрастают.

Наконец, пользуясь утверждением Теоремы 4.12, видим, что все слагаемые в (4.136) обнуляются, в силу условий данного следствия. $\square$

Найденные в Следствии 4.5 данной работы решения $\psi_i(t, x)$ вида (4.109) ранее для изучаемой здесь модели не встречались. Их особенностью является очень быстрое (быстрее любой обратной степени экспоненты) убывание по времени, т.е. при $t \to \pm\infty$, что и означает "быстро релаксирующие решения". Подобные решения стали возможны только благодаря рассмотрению невязки с весом вида (2.12) в сочетании с условием бесконечной малости множителей s_i.

В следствиях 4.5 и 4.6 описаны разные варианты поведения параметров, которые входят в уравнение Бриана-Пиддака и в само бимодальное распределение f, однако они приводят к одним и тем же результатам, а именно бесконечной малости величины $\widetilde{\Delta}$. Например, если векторы $\widehat{V}_{0i}$ стремятся к нулю быстрее (случай $k_i > \frac{1}{2}$), то их направление в пространстве остается произвольным; если же скорость их убывания меньше, что соответствует $k_i = \frac{1}{2}$, то необходимо привлечение дополнительного условия (4.111), которое обеспечивает ограниченность по t соответствующих выражений (4.70) с весом (4.97) (см. также второе слагаемое в (4.103)), а значит конечность самой невязки (2.12) и ее предела.

Интересно,что при отказе от предположения (4.100) вообще или изменении степени знаменателя в (4.98), как можна убедиться, результаты предельных переходов по β_i становятся просто бесконечными или тривиальными.

Также отметим, что в Теореме 4.9 данной работы параметр d, который входит в формулу (2.3) остается фиксированным, в то время как при получении других результатов рассматривается и предельный переход $d \to 0$. Физически это означает, что ”быстро релаксирующие решения” возможны и для больцмановского газа, т.е. при конечных значениях числа Кнудсена [13], а не только для околосвободномолекулярных потоков, т.е. при числе Кнудсена, которое стремится к бесконечности (очень сильно разреженный газ).

4.3. Взаимодействие потоков, описывающих винтовое движение типа ”ускорение-уплотнение” для модели шероховатых сфер

Как и в пункте 4.2. в бимодальном распределении (2.9) в виде максвеллианов M_i будем брать выражения, описываемые представлением (4.33), выражение для плотности ρ_i (4.58) сохраняется, а вот массовая скорость преобразуется в следующее выражение:

$$\overline{V}_i = \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t, \qquad (4.138)$$

где $\overline{\omega}_i$ – угловая скорость потока газа в целом, $\widehat{V}_i$ – произвольный постоянный вектор, означающий линейную скорость движения газа вдоль оси вращения, $\overline{u}_i$ – произвольный вектор, паралельный $\overline{\omega}_i,$ т.е.

$$\overline{u}_i || \overline{\omega}_i. \qquad (4.139)$$

Прежде чем перейти к формулированию основных результатов сделаем некоторое преобразование выражения (4.33). Для начала введем обозначение:

$$\rho_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{4.140}$$

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i (\overline{V}_i^2 + 2\overline{u}_i x)}, \tag{4.141}$$

где:

$$r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2} \left[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})\right]^2, \quad x_{0i} = \frac{[\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i]}{\overline{\omega}_i^2}, \tag{4.142}$$

x_{0i} – точка, через которую проходит ось скорости в момент времени $t = 0$.

Теперь используем тождество, приведенное в работе [96]:

$$\overline{V}_i^2 = \overline{\omega}_i^2 r_i^2 + \left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2} (\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i) - \overline{u}_i t \right)^2, \tag{4.143}$$

истинность которого вытекает из формул (4.138), (4.142) и условия коллинеарности векторов $\overline{u}_i$ и $\overline{\omega}_i,$ (4.139). Таким образом, используя (4.143) можно преобразовать представление (4.141) следующим образом:

$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2} (\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i) - \overline{u}_i t \right)^2 + 2\overline{u}_i \beta_i x}. \tag{4.144}$$

Значит, выражение (4.33) принимает вид:

$$M_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left(\left(V - \overline{V}_i \right)^2 + I \omega^2 \right)}. \tag{4.145}$$

С физической точки зрения выражение (4.145) означает следующее. Функция M_i описывает вращение газа как целого с угловой скоростью $\overline{\omega}_i$ вокруг неподвижной оси, проходящей через точку x_{0i} (величина r_i^2 есть квадрат расстояния от точки $x \in R^3$ до этой оси), а $\overline{\rho}_i$ задает распределение плотности (причем $\overline{u}_i x$ – ее минимальное значение по всем $r \in [0; +\infty)$ при фиксированном моменте времени t) вдоль оси вращения. Также заметим, что функции (4.138), (4.141) возрастают по t и x, при этом (4.138) линейна по t, а (4.141) линейна по x именно вдоль оси, задаваемой вектором $\overline{\omega}_i$ в силу параллельности $\overline{u}_i$ и $\overline{\omega}_i,$ что оправдывает название этого пункта (вектор $\overline{u}_i$ – играет роль "массового ускорения", а $\overline{V}_i$ массовой скорости вдоль оси $t=0$).

Теорема 4.13. Пусть распределение f задается формулами (2.9), (4.33), (4.138), а функции $\varphi_i(t,x)$ имеют вид:

$$\varphi_i(t,x)=\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}}C_i\left(x+\overline{\omega}_i t^2\frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i\overline{\omega}_i}\right), \tag{4.146}$$

где $D_i>0, s_i\geqslant\frac{1}{2}$ — произвольные постоянные, а C_i — произвольные, неотрицательные, гладкие, финитные или быстроубывающие функции указанных векторных аргументов.

Предположим, что:

$$\overline{\omega}_i=\overline{\omega}_{0i}\beta_i^{-m_i},\quad \overline{u}_i=\overline{u}_{0i}\beta_i^{-n_i}, \tag{4.147}$$

$$\widehat{V}_i=0, \tag{4.148}$$

где $\overline{\omega}_{0i},\overline{u}_{0i}\in R^3$ — произвольные, фиксированные векторы, а на числа m_i,n_i накладываются условия:

$$m_i\geqslant\frac{1}{2},\quad n_i\geqslant 1. \tag{4.149}$$

Тогда существует такая величина Δ', что выполняется неравенство (4.16), при этом имеет место утверждение:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_iK_i(s_i)\sup_{x\in R^3}(C_i(x)\mu_i(x)), \tag{4.150}$$

где:

$$K_i(s_i)=2s_i\sup_{t\in R^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}, \tag{4.151}$$

$$\mu_i(x)=\left[\begin{array}{ll} 1, & m_i>\frac{1}{2}, n_i>1;\\ e^{2\overline{u}_{0i}x}, & m_i>\frac{1}{2}, n_i=1;\\ e^{[\overline{\omega}_{0i}\times x]^2}, & m_i=\frac{1}{2}, n_i>1;\\ e^{[\overline{\omega}_{0i}\times x]^2+2\overline{u}_{0i}x}, & m_i=\frac{1}{2}, n_i=1. \end{array}\right. \tag{4.152}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что неравенство (4.42) остается в силе, а если учесть интеграл (4.9) (с заменой β_2 на β_i) и выполняя замену переменных $p = \sqrt{\beta_i}(V - \overline{V}_i)$, можно получить:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$
$$+ \frac{4d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \varphi_1 \varphi_2}{\pi^2}$$
$$\times \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \qquad (4.153)$$

Далее делаем переход к супремуму в неравенстве (4.153), обоснованность возможности которого следует из сделанных предположений в доказываемой теореме:

$$\Delta$$
$$\leqslant \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \Big| D(f) - Q(f,f) \Big|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \overline{\rho}_i e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$
$$+ \frac{4d^2}{\pi^2} \sup_{(t,x) \in R^4} \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2$$
$$\int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \qquad (4.154)$$

Ввиду условия теоремы (4.148) вместо (4.138), (4.141), (4.142), (4.144) будем иметь:

$$\overline{V}_i = [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t, \quad r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2} \left[\overline{\omega}_i \times x \right]^2,$$
$$\overline{\rho}_i = \rho_{0i} e^{\beta_i ([\overline{\omega}_i \times x]^2 + \overline{u}_i^2 t^2)}. \qquad (4.155)$$

Далее используя выражения (4.155), вид локальных максвеллианов (4.145), известные свойства модуля, скалярного произведения, интегралов и точных верхних граней, а также неравенство (4.16), имеем:

$$\Delta'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| e^{\beta_i\left([\overline{\omega}_i \times x]^2 + \overline{u}_i^2 t^2 + 2\overline{u}_i x\right)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,x)\in R^4} \int_{R^3} dp \left(\frac{|p|}{\sqrt{\beta_i}} + |[\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t| \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \right) \overline{\rho}_i e^{\beta_i [\overline{\omega}_i \times x]^2} \frac{e^{-p^2}}{\sqrt{\pi^3}}$$

$$+ \frac{4d^2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2}$$

$$\times \sup_{(t,x)\in R^4} \left\{ \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 [\overline{\omega}_1 \times x]^2 + \beta_2 [\overline{\omega}_2 \times x]^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| \right\}. \quad (4.156)$$

Для существования Δ', как следует из ее вида (4.156), достаточно проверить, что если функции φ_i имеют вид (4.146), то произведение функций

$$\varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right|, \quad \varphi_i \left| [\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t \right|, \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| |[\overline{\omega}_i \times x] - \overline{u}_i t| \quad (4.157)$$

на множитель (4.140) с учетом условия теоремы (4.148) ограничены по $(t, x) \in R^4$ (сходимость всех интегралов очевидна ввиду наличия выражения

$$\left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|$$

и присутствия в интегралах убывающих экспонент).

Рассмотрим первое произведение $\varphi_i \rho_i$, для чего сделаем замену:

$$y = x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}, \quad (4.158)$$

после которой указанное произведение принимает вид:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i(y) \rho_{0i} e^{\beta_i\left(2\overline{u}_i y + [\overline{\omega}_i \times y]^2\right)}. \quad (4.159)$$

Следовательно, учитывая свойства функции C_i, которые описаны в условиях Теоремы 4.13, произведение (4.159) ограниченно по $y \in R^3$, а ограниченность по времени t вытекает из условия показателя степени $s_i \geqslant \frac{1}{2}$. По таким же причинам ограниченно произведение четвертой из перечисленных функций (4.157) на плотность ρ_i после предложенной замены (4.158), ввиду возможности оценки сверху следующим выражением:

$$\frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i(y) \rho_{0i} e^{\beta_i\left(2\overline{u}_i y + [\overline{\omega}_i \times y]^2\right)} \left(|[\overline{\omega}_i \times y]| + |t||\overline{u}_i|\right). \tag{4.160}$$

Аналогично проверяется ограниченность произведений плотности ρ_i на оставшиеся функции (4.157), после нахождения следующих производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} C_i' \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}\right), \\
\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} &= \frac{-2ts_i D_i}{(1+t^2)^{s_i+1}} C_i \left(x + \overline{\omega}_i t^2 \frac{\overline{u}_i^2}{2\overline{u}_i \overline{\omega}_i}\right) \\
&\quad + \frac{D_i}{(1+t^2)^{s_i}} \left(C_i' \cdot \overline{\omega}_i\right) \cdot \frac{t\overline{u}_i^2}{\overline{u}_i \overline{\omega}_i},
\end{aligned} \tag{4.161}$$

где $(C_i' \cdot \overline{\omega}_i)$ – скалярное произведение градиента функции C_i на угловую скорость $\overline{\omega}_i$.

Итак, учитывая условия теоремы (4.147), (4.148) и найденные производные функции φ_i (4.161) видим, что исследуемая величина Δ' (4.156) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\Delta' \\
&= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i}} e^{2\overline{u}_{0i} y \beta_i^{1-n_i} + \beta_i^{1-2m_i} [\overline{\omega}_{0i} \times y]^2} \right. \\
&\qquad \left. \times \left| \frac{2s_i}{1+t^2} C_i(y) + \left(C_i'(y) \cdot \overline{\omega}_i\right) \frac{t\overline{u}_{0i}^2}{\overline{u}_{0i} \overline{\omega}_{0i}} \beta_i^{-n_i} \right| \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \left(\frac{|p|}{\sqrt{\beta}_i} + \left|\beta_i^{-m_i} [\overline{\omega}_{0i} \times y] - \overline{u}_{0i} t \beta_i^{-n_i}\right| \frac{D_i |C_i'(y)|}{(1+t^2)^{s_i}} \right) \right. \\
&\qquad \left. \times \rho_{0i} e^{2\overline{u}_{0i} y \beta_i^{1-n_i} + [\overline{\omega}_{0i} \times y]^2 \beta_i^{1-2m_i}} \right\} \frac{e^{-p^2}}{\pi^{3/2}} \\
&+ \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \sup_{(t,y)\in R^4} \left\{ \frac{D_1 D_2}{(1+t^2)^{s_1+s_2} C_1(y) C_2(y)} \right. \\
&\times \exp\left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(\beta_i^{1-2m_i} [\overline{\omega}_{0i} \times y]^2 + 2y\overline{u}_{0i} \beta_i^{1-n_i}\right) \right\} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} \right.
\end{aligned}$$

$$+[\overline{\omega}_{01}\times y]\beta_1^{-m_1}-[\overline{\omega}_{02}\times y]\beta_2^{-m_2}+t\left(\overline{u}_{02}\beta_2^{-n_2}-\overline{u}_{01}\beta_1^{-n_1}\right)\Big|. \qquad (4.162)$$

Далее остается перейти к пределу при $\beta_i\to+\infty$ в последнем равенстве (4.162), обоснованность возможности такого перехода аргументируется свойствами функции C_i, а для перехода под знаком супремума используем приведенную в работе [96] лемму 1, проверка условий которой легко осуществляется исходя из условий рассматриваемой теоремы.

Итак, рассмотрим четыре случая значений m_i и n_i, которые следуют из условия (4.149).

1) Если $m_i>\frac{1}{2},\quad n_i>1:$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\cdot 2s_i\sup_{t\in R^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}\sup_{x\in R^3}C_i(x). \qquad (4.163)$$

2) В случае $m_i>\frac{1}{2},\quad n_i=1:$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\sup_{t\in R^1}\frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}\sup_{x\in R^3}\left(C_i(x)e^{2\overline{u}_{0i}x}\right). \qquad (4.164)$$

3) При $m_i=\frac{1}{2},\quad n_i>1:$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\sup_{t\in R^1}\frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}\sup_{x\in R^3}\left(C_i(x)e^{[\overline{\omega}_{0i}\times x]^2}\right). \qquad (4.165)$$

4) и в последнем варианте $m_i=\frac{1}{2},\quad n_i=1:$

$$\lim_{\beta_i\to+\infty}\Delta'=\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}D_i\sup_{(t,x)\in R^4}\left\{\frac{2s_i|t|}{(1+t^2)^{s_i+1}}C_i(x)e^{2\overline{u}_{0i}x+[\overline{\omega}_{0i}\times x]^2}\right\}. \qquad (4.166)$$

Таким образом, найденные пределы величины Δ' при разных значениях показателей степени m_i и n_i (4.163) – (4.166) подтверждают истинность утверждения теоремы (4.150) – (4.152).

□

Следствие 4.9. Пусть выполнены все условия Теоремы 4.13, тогда для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для любых достаточно малых коэффициентов $D_1, D_2,$ а β_1, β_2- достаточно больших достигается бесконечная малость невязки Δ(2.10). То есть выполняется утверждение Теоремы 4.5 (4.64).

Доказательство. Исходя из вида предела Δ' в формулах (4.150) – (4.152) и неравенства (4.16), легко видеть, что вся сумма, благодаря специальному подбору констант D_1, D_2 в правой части (4.150) зануляется, что и доказывает утверждение (4.64), приведенное в Теореме 4.5. □

Сформулируем еще одну теорему для рассматриваемого распределения (2.9).

Теорема 4.14. Пусть коэффициентные функции в бимодальном распределении (2.9) имеют следующий вид:

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)\rho_{0i}[\overline{\rho}_i(t,x)]^{-1}e^{-\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{4.167}$$

где r_i^2 и $\overline{\rho}_i(t,x)$ представлены в (4.141), (4.142). Пусть при выполнении условий:

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad n_i > 1 \tag{4.168}$$

также остается верным предположением (4.147). Тогда, если функции:

$$\psi_i(t,x) = D_i C_i(t) E_i(x), \tag{4.169}$$

где $C_i(t), E_i(x) \geqslant 0$ – гладкие финитные или быстроубывающие, то утверждение (4.64) остается в силе.

Доказательство. По-прежнему остается верным неравенство (4.154), однако ввиду условия (4.167) необходимо заново вычислить производные:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\left(\frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}_i^2}\left(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i\right) - \overline{u}_i t\right)\right)\varphi_i\psi_i^{-1}, \\
\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\left(\overline{u}_i + [[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \overline{\omega}_i]\right)\right)\varphi_i\psi_i^{-1}.
\end{gathered} \tag{4.170}$$

Далее подставим (4.170) в оценку (4.154) и получим представление для Δ' :

$$\Delta'$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \cdot \frac{(\overline{\omega}_i, \overline{u}_i)}{\overline{\omega}_i^2} \left(\left(\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i \right) - \overline{u}_i^2 t \right) \right.$$
$$\left. + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta}_i} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i \left(\overline{u}_i + [[\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i})] \times \overline{\omega}_i] \right) \right) \right| e^{-p^2}$$
$$+ \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2}$$
$$\sup_{(t,x)\in R^4} \left(\psi_1 \psi_2 \left| \frac{q}{\sqrt{\beta}_1} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta}_2} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| \right). \tag{4.171}$$

Конечность полученной величины Δ' обеспечивается тем, что если выполнено условие (4.169), то все функции (4.157) (с заменой φ_i на ψ_i) ограничены на R^4.

Перейдем к пределу в последнем равенстве, принимая во внимание (4.147), возможность перехода аргументируется аналогично тому, как это сделано при доказательстве Теоремы 4.13. Таким образом, имеем:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta'$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_{0i}}{\pi^{3/2}} \int_{R^3} dp \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right| e^{-p^2}$$
$$+ \frac{4d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \sup_{(t,x)\in R^4} \left(\psi_1 \psi_2 \left| \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| \right),$$

что в итоге равно:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta'$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|$$
$$+ 4\pi d^2 \rho_{01} \rho_{02} \left| \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| \sup_{(t,x)\in R^4} (\psi_1 \psi_2).$$

И теперь остается подставить вид функции $\psi_i(t,x)$ из (4.169), что дает следующее:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty} \Delta'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} D_i \sup_{(t,x)\in R^4} \left| E_i(x) C_i'(t) + \widehat{V}_i E_i'(x) C_i(t) \right|$$

$$+4\pi d^2 \rho_{01}\rho_{02} \left| \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right| D_1 D_2 \sup_{t\in R^1} (C_1(t) C_2(t)) \sup_{x\in R^3} (E_1(x) E_2(x)).$$

Учитывая, бесконечную малость величин D_1, D_2 получаем, что утверждение (4.64) действительно выполняется. □

Таким образом, в пункте 4.3. продемонстрировано, что некоторые результаты, полученные ранее для более простой модели твердых сфер, распространяются также и на модель Бриана-Пиддака.

4.4. Выводы к разделу

В разделе получены приближенные решения уравнения Бриана-Пиддака в виде бимодального распределения (2.9) с максвелловскими модами, описывающими смерчеобразное движение, движение типа ”ускорение-уплотнение”, а также винтообразное движение ускоряющихся-уплотняющихся потоков. Принимая во внимание приближенный характер решений, использовались такие отклонения, как равномерно-интегральное (2.10), ”чисто-интегральное” (2.11) и невязка с весом (2.12), которые были предложены Гордевским В.Д. в своих работах. В зависимости от невязок, а также вида коэффициентных функций $\varphi_i(t,x)$, были найдены условия достаточные для бесконечной малости указаных невязок, что и означает построение явных приближенных решений уравнения (2.1) – (2.3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена решениям уравнения Больцмана для модели шероховатых сфер. Эта модель была введена Брианом, а методы, развитые Чепменом и Энскогом для общих невращающихся сферических молекул, были распространены на неё Пиддаком, поэтому часто данная модель называется моделью Бриана-Пиддака. Данная модель имеет интересные физические свойства, однако она мало исследовалась, и некоторые важные вопросы, связанные с ней не были ранее рассмотрены.

Единственным точным решением, известным на сегодняшний день, является решение, аналогичное полученному Максвеллом для модели твердых сфер. Одним из важных и актуальных вопросов является поиск наиболее общего вида максвелловских распределений для рассматриваемых молекул.

Кроме того, для модели Бриана-Пиддака ранее было получено лишь несколько приближенных решений в виде бимодального распределения. Поэтому следующим вопросом, который должен был быть решен в этой работе, являлось нахождение новых приближенных решений в виде бимодального распределения с максвелловскими модами, описывающими различные типы движений.

Итак, основные результаты данной диссертации таковы:

- Определен общий вид локальных максвелловских распределений для модели Бриана-Пиддака;
- Подробно классифицированы основные типы движений потоков газа для модели шероховатых сфер;
- Показано, что интеграл столкновений для произвольных максвеллианов, проинтегрированый по пространству линейных и угловых скоростей, обращается в нуль;

- Получено приближенное решение в виде бимодального распределения с модами, описывающими смерчеобразное движение потока газа в случае равномерно-интегрального и чисто-интегрального отклонения между частями уравнения Бриана-Пиддака;

- Показано, что вид бимодального распределения с модами специального типа, описывающими ”ускоряющееся-уплотняющееся” движение газа для модели шероховатых сфер в случае равномерно-интегральной невязки сохраняется в виде, аналогичном тому, который ранее был известен для более простой модели твердых сфер;

- Исследовано взаимодействие двух ускоряющихся-уплотняющихся потоков, где в роли отклонения между частями уравнения Бриана-Пиддака используется ”невязка с весом”;

- Построено приближенное решение в виде бимодального распределения с модами, описывающими винтовое движение типа ”ускорение-уплотнение”, минимизирующее со сколь угодно высокой степенью точности равномерно-интегральную невязку.

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и могут быть использованы при дальнейшем изучении уравнения Бриана-Пиддака и иных родственных ему кинетических уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Boltzmann L. Weitere Studien uber das Warmegleichgrewicht unter Gasmoleculen/ Boltzmann L. // Wien. Acad. Sitzungsber. - 1872. - Bd. 66. - S. 275-370.
2. Больцман Л. Избранные труды/ Больцман Л.-Москва:Наука, 1984.- 590с.
3. Больцман Л. Лекции по теории газов/ Больцман Л.-Москва:Гостехиздат, 1956.- 554с.
4. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике/Боголюбов Н.Н. // Избранные труды в 3-х томах. - К.: Наукова думка, 1970, - Т. 2. - С. 101- 196.
5. Grad H. Principles of the Kinetic Theory of Gases/Grad H. // Handbuch der Physik. - Vol. 12. -Berlin: Springer-Verlag. 1958. - P. 205-294.
6. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов /Карлеман Т. - Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. - 120 с.
7. Чепмен С. Математическая теория неоднородных газов/Чепмен С., Каулинг Т. -Москва: Издательство иностранной литературы, 1960.- 510 с.
8. Гиршфельдер Дж. Молекулярная теория газов и жидкостей /Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. - Москва: Издательство иностранной литературы,, 1961. - 929 с.
9. Коган М.Н. Динамика разреженного газа/Коган М.Н. - Москва: Наука, 1967. - 440 с.

10. Боголюбов Н.Н. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля/Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. // Теоретическая и математическая физика. -1969. -Т. 1, №2. - С. 251- 274.

11. Ферцигер Дж. Математическая теория процессов переноса в газах / Ферцигер Дж., Капер Г.- Москва: Мир, 1976. - 554 с.

12. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов /Черчиньяни К. - Москва: Мир, 1973. - 245 с.

13. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана /Черчиньяни К. - Москва: Мир, 1978.-495 с.

14. Резибуа П. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов /Резибуа П., Де Ленер М. - Москва: Мир, 1980. - 420 с.

15. Берд Дж. Молекулярная газовая динамика /Берд Дж. - Москва: Мир, 1981. - 319 с.

16. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика / Климонтович Ю.Л. - Москва: Наука, 1982. - 608 с.

17. Петрина Д.Я. Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики /Петрина Д.Я., Герасименко В.И. // Успехи математических наук. - 1983. - Т. 38, №5. - С. 3-58.

18. Ланфорд О.Э. Неравновесные явления: уравнение Больцмана /Ланфорд О.Э., Гринберг У., Полевчак Я., Цвайфель П.Ф., Эрнст М.Х., Черчиньяни К., Кэфлиш Р.Э., Шпон Г. - Москва: Мир, 1986. - 269 с.

19. Бобылев А.В. Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау /Бобылев А.В. - АН СССР, Ин-т прикл. матем. им М.В.Келдыша; 322-87. - М.: 1987. - 251

с.(Препринт /АН СССР, Ин-т прикл. матем. им М.В.Келдыша; 322-87.)

20. Петрина Д.Я. Термодинамический предел решений уравнений Боголюбова/Петрина Д.Я. // Труды мат. ин-та АН СССР. -1989. -№191. - С. 192-200.

21. Петрина Д.Я. Про граничну теорему Больцмана-Греда / Петрина Д.Я., Герасименко В.І. // ДАН УРСР, серія А. - 1989. - №11. - С. 12-16.

22. Петрина Д.Я. Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров /Петрина Д.Я., Герасименко В.И. // Успехи математических наук. - 1990. - Т. 45, №3. - С. 135-182.

23. Герасименко В.И. Существование предела Больцмана-Грэда для бесконечной системы упругих шаров /Герасименко В.И., Петрина Д.Я. // Теоретическая и математическая физика - 1990. - Т. 83, №.1.-С. 92-114.

24. Арсеньев А.А. Лекции о кинетических уравнениях / Арсеньев А.А. - Москва: Наука, 1992. - 214 с.

25. Петрина Д.Я. Існування рівноважних станів систем пружних куль в границі Больцмана-Енскога /Петрина Д.Я., Петрина К.Д.// Доповіді НАН України. - 1996. -№2. - С. 30-34.

26. Cercignani C. Many-particle dynamics and kinetic equations /Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. -Dortrecht.: Kluver Academic Publisher Group, 1997. - 244 p.

27. Gerasimenko V.I. On the generalized kinetic equation /Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya.// Доповіді НАН України. - 1997. - №7. - С. 7-12.

28. Bryan G.H. On the Application of the Determinantal Relation to the Kinetic Theory of Polyatomic Gases/Bryan G.H. // Rep. British Ass. Adv. Sci. - 1894. - Vol. 64. - P. 102-106.

29. Pidduck F.B. The kinetic theory of a special type of rigid molecule /Pidduck F.B. // Proc. Royal Soc.- 1922.-Vol. A101.-P 101-110.

30. Mc Coy B.J. Transport properties of polyatomic fluids IV. The kinetic theory of a dense gas of perfectly rough spheres /Mc Coy B.J., Sandler S.J., Dahler J.S. // J. Chem. Phys. -1966. - Vol. 45, №10. - P. 3485-3512.

31. Brau C.A. Structure of shock waves in diatomic gases /Brau C.A., Simans G.A., Macomber H.K. // Rarefied Gas Dynamics, Trilling L., Wachman H. (eds). - New York: Academic Press, 1969.-Vol. 1,№4.-P. 331-343.

32. Cercignani C. On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres /Cercignani C., Lampis M. // J. Statist. Phys. - 1988. - Vol. 53. - P. 655-672.

33. Галкин B.C. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана /Галкин B.C. // Прикладная математика и механика - 1956. - Т. 20, №3. - С.445-446.

34. Ikenberry T. On the pressure and the flux of energy in a gas according to Maxwell’s kinetic theory, 1, 2 /Ikenberry T., Truesdall C. // J. Ration. Mcch. and Anal. - 1956. - Vol. 5, №1.-P. 1-129.

35. Bobylev A.V. Self-Similar Solutions of the Boltzmann Equation and Their Applications /Bobylev A.V., Cercignani C. // J. Statist. Phys. - 2002. - Vol. 106, №5/6. - P. 1039- 1071.

36. Polewczak J. Global Existence in L1 for the Generalized Enskog Equation /Polewczak J. // J. Statist. Phys. - 1990. - Vol. 59, №1-2. - P. 461-500.

37. Cercignani C. Global Existence in L1 for the Enskog Equation and Convergence of the Solutions to Solution of the Boltzmann Equation / Cercignani C., Arkeryd L.// J. Statist. Phys. - 1990. - Vol. 59, №3-4. - P. 845-867.

38. Герасименко В.И. О существовании глобальных решений задачи Коши для уравнений Боголюбова /Герасименко В.И. // ДАН УССР. - 1991. - №9. - С. 41-45.

39. Струминский В.В. О методе Гильберта решения кинетического уравнения Больцмана /Струминский В.В. // ДАН СССР. - 1964. - Т. 158, №1. - С. 70-73.

40. Мацук В.А. О методе Чепмена-Энскога для смеси газов /Мацук В.А., Рыков В.А. // ДАН СССР. - 1977. - Т. 233, №1. - С. 49-51.

41. Моисеев-Ольховский И.И. Об одной плоской линейной задаче обобщенной гидродинамики / Моисеев-Ольховский И.И.// ДАН СССР. - 1958. - Т. 118, №3. - С. 468- 471.

42. Скворцов Г.Е. Спектр и эволюция больцмановских систем /Скворцов Г.Е. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 1967. - Т. 52, №3. - С. 1283-1296.

43. Черемисин Ф.Г. Проверка качества аппроксимации интеграла Больцмана релаксационной кинетической моделью Крука /Черемисин Ф.Г. // Механика жидкости и газа. - 1970. - №4. - С. 3-7.

44. Долгошеина Е.Б. Точные решения модельного БГК-уравнения Больцмана в задачах о скачке температуры и слабом испарении / Долгошеина Е.Б., Латышев А.В., Юшканов А.А.// Известия РАН, Серия "Механика жидкости и газа". - 1992. - №1. - С. 163-171.

45. Platkowsky T. Discrete velocity models of the BE: A survey on the mathematical aspects of the theory/Platkowsky T., Illner R. // SIAM Review. - 1988. - Vol. 30, №2. - P. 213-255.

46. Герасименко В.І. Рівняння Боголюбова для дискретної моделі одновимірної системи часток / Герасименко В.І., Горунович В.В.// ДАН УРСР. - 1991. - №8. - С. 31-35.

47. Bobylev A.V. On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models /Bobylev A.V., Palczewski A., Schneider J. // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie I Math. - 1995. - Vol. 320, №5. - P. 639-644.

48. Мингалев О.В. О решениях в виде бегущей волны в одной дискретной модели уравнения Улинга-Уленбека / Мингалев О.В.// ДАН СССР. - 1992. - Т. 323, №6. - С. 1029-1033.

49. Веденяпин В.В. О дискретных моделях квантового уравнения Больцмана /Веденяпин В.В., Мингалев И.В., Мингалев О.В. // Математический сборник. - 1993. - Т. 183, №11. - С. 21-38.

50. Горелов С.Л. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло /Горелов С.Л., Коган М.Н. // Механика жидкости и газа. - 1968. - №6.-С. 136-139.

51. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики /Самарский А.А., Попов Ю.П. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

52. Maxwell J.C. On the final state of a system of molecules in motion subject to forces of any kind / Maxwell J.C.// Nature. - 1873. - Vol. 8. - P. 537-553.

53. Maxwell J.C. The kinetic theory of gases /Maxwell J.C. // Nature. - 1877. - Vol. 16. - P. 242-246.

54. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases /Grad H.// Comm. Pure and Appl. Math. - 1949. - Vol. 2, №4. - P. 331-407.

55. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана / Фридлендер О.Г.//Прикладная математика и механика - 1965. - Т. 29, вып. 5. - С. 973-977.

56. Тамм И.Е. О ширине ударных волн большой интенсивности /Тамм И.Е.// Труды ФИАН. - 1965. - Т.29. - С. 239-249.

57. Mott-Smith H.M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave / Mott-Smith H.M.// Phys. Rev. - 1951. - Vol. 82, №6. - P. 885-890.

58. Sakurai A. A. note on Mott-Smith's solution of the Boltzmann equation for a shock wave /Sakurai A. A. // J. Fluid Mech. - 1957. - Vol. 3, №3. - P. 255-260.

59. Caflish R. Shock profile solutions of the Boltzmann equation / Caflish R., Nicolaenko B.// Comm. Math. Phys. - 1982. - Vol. 86, №2. - P. 161-194.

60. Salwen H. Extension of the Mott-Smith Method for a One-Dimensional Shock Wave / Salwen H., Grosh C., Ziering S.// Phys. Fluids. - 1964. - Vol. 7, №2. - P. 180- 189.

61. Holway L.H. Kinetic theory of shock structure using an ellipsoidal distribution function / Holway L.H.// Rarefied Gas Dynamics. - New York: Academic Press. - 1965. - Vol. l.-P. 193-215.

62. Grad H. Singular and nonuniform limits of solutions of the Boltzmann equation / Grad H.// Transport Theory (Bellman R.I. et al. cds). - Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. - 1969. - Vol. 1. - P. 269-308.

63. Deshpande S.M. The Boltzmann collision integrals for a combination of Maxwellians /Deshpande S.M., Narasimha R.// J. Fluid Mech. - 1969. - Vol. 36, №3. - P. 545- 554.

64. Narasimha R. Minimum error solution of the Boltzmann equation for shock structure / Narasimha R., Deshpande S.M.// J. Fluid Mech. - 1969. - Vol. 36, №3. - P. 555- 570.

65. Hosokawa I. Local Entropy Balance through the Shock Wave / Hosokawa I., Inage S.// J. Phys. Soc. Japan. - 1986. - Vol. 55, №10. - P. 3402-3409.

66. Hosokawa I. Nonexistence of Any Exact Bimodal Solution for the Shock Wave Structure at $M = \infty$ /Hosokawa I., Yamamoto K.// J. Phys. Soc. Japan. - 1988. - Vol. 57, №6.-P. 1865-1867.

67. Takata S. The velocity distribution function in an infinitely strong shock wave / Takata S., Aoki K., Cercignani C.// Phys. Fluids. - 2000. -Vol. 12. - P. 2116-2127.

68. Анисимов С.И. Об испарении металла, поглощающего лазерное излучение /Анисимов С.И. // Журн. эксперим. и теор. физ. - 1968. - Т. 54, вып. 1. - С. 339- 342.

69. Ytrehus T. Slow evaporation and condensation /Ytrehus T., Bedeaux D., Hermans J.// Physica A. - 1990. - Vol. 169. - P. 263-280.

70. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер /Гордевский В.Д. // Математическая физика, анализ, геометрия - 1995. - Т. 2, №2.-С. 168-176.

71. Гордевский В.Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана /Гордевский В.Д.// Математическая физика, анализ, геометрия - 1997. - Т. 4, №1/2. - С. 46-58.

72. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана / Гордевский В.Д.// Теоретическая и математическая физика - 1998. - Т. 114, №1. - С. 126-136.

73. Gordevsky V.D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation /Gordevsky V.D. // Math. Meth. Appl. Sci. - 1998. - Vol. 21. - P. 1479-1494.

74. Gordevsky V.D. Approximate Biflow Solutions of the Kinetic Bryan-Pidduck Equation /Gordevsky V.D.// Math. Meth. Appl. Sci. - 2000. - Vol. 23. - P. 1121-1137.

75. Gordevskyy V.D. Interaction between non-uniform flows in a gas of rough spheres/Gordevskyy V.D., Sysoyeva Yu.A. // Matem. fiz., analiz, geom. - 2002. - Vol. 9, №2. - P. 285- 293.

76. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians /Gordevsky V.D.// Math. Meth. Appl. Sci. (MMA 455) - 2004. - Vol. 27, №2. - P. 231 -247.

77. Гордевский В.Д. Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер/Гордевский В.Д., Гукалов А.А. // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**. – №5. – С. 629–639.

78. Гордевский В.Д. Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака./ Гордевский В.Д., Гукалов А.А.// Вісник харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка».– 2011.–№ 990–С/ 27-41.

79. Gukalov A.A. Interaction between "Accelerating-Packing"Flows for the Bryan-Pidduck Model /Gukalov A.A. //Matem. fiz., analiz, geom. - 2013. - Vol. 9, № 3. - P. 316–331.

80. В. Д. Гордевский Взаимодействие локально-максвелловских потоков в модели шероховатых сфер./Гордевский В.Д., Гукалов А.А. //ТМФ,– 2013– т.176–№ 2, С. 322–336

81. Гордевський В.Д. Взаємодія смерчових течій у випадку моделі шорсткуватих куль. /Гордевський В.Д., Гукалов О.О. //Вісник харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка».– 2013.–№ 1061–С/ 4-16.

82. Гордевський В.Д. Бімодальний розподіл з гвинтовими модами для моделі Бріана-Піддака/Гордевський В.Д., Гукалов О.О.//Збірник праць Ін-ту математики НАН України.–том 11.– № 1.–2014.–С. 178-191.

83. Общий вид максвелловских распределений для модели Бриана-Пиддака. /Гордевский В.Д., Гукалов А.А. // XIV міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, тезисы докладов, 19-21 апреля 2012г., Киев, с.134.

84. Минимизация невязки с весом для уравнения Бриана-Пиддака/Гордевский В.Д., Гукалов А.А. //XVI International Conference Dynamical system modeling and stability investigation/ Abstracts of conference reports. May 29-31, 2013. Kiev. p.182.

85. General form of the Maxwellian distribution for the model of rough spheres/Gordevskyy V. D., Gukalov A. A. // International Conference Analysis and Mathematical Physics, 24-28 June, 2013, Kharkiv, Ukraine.

86. Взаимодействие смерчеобразных потоков для модели шероховатых сфер/Гордевский В.Д., Гукалов А.А. //Международная конференция посвященная 105-летию со дня рождения С.Л.Соболева./Тезисы докладов. 18-24 августа 2013г.,Новосибирск,с.118.

87. Tong Yang A Half-space Problem for the Boltzmann Equation with Specular Reflection Boundary Condition Communications in Mathematical Physics/Tong Yang, Hui-Jiang Zhao April 2005, Volume 255, Issue 3, P. 683-726.

88. Roman Pohrt Popov Contact Mechanics of Rough Spheres: Crossover from Fractal to Hertzian Behavior, Hindawi Publishing Corporation Advances in Tribology/ Valentin L. Volume 2013, Article ID 974178, 4 pages

89. James T. Koenders Hydrodynamic Interaction of Rough Spheres /James T. Jenkins M. A. preprint http://www.newton.ac.uk/preprints/NI03081.pdf

90. Francis Filbert On deterministic approximation of the Boltzmann equation in a bounded domain Multiscale /Francis Filbert // Modeling and Simulation vol 10 issue 3 (2012), pp. 792–817.

91. Бобылев А.В. Аналитическое и численное исследование модельного кинетического уравнения /Бобылев А.В., Препринты ИПМ, 1996, 060.

92. Гордевский В.Д. Приближенные решения уравнения Больцмана в пространстве с весом /Гордевский В.Д.// Докл. НАН Украины. Серия Математика, естествознание и технические науки, 2009–№11, С. 13–16.

93. Bobylev A.V. On some properties of linear and linearized Boltzmann collision operators for hard spheres. /Bobylev A.V. Mossberg E.//Kinet. Relat. Models 1, 2008 No. 4, P. 521-555.

94. Gordevskyy V.D.Interaction between ”accelarating-packing” flows in low-temperature gas /Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V.//Math. Phys., Anal., Geom.-2009.– 5.-№1.-P.38-53.

95. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами /Гордевский В.Д.// Теоретическая и математическая физика - 2001. - Т. 126, №2. - С. 283-300.

96. Гордевский В.Д. ”Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер” /Гордевский В.Д.// Теоретическая и математическая физика - 2009. - Т. 161, №2. - С. 278-286.

97. Владимиров В.С. Уравнения математической физики /Владимиров В.С. - Москва: Наука, 1971. - 512 с.