МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна

На правах рукопису

Лемешева Наталя Володимирівна

УДК 533.72

ВЗАЄМОДІЯ ЛОКАЛЬНО-МАКСВЕЛІВСЬКИХ ТЕЧІЙ В РОЗРІДЖЕНОМУ ГАЗІ

01.01.03 – математична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Гордевський Вячеслав Дмитрович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Харків – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧНЬ

$\mathbb{R}^n$	– n-мірний дійсний евклідів простір
$C^1(\mathbb{R}^n)$	– простір один раз безперервно диференційовних функцій
$P(\mathbb{R}^n)$	– клас невід'ємних функцій з $C^1(\mathbb{R}^n)$, які фінітні або спадають на нескінченності разом зі своїми частинними похідними першого порядку швидше ніж функція e^{-az^2} ($a > 0$ – деяка константа, $z \in \mathbb{R}^n$)
$L_1(\mathbb{R}^n)$	– простір інтегрувальних функцій
$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$	– функція розподілу молекул газу
$t \in \mathbb{R}^1$	– момент часу
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$	– швидкість молекули
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$	– просторова координата молекули
$\mathbf{v},\ \mathbf{v}_1$	– швидкості двох молекул до зіткнення
$\mathbf{v}^{'},\ \mathbf{v}_1^{'}$	– швидкості двох молекул після зіткнення
$\widetilde{\mathbf{v}}$	– масова (середня) швидкість молекул газу (течії)
$\overline{\mathbf{u}}_i$	$= \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}$ – довільний фіксований вектор в $\mathbb{R}^3$
$\overline{\mathbf{v}}_i$	$= \frac{\overline{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}$ – довільний фіксований вектор в $\mathbb{R}^3$
α	– вектор одиничної довжини
T	– абсолютна температура за Кельвіном
$\beta = \frac{1}{2\mathrm{T}}$	– обернена температура газу
d	– діаметр молекули
$\rho = \rho(t, \mathbf{x})$	– густина числа молекул в точці простору (течії)
$\overline{\rho}$	– константа
$D(f)$	$= \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)$ – ліва частина рівняння Больцмана
$Q(f, f)$	$= \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha \lvert(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)\rvert [f_1^{'} f^{'} - f_1 f]$ – права частина рівняння Больцмана (інтеграл зіткнень)

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} f$	– просторовий градієнт функції
$M = M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$	– максвеліан
$\Delta(f)$	$= \Delta = \sup\limits_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \lvert D(f) - Q(f,f) \rvert \, d\mathbf{v}$ – рівномірно-інтегральний ("змішаний") відхил
$\widetilde{\Delta}(f)$	$= \widetilde{\Delta} = \sup\limits_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+\lvert t \rvert} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \lvert D(f) - Q(f,f) \rvert \, d\mathbf{v}$ – змішаний відхил з "однорідною вагою"
$\widetilde{\Delta}_q(f)$	$= \widetilde{\Delta}_q = \sup\limits_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+\lvert t \rvert} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \lvert D(f) - Q(f,f) \rvert \, d\mathbf{v}$ – змішаний відхил з "неоднорідною вагою"
$\Delta_1(f)$	$= \Delta_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \lvert D(f) - Q(f,f) \rvert \, d\mathbf{v}$ – інтегральний відхил
$\mathrm{supp}\ C$	– носій функції C
$\mathcal{G}^{\mathbf{x}}$	– проекція обмеженої області $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^4$ на гіперплощину $t = 0$
$\mathcal{G}^k$	– проекція обмеженої області $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^4$ на гіперплощину $x^k = 0,\ k = 1,2,3$
m	(в Розділі 5) – об'єм (міра) відповідної розмірності
$\mathfrak{D}_i$	$= \mathcal{G}_{i,\delta_i} \backslash \mathcal{G}_i,\ i = 1,2$

ВСТУП

Актуальність теми. Інтерес до систем частинок, які зіштовхуються та взаємодіють за тими чи іншими законами, обумовлений дослідженнями в авіаційній і космічній техніці, вакуумній техніці, хімічній технології тощо. Крім зовнішніх стимулів з боку промисловості, неослабний інтерес до дослідження газової динаміки підтримується і внутрішньою логікою наукових пошуків у цій цікавій з точки зору розвитку механіки, прикладної та загальної математики сфері. Одним з важливих напрямків у цій галузі є вивчення кінетичних рівнянь, зокрема, нелінійного рівняння Больцмана, і пошук його точних і наближених розв'язків. Єдиними точними розв'язками кінетичного рівняння Больцмана для найбільш відомої моделі твердих (пружних) куль, відомими на сьогоднішній день в явному вигляді, є глобальні та локальні максвеліани, які обертають обидві частини рівняння в нуль, і були відомі (щоправда, лише в стаціонарному випадку) ще в XIX столітті Л. Больцману і Д.К. Максвелу [13], [14], [68], [107]. Інші, немаксвелівські, точні розв'язки були знайдені лише для окремих моделей взаємодії між максвелівськими молекулами і деяких їхніх узагальнень О.В. Бобильовим, В.В. Веденяпіним, О.В. Міщенком, Д.Я. Петриною, К. Черчіньяні, М. Круком, Т.Т. Ву [7], [10], [15], [44], [48], [65], [67], [100], [101]. Також не дають точних результатів розв'язування нелінійного інтегро-диференціального рівняння Больцмана і різні методи, що застосовуються при його дослідженні. Так, ціла низка теорем про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння Больцмана [61], [71], [78], [85], [112]–[114] не дає інформації про явний вигляд цих розв'язків. Методи розкладання в ряди Гільберта, Чепмена – Енскога, Греда [6], [17], [32], [51] виявляються нестрогими, бо не вдається довести навіть збіжність таких рядів. Те ж саме можна сказати про чисельні методи [3], [31], [34], [56], [111] та спроби побудови модельних варіантів рівняння Больцмана [12], [53], [62], [72], [73], [77], [84]. Тим самим зростає інтерес до дослідження кінетичного рівняння Больцмана саме строгими аналітичними методами, за допомогою яких спочатку був знайдений лише глобальний максвеліан, незалежний ні від часу, ні від координати молекули. Наступним кроком стала робота Максвела [108], в якій він отримав більш загальний вигляд стаціонарних, але неоднорідних максвеліанів, які задовольняють рівняння Больцмана, і описують гвинтовий і спiралевидний рух газу (в спеціальній літературі вони відомі як рівноважні розподіли Максвела– Больцмана). Нестаціонарний локально-максвелівський (залежний не тільки від швидкості молекули і просторової координати, але і від часу) розв'язок було знайдено значно пізніше Т. Карлеманом, О.Г. Фрідлендером, Г. Гредом [35], [54], [95], однак і він не дав достатньої інформації про важливі фізичні та геометричні особливості локальних максвеліанів, такі як форма потоку і швидкість його руху, наявність зон ущільнення або розрідження і тому подібне.

Як видно зі сказаного вище, теорія вивчення рівняння Больцмана розвивалася за багатьма напрямками, проте точні його розв'язки вдалося явно знайти тільки для рівноважних станів газу, що ж стосується нерівноважного стану, то тут досі не вдається знайти розв'язок в явному вигляді, оскільки рівняння Больцмана виявляється досить складним для розв'язання навіть дуже простих нерівноважних задач. Тому виникла проблема опису взаємодії між двома або більше максвелівськими течіями газу (за допомогою так званих бімодальних розподілів). Спроби отримання результатів у цьому напрямку були пов'язані з побудовою моделі ударних хвиль і теорією випаровування-конденсації газу (І.Є. Тамм, І. Хосокава, К. Ямамото, Г. Мотт-Сміт, С. Дешпанде, Р. Нарасімха, С. Таката, К. Аокі, К. Черчіньяні та інші [52], [99], [109], [110], [116]), але виявилося, що відповідні бімодальні розподіли не можуть задовольняти рівняння Больцмана не тільки точно, але навіть наближено з яким завгодно ступенем точності через жорсткі умови, що накладаються на гідродинамічні параметри самою постановкою задачі. Проте метод побудови розподілів, схожих з розподілом Тамма – Мотт-Сміта, все ж таки отримав розвиток, зокрема, у роботах В.Д. Гордевського [20]–[23], [25], [28]–[30], [88], [89], [91]–[93]. Знайдені в цих роботах бімодальні і тримодальні розподіли дозволяють наближено (з довільним ступенем точності) описати взаємодію між глобальними і деякими з відомих типів локальних максвеліанів. Але проблема побудови інших явних наближених розв'язків досі залишається відкритою і актуальною.

Дисертаційна робота присвячена саме подальшому дослідженню бімодальних розподілів, які б відповідали процесам взаємодії між локально-максвелівськими течіями довільної складності (тобто неоднорідними й нестаціонарними) в розрідженому газі з твердих куль.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, які викладені в дисертації, були отримані при виконанні науково-дослідних робіт кафедри математичного аналізу Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна в рамках державних науково-дослідних робіт «Асимптотичні і алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстрації 0106U001561), «Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (номер державної реєстраці 0109U001456) і «Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування і теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (номер державної реєстрації 0111U010364).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова нових явних наближених розв'язків нелінійного рівняння Больцмана, відмінних від максвелівських, для моделі твердих куль, з модами типу "прискорення-ущільнення". В якості числових характеристик ступеня точності цих розв'язків розглядаються деякі норми різниці між лівою і правою частинами рівняння Больцмана в різних функціональних просторах (розглядається рівномірно-інтегральний ("змішаний") відхил, змішані відхили з "однорідною вагою" і "неоднорідною вагою" та інтегральний відхил).

Таким чином, основне *завдання* дослідження полягає в пошуку умов, що накладаються на коефіцієнтні функції і на поведінку всіх параметрів, що входять у бімодальні розподіли з модами типу "прискорення-ущільнення", які будуть достатніми для мінімізації того чи іншого відхилу.

Об'єкт дослідження – нелінійне інтегро-диференціальне кінетичне рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль.

Предметом дослідження є явні наближені розв'язки рівняння Больцмана, які мають вигляд бімодальних розподілів з модами типу "прискорення-ущільнення".

Методи дослідження. В роботі використані методи математичного і функціонального аналізу, загальні методи диференціальних рівнянь з частинними похідними, асимптотичні методи, елементи векторного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі отримані в дисертаційній роботі результати є новими і полягають в наступному:

1. Побудовано нові наближені явні розв'язки кінетичного рівняння Больцмана у вигляді бімодальних розподілів, які описують низькотемпературний режим взаємодії між двома локально-максвелівськими течіями спеціального типу, а саме "прискорення-ущільнення", в розрідженому газі з твердих куль. Для опису ступеня наближеності використано рівномірно-інтегральний відхил між частинами цього рівняння.

2. Знайдено низку нових наближених явних розв'язків у вигляді

лінійної комбінації двох локальних макселіанів типу ”прискорення-ущільнення” за допомогою інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Отримано достатні умови мінімізації зазначеного відхилу.

3. Для бімодального розподілу з модами типу ”прискорення-ущільнення” знайдено конкретний вигляд коефіцієнтних функцій при мінімізації рівномірно-інтегрального відхилу з ”однорідною вагою”.

4. Запропоновано новий тип відхилу, а саме рівномірно-інтегральний відхил з ”неоднорідною вагою”, який дозволив суттєво розширити клас явних наближених бімодальних розв'язків рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль.

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані в дисертації результати можуть бути використані для подальшого вивчення кінетичних рівнянь і властивостей їх розв'язків. Також результати дисертації можуть бути включені до програм спецкурсів і семінарів, які читаються студентам старших курсів фізико-математичних спеціальностей. Можливе застосування результатів дисертації в деяких прикладних галузях, таких як гідро– і аеродинаміка, метеорологія і т. д., при дослідженні математичних моделей різних процесів, пов'язаних із взаємодією потоків газу.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаціної роботи отримані її автором самостійно. В роботах [24], [26], [27], [86], написаних у співавторстві з науковим керівником, В.Д. Гордевському належить загальне керівництво, постановоки задач і обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на наступних наукових конференціях:

1. Міжнародній конференції, присвяченій 150-річчю з дня народження О.М. Ляпунова, Харків, 24–30 червня, 2007 р.;
2. Міжнародній науковій конференції для молодих учених "Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках і інформаційних технологіях", Харків, 24–26 квітня, 2009 р.;
3. 9-ій Міжнародній міждисциплінарній науково-практичній школі-конференції "Сучасні проблеми науки та освіти", Алушта, 30 квітня–10 травня 2009 р.;
4. XIII Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 13–15 травня, 2010 р.;
5. Міжнародній конференції "Аналіз та математична фізика", Харків, 24–28 червня, 2013 р.;
6. Міжнародній школі-конференції "Тараповські читання – 2013", присвяченої 150-річчю кафедри теоретичної і прикладної механіки, Харків, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р.;
7. XV Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15–17 травня 2014 р.;
8. II Міжнародній конференції "Аналіз та математична фізика", Харків, 16–20 червня, 2014 р.;
9. Науковому семінарі кафедри прикладної математики ХНУ імені В.Н. Каразіна (керівник семінару – д.ф.-м.н., професор В.І. Коробов), Харків, травень, 2016 р.

Публікації. Результати роботи опубліковано в 5 статтях [24], [26], [27], [86], [105] у наукових фахових виданнях (дві статті в журналі, що має імпакт-фактор). Також результати дисертації відображені у 8 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [19], [37], [38], [39], [40], [87], [90], [104].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 117 найменувань і займає 15 сторінок. Повний обсяг роботи становить 124 сторінки. Результати, що виносяться на захист, містяться в розділах 3–5.

Подяка. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику В.Д. Гордевському за формулювання завдань, постійну увагу до роботи і підтримку.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ

В цьому розділі дано огляд літератури за темою дисертації та обґрунтовано вибір напрямку дослідження, проведеного в даній роботі.

1.1. Огляд літератури за темою дисертації

Нелінійне кінетичне рівняння Больцмана, опубліковане більш ніж 140 років тому, має багату історію. Ще в 1872 році Людвіг Больцман сформулював своє знамените інтегро-диференціальне рівняння [68]:

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = Q(f, f)$$

(де праворуч стоїть так званий інтеграл зіткнень), яке описує еволюцію в часі (t) функції розподілу швидкості $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ в одночастинковому фазовому просторі, де $\mathbf{x}$ і $\mathbf{v}$ – координата й швидкість відповідно, при довільних відхиленнях від рівноваги. Проте, на даний момент єдиним точним розв'язком цього рівняння, який вдається знайти в явному вигляді, залишається так званий розв'язок Максвела [57], [58] (локальний максвелівський розподіл за швидкостями в однорідному газі):

$$f_M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{kT}}\right)^{3/2} \rho \exp\left\{-\frac{m}{2\mathrm{kT}}(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}})^2\right\}, \tag{1.1}$$

куди входять наступні макроскопічні характеристики газу: $\overline{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x})$ – масова (гідродинамічна) швидкість течії газу, $\rho(t, \mathbf{x})$ – густина газу, $\mathrm{T}(t, \mathbf{x})$ – абсолютна температура газу. Величина $\mathrm{k} = \frac{1.38}{10^{23}}$ Дж/К – постійна Больцмана, $m > 0$ – маса молекули. Розподіл було отримано Дж.К. Максвелом в 1859 році, ще до появи рівняння Больцмана (1872 р.), для випадку рівноважних газів, коли $\overline{\mathbf{v}}$, ρ, T не залежать від просторових координат $\mathbf{x}$ та часу t.

Інші, немаксвелівські, точні розв'язки вдається знайти лише для окремих моделей взаємодії між частинками газу – максвелівських молекул та деяких їхніх узагальнень.

Вперше новий точний розв'язок (немаксвелівський), який виражається в елементарних функціях, рівняння Больцмана було виявлено в середині 70-х років XX століття О.В. Бобильовим [10] і незалежно М. Круком і Т.Т. Ву [102] (одержаний ними розв'язок в літературі називається "розв'язок Бобильова – Крука – Ву" або "BKW – мода"). Застосовуючи метод О.О. Нікольського [47], О.В. Бобильову [7], розв'язуючи задачу Коші для просторово-однорідного випадку при спеціальному виборі початкової умови, за допомогою методу перетворення Фур'є, вдалося знайти новий клас автомодельних розв'язків рівняння Больцмана $f(t,\mathbf{v}) = (2\pi\tau)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2\tau}\right)\left[1 + \frac{1-\tau}{\tau}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2\tau} - \frac{3}{2}\right)\right]$, $\tau = \tau(t) \equiv 1 - \theta e^{-\lambda t}$, $\lambda = (\pi/2)\int\limits_{-1}^{1} d\mu\varrho(\mu)(1-\mu^2)$, $t \geq 0$; потім в [10] було дано абсолютно елементарне виведення цього ж розв'язку, але вже без побудови перетворення Фур'є. Кілька пізніше автору вдалося суттєво розширити клас знайдених в [10] розв'язків. Даний підхід отримав розвиток і в роботах М. Крука і Т.Т. Ву [100], [101], які з незначними змінами повторили результати О.В. Бобильова. Багато результатів, отриманих в цьому напрямку різними дослідниками в наступні кілька років, містяться в огляді [77]. Так суттєву роль у поширенні методу перетворення Фур'є стосовно рівняння Больцмана та узагальнення отриманих цим методом результатів зіграли роботи Е. Хауге, Е. Престгаарда [97], [98], В.О. Веденяпіна [15], О.В. Бобильова [8], [9] та інші численні роботи різних авторів. Подальший розвиток і математичне обґрунтування перетворення Фур'є для рівняння Больцмана отримало в роботах Д.Я. Петрини і О.В. Міщенка [44], [48]. В цих трудах автори розглянули член зіткнень більш загального вигляду, ніж для максвелівських молекул, побудували нескінченну систему з зачіпленням звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, яку згодом вдалося звести до лінійної системи, і можливість її розв'язання строго доводиться.

На початку XXI століття були знайдені ще два класи автомодельних розв'язків рівняння Больцмана в явному вигляді для максвелівських молекул, які мають структуру ударної хвилі нескінченно великої інтенсивності (такі хвилі вивчалися Г. Гредом в 1969 році). Ці розв'язки були отримані О.В. Бобильовим і К. Черчіньяні та описані в роботах [65], [67].

Як ми бачимо, точні розв'язки, відмінні від максвеліанів, для моделі максвелівських молекул і деяких її узагальнень існують, але, на жаль, прийоми, описані в розглянутих роботах, не можуть бути застосовані для інших моделей взаємодії між молекулами, такими як, наприклад, моделі твердих і шорстких куль. А значить, для них єдиним відомим в явному вигляді класом точних розв'язків й досі залишаються лише максвеліани.

Далі коротко розглянемо інші методи і напрями дослідження рівняння Больцмана і споріднених йому кінетичних рівнянь.

Існує велика кількість модифікацій, як самого рівняння Больцмана, так і моделей взаємодії між частинками газу, де, як правило, вводяться нові припущення про форму або внутрішню структуру молекул, властивості процесу зіткнень між ними і т. п. Одне з таких рівнянь нового типу для одновимірної системи твердих стрижнів вивчав Дж. Лебовиць зі співавторами [103]. Структура його правої частини така, що дозволяє простежити рух однієї виділеної молекули. В якості граничних випадків авторами отримані рівняння типу Власова і Енскога, за допомогою яких вивчається еволюція газу при кінцевих часових початкових даних, дельтаподібних за координатами і максвелівськими за швидкостями, для яких вдається отримати явний розв'язок. Опис багатьох модельних рівнянь можна знайти в огляді М. Ернста [77], тут наведено кінетичні моделі з точним розв'язком, наприклад, модель надтвердих частинок, які при зіткненні можуть поглинати або знищувати одна одну, а також стохастичні моделі, де ймовірність розльоту частинок з заданими параметрами передбачається здатною приймати значення з деякого заданого інтервалу.

Інші модифікації традиційних моделей зіткнення між молекулами наведено в роботах К. Черчіньяні [72], [73]. Так у роботі [72] розглянуто поліатомний газ з довільно складною внутрішньою структурою молекул, робота ж [73] присвячена аналізу моделі м'яких куль, в якій молекули можуть частково проникати одна в одну в момент зіткнення, і мають певну густину ймовірності розсіювання одна на одній для кожного можливого значення відстані між їх центрами, тут же доведені деякі глобальні теореми існування розв'язків рівняння Больцмана для випадку м'яких куль, в яких можна здійснити границю Греда і подальший перехід до моделі твердих куль.

Обговоренню рівняння Енского, його узагальнень, властивостей і споріднених йому рівнянь, зокрема для моделі твердих куль, а також зв'язку з рівнянням Больцмана присвячені, наприклад, роботи М.М. Боголюбова, А.С. Трушечкіна, Н. Белломо, М. Лачовіча, М. Канноне, К. Черчіньяні, В.І. Герасименка, І.В. Гапьяка та інших [12], [53], [62], [70], [78], [84].

Модифікацією рівняння Больцмана є і досить відома, широко використовувана модель, запропонована П.Л. Бхатнагаром, Є.П. Гроссом і М. Круком (БГК – модель) [64]. У цій моделі інтеграл зіткнень замінюється на вираз пропорційний різниці між локальним максвеліаном і шуканою функцією розподілу, причому передбачається, що іноді і сам коефіцієнт пропорційності певним чином залежить від швидкості молекули. Результатами спроб розв'язання такого рівняння за допомогою аналітичних і чисельних методів може служити, наприклад, робота

С.Г. Малахова [41], проте залишається не цілком ясним питання про придатність цих методів до розв'язання завдань, пов'язаних з пошуком самої функції розподілу, а не тільки деяких її складових, таких як густина, масова швидкість та інших.

Варто також відзначити, що є чимала кількість монографій присвячених опису поведінки зернистих (гранульованих) матеріалів, наприклад, в роботах [66], [69] використано кінетичне рівняння для твердих куль з непружними зіткненнями.

Ще один напрямок досліджень, який інтенсивно розробляється, присвячено лінеаризованому рівнянню Больцмана, яке виходить шляхом заміни нелінійного оператора зіткнень лінійним. Вивченням такого рівняння займалися: І.І. Моісеєв-Ольховський [45] (застосовував моментні методи), Г. Гред [32] (довів одну з перших теорем існування розв'язку задачі Коші з неоднорідними початковими даними), Л. Сірович [50] (побудував узагальнену теорію Гільберта – Чепмена – Енскога) та інші [4], [79], [96].

Крім різних модифікацій рівняння Больцмана існує велика різноманітність методів дослідження цього рівняння.

Багато літератури присвячено питанням існування і єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння Больцмана. Першу теорему існування та єдиності "у великому" розв'язку задачі Коші просторово-однорідного нелінійного рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль при ступеневому спаданні початкової умови і при прямуванні імпульсів частинок до нескінченності довів Т. Карлеман в роботі [71], де було показано, що знайдений розв'язок прямує до глобального максвеліану при нескінченно великих часових рамках у рівномірній по швидкості нормі. Пізніше в роботі Н.Б. Маслової і Р.П. Чубенка [43] було отримано узагальнення результатів Карлемана на випадок досить широкого класу ступеневих потенціалів взаємодії між молекулами газу, а в роботі [42] тими ж авторами доведена однозначна вирішуваність неоднорідного, нестаціонарного рівняння Больцмана для моделі твердих куль в спеціально введеному класі функцій на кінцевому проміжку часу, розмір якого залежить від початкової умови. В роботі [61] Л. Аркерід зі співавторами довів існування і єдиність сильного розв'язку в усьому просторі і його збіжність до максвеліану для жорстких потенціалів в тому числі і для випадку твердих куль. Розв'язку в цілому неоднорідного рівняння Больцмана також присвячені роботи [49], [59], [60], [117], результати яких відносяться до так званого слабо нелінійного випадку, тобто накладаються досить жорсткі обмеження на норму відхилення початкової умови від глобального розподілу Максвела. Слід зазначити роботи Р. ДіПерни і П.Л. Ліонса [75], [106], де була доведена вельми загальна теорема існування слабких розв'язків повного рівняння Больцмана в широкому класі функцій при "великих" початкових даних. В роботах В.І. Герасименка, Д.Я. Петрини, К.Д. Петрини [18], [85], [112], [113], [114] всебічно вивчено зв'язок між розв'язками ланцюжка рівнянь М.М. Боголюбова та кінетичних рівнянь, зокрема рівняння Больцмана. З більш пізніх досягнень в теорії вирішуваності рівняння Больцмана можна відзначити роботи А.Ш. Акиша [1], [2], який, на основі методу розщеплення, довів глобальну теорему існування та єдиності розв'язку повного нелінійного рівняння Больцмана в просторі неперервних функцій, а також показав вирішуваність нелінійного рівняння Больцмана в цілому по часу, при цьому знайдений граничний елемент задовольняє еквівалентному інтегральному рівнянню Больцмана.

Знову ж таки, існують методи розв'язання кінетичних рівнянь, пов'язані з відомими розкладаннями Гільберта, Чепмена – Енскога, Греда [11], [33], [35], [36], [46], [55], [95]. Головна ідея цих методів полягає в побудові теорії збурень для шуканої функції розподілу, використовуючи в якості параметра число Кнудсена. В той же час ряд модифікацій цього підходу запропонували В.В. Струмінський, В.С. Галкін, М.Н. Коган, М.К. Макашев, Г. Гред, А.В. Риков, О.В. Бобильов та інші [6], [17], [32], [51], [94]. Зауважимо, що в перших наближеннях методу Чепмена – Енскога з рівняння Больцмана виводяться відомі рівняння гідродинаміки – Ейлера, Нав'є – Стокса, Барнетта і т.д. На сьогоднішній день досить велика кількість робіт присвячена чисельним методам розв'язання рівняння Больцмана і схожих з ним кінетичних рівнянь, основні з них детально були описані Г. Бердом в монографії [5]. В цьому контексті можна відзначити декілька робіт різних авторів, наприклад, С.Л. Горєлов і М.Н. Коган в роботі [31] розв'язували задачу про структуру кнудсенівського кінетичного шару за допомогою методу Монте-Карло, Ф.Г. Черемісін [56] чисельно розв'язував повне (нелінійне) рівняння Больцмана, зокрема, для випадку одновимірних стаціонарних течій. Пряме чисельне моделювання ударних хвиль з використанням скінченних різниць для повного рівняння Больцмана у випадку твердих куль провів Т. Охвада [111]; свій розвиток з деякими видозмінами цей метод отримав у роботах сучасних авторів Ю.О. Анікіна, О.І. Додулада, Ю.Ю. Клосса, Ф.Г. Черемісіна [3], [34] та інших.

Відмітимо, що на початку XXI століття з'явилося чимало робіт, пов'язаних з дослідженням квантових кінетичних рівнянь з многочастотної динаміки [63], [76], [80]–[83], але оскільки в рамках даної дисертаційної роботи розглядається тільки класичне кінетичне рівняння Больцмана, то це питання залишимо без докладного розгляду.

Не дивлячись на велику кількість методів дослідження кінетичних рівнянь, в тому числі рівняння Больцмана, найбільший інтерес, як і раніше, представляють аналітичні результати. Одним з фундаментальних є питання про опис всіх максвелівських розв'язків істинно повного (нелінійного, тривимірного) рівняння Больцмана у всьому просторі.

I перші результати в цьому напрямку були отримані Дж.К. Максвелом в 1859 році, який описав загальний вигляд розподілів молекул за швидкостями в однорідному газі в стані термодинамічної рівноваги (за умови, що поступальний рух молекул описується законами класичної механіки), які обертають праву частину рівняння Больцмана, тобто інтеграл зіткнень, в нуль. Наступним кроком у дослідженні поставленого питання були роботи Л. Больцмана [13], [14], [68], в яких він повторив результат Дж.К. Максвела [107] і усунув деякі прогалини в його міркуваннях, отримавши більш строгий доказ, ґрунтуючись на своїй H-теоремі.

Спочатку був знайдений лише глобальний, не залежний ні від часу ні від координати молекули, тобто стаціонарний і однорідний максвеліан $f(\mathbf{v}) = \exp(a + \mathbf{b}\mathbf{v} + c\mathbf{v}^2)$, де a, c – скалярні, $\mathbf{b}$ – векторна сталі, $\mathbf{v}$ – швидкість молекули. Більш загальний вигляд стаціонарних, але неоднорідних максвеліанів (1.1) (при відсутності об'ємних сил і постійній температурі), які задовольняють рівняння Больцмана, отримав Максвел в роботі [108]. Цей розподіл описував поступальний рух і обертання газу як єдиного цілого навколо нерухомої осі (гвинтовий або спиралевидний рух газу, при цьому густина швидко зростає в міру віддалення від осі обертання – ефект "центрифугування" [58]). В літературі такий розподіл часто називають "рівноважним розподілом Максвела – Больцмана".

Подальший розвиток теорія узагальнення гвинтового розподілу отримала значно пізніше, в середині XX століття, в роботах Г. Греда [94], Т. Карлемана [35] і О.Г. Фрідлендера [54], де було описано найбільш загальний (нестаціонарний) локально-максвелівський розв'язок рівняння Больцмана з можливою залежністю від часу і температури. Крім того, у зазначених роботах проведений частковий аналіз фізичного змісту нестаціонарних максвелівських розв'язків. Проте вигляд такого розв'язку виявився досить складним, бо задає рух газу, який є суперпозицією обертання навколо своєї осі в цілому, поступального руху (можливо, навіть з прискоренням та ущільненням) і стиснення-розширення. Разом з тим, у згаданих роботах недостатньо повно досліджено особливості локальних максвеліанів, такі як форма і швидкість руху обертальних течій газу (можливість руху в будь-якому напрямку на відміну від "гвинтів"), поведінка гідродинамічних параметрів при кінцевих часах, наявність зон ущільнення або розрідження. Ось чому виникла необхідність вивчення більш складних процесів у газах, опис яких вимагає введення в розгляд тих чи інших комбінацій максвеліанів, тобто опис взаємодії між двома або кількома максвелівськими течіями в розрідженому газі, і подальшого дослідження питання про вигляд таких розв'язків рівняння Больцмана, будуть вони точними або наближеними (в тому чи іншому сенсі). І першим результатом в цьому напрямку слід вважати розподіл Тамма – Мотт-Сміта (надалі ТМС – розподіл) [52], [109], що має вигляд лінійної комбінації двох максвеліанів спеціального виду (як прийнято називати – бімодальний вигляд) і апроксимує плоску стаціонарну ударну хвилю. Тим не менш і ТМС – розподіл не повною мірою розкрив особливості локальних максвеліанів, він задовольняв лише необхідним умовам точного розв'язку рівняння Больцмана, а необґрунтований вибір параметрів і коефіцієнтних функцій бімодального розподілу усувався шляхом використання ще якогось моментного рівняння. Спроба довести факт того, що умови які накладаються на ТМС – розподіл будуть також і достатніми для того, щоб він був точним розв'язком рівняння Больцмана, була зроблена А. Сакураї [115], проте, враховуючи велику кількість нестрогих доказів і неточних міркувань, що містяться в цій роботі, Р. Нарасімха і С. Дешпанде [74], [110] довели помилковість висновків А. Сакураї. У згаданих роботах авторами для побудови бімодального розподілу вводяться локальний (залежний від координат) і глобальний (інтеграл по координатах) відхили між частинами рівняння

Больцмана, середньоквадратичні в просторі швидкостей, які в результаті не можуть бути зроблені як завгодно малими ні за яких умов, накладених на параметри максвелівських течій, що входять до цього розподілу. Остаточний висновок, що підтверджує результати [74], [110], про те, що ніякий бімодальний розподіл, який описує ударну хвилю навіть нескінченної інтенсивності, не може бути точним розв'язком рівняння Больцмана, був отриманий I. Хосокава і К. Ямамото в роботі [99]. Таким чином, виявилося, що ТМС – розподіл не може задовольняти рівняння Больцмана не тільки точно, а навіть наближено з яким завгодно за раннє заданим ступенем точності, в результаті жорстких апріорних умов на гідродинамічні параметри, які накладаються самою постановкою задачі. Втім інтерес до вивчення бімодальних (і многомодальним) розподілів не слабшає і понині, про що свідчать роботи С. Таката, К. Аокі, К. Черчіньяні, В.Д. Гордевського та інших авторів [116], [20]–[23], [25], [28]–[30], [88], [89], [91]–[93], оскільки, на їхню думку, сама ідея побудови наближеного розв'язку у вигляді бімодального розподілу, так само як і підхід, заснований на мінімізації того чи іншого відхилу, є цілком розумними і можуть дати хороші результати, однак, слід послабити вимоги, які накладаються на параметри і коефіцієнтні функції в рамках ТМС.

Бімодальні і многомодальні розподіли в свою чергу розглядалися і в кінетичній теорії випаровування-конденсації газу, що також не привело до глобальних результатів.

Вагомий внесок у розвиток питання вивчення наближених бімодальних розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль вніс В.Д. Гордевський в работах [20]–[23], [25], [28]–[30], [88], [89], [91]–[93]. В них були знайдені розв'язки, що відрізняються від відомого розподілу Тамма – Мотт-Сміта та його модифікацій, і доведено, що вони забезпечують довільну малість різних норм різниці між частинами рівняння Больцмана для моделі твердих куль з максвелівськими модами різних видів (глобальні, локальні стаціонарні та нестаціонарні). Так, наприклад, в роботах [23], [25] для моделі твердих куль було побудовано бімодальний розподіл, що має вигляд лінійної комбінації стаціонарних неоднорідних максвеліанів і описує взаємодію між двома потоками газу, які здійснюють обертальний рух навколо нерухомої осі та поступальний рух вздовж неї. Вивчена асимптотична поведінка ріномірно-інтегральної ([25]) та інтегральної ([23]) норм різниці між частинами рівняння Больцмана при спеціальному виборі гідродинамічних параметрів розподілу. Загальною властивістю знайдених розподілів є те, що вони описують нерівномірно остигаючий газ при уповільнені обертання потоків. Варто також зазначити, що в роботі [88] був проведений детальний аналіз і запропонована класифікація локальних нестаціонарних максвеліанів (залежних від часу) з точки зору їх фізичного сенсу і геометричної структури. Саме в цій роботі [88] вперше, серед нестаціонарних локально-максвелівських течій, було виділено так звані течії типу "прискорення-ущільнення", які є нестаціонарними і на відміну від "гвинтів" чи "смерчів" не обертаються, зате прискорюються й ущільнюються.

1.2. Вибір напрямку досліджень

Як видно з огляду літератури, незважаючи на велику кількість методів, і підходів у різних напрямках дослідження рівняння Больцмана і його розв'язків для моделі твердих куль, ніяких точних розв'язків повного тривимірного нелінійного рівняння Больцмана, крім максвелівських, в явному вигляді знайдено досі не було. Так само як не вдається знайти навіть наближені розв'язкі у вигляді бімодальних розподілів, пов'язаних з побудовою моделей ударних хвиль і задачами про випаровування-конденсацію. Все це призводить до необхідності подальшого дослідження математичної моделі больцманівського газу для моделі твердих куль у всьому просторі і побудови таких бімодальних розподілів з довільними гідродинамічними параметрами мод, які б описували процес взаємодії між двома максвелівськими течіями в газі з твердих куль і в той же час задовольняли рівняння Больцмана з яким завгодно ступенем точності, тобто забезпечували довільну малість якого-небудь підходящого відхилу (норми різниці між правою і лівої частинами рівняння Больцмана). Таким чином, ці бімодальні розподіли будуть являти собою явні наближені розв'язки розглянутого рівняння, що дають опис процесу взаємодії між різними максвелівськими течіями. Саме неєдиність і неоднозначність розв'язання даної задачі обґрунтовує необхідність проведення подальших досліджень та їх актуальність. І оскільки бімодальні розподіли з глобальними, гвинтовими і смерчеподібними максвеліанами для моделі твердих куль вже достатньо вивчені, виникає інтерес до розгляду бімодальних розподілів з модами типу "прискорення-ущільнення", які були згадані вище, але для яких не було з'ясовано питання: чи можуть такі розподіли бути явними наближеними розв'язками рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Саме на це питання відповідають результати дослідження, яке було проведено в даній дисертаційній роботі.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

2.1. Основні факти про рівняння Больцмана для моделі твердих куль

У даному розділі дається короткий огляд основних понять, означень і найбільш важливих результатів, пов'язаних з дослідженням рівняння Больцмана для моделі твердих куль при рівноважному стані газу, необхідних для постановки задачі та її розв'язку. Також вводиться ряд означень, пов'язаних зі змістом наступних розділів.

Як відомо [14], [16], [35], процес зміни фізичних систем, що мають в собі велику кількість елементів, які зіштовхуються у процесі руху, можна змоделювати за допомогою узагальненого рівняння Больцмана. В рамках даної дисертаційної роботи розглядається рівняння Больцмана, яке описує еволюцію досить розрідженого газу у випадку моделі "твердих куль".

2.1.1. Модель твердих куль

Розглядається газ молекули якого нерозрізнимі, а саме представляються у вигляді однакових твердих куль, що мають один і той самий діаметр, а також передбачається, що:

– всі молекули мають однакову масу (для простоти її беруть рівною одиниці);

– поверхня кулі абсолютно гладка;

– молекули зіштовхуються тільки попарно (нехтуємо зіткненням одночасно трьох і більше частинок);

– зіткнення молекул є абсолютно пружний удар, при якому зберігаються маса, імпульс та внутрішня енергія молекул;

– взаємне притягування і відштовхування між молекулами відсутнє, тобто молекули взаємодіють між собою тільки в момент зіткнення за законами класичної механіки.

При таких зіткненнях зберігається сумарна кінетична енергія частинок, змінюються лише напрями і швидкості руху частинок, які зіштовхуються. Таким чином, під зіткненням розуміється перетворення швидкостей пари молекул зі стану до зіткнення (в момент часу $t \to -\infty$) в стан після зіткнення (в момент часу $t \to +\infty$) [16]. Отже, якщо позначити через $\mathbf{v},\ \mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ вектори швидкостей пари молекул до зіткнення, а через $\mathbf{v}',\ \mathbf{v}_1' \in \mathbb{R}^3$ – їх швидкості після зіткнення, тоді переторення зіткнення пари молекул в моделі "твердих куль" буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha), \\ \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 + \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha), \end{aligned} \tag{2.1}$$

де α – вектор одиничної довжини, який спрямований вздовж лінії, що з'єднує центри молекул в момент зіткнення, а $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ – вектор відносної швидкості зіштовхуваних молекул перед зіткненням (Рис. 2.1).

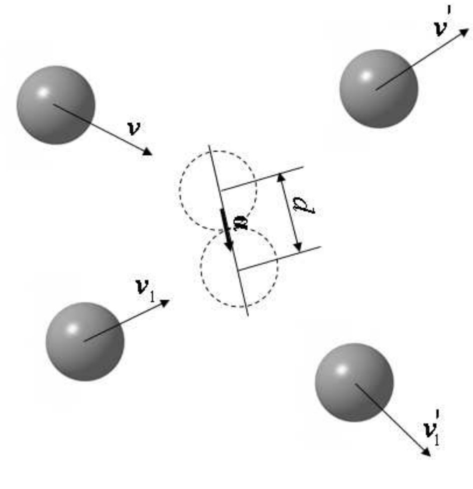

Рис. 2.1: Модель зіткнення двох молекул типу "тверді кулі".

Згідно [55] вираз "до зіткнення" припадає на час до того моменту, коли молекули почнуть здійснювати помітний вплив одна на одну, тобто поки кожна з них рухається по прямій лінії або (точніше кажучи) близько до асимптоти орбіти, яку вона описує під впливом іншої молекули. Вираз "після зіткнення" будемо розуміти аналогічним чином.

2.1.2. Функція розподілу молекул

Розглядається достатньо розріджений газ, що складається з твердих куль, у всьому тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$, опис якого здійснюється функцією розподілу молекул і не змінюється на відстанях порядку області зіткнення частинок. Передбачається, що молекули газу відрізняються тільки положеннями та швидкостями. Згідно [55] функція розподілу молекул газу $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ – це густина числа молекул, які в момент часу t знаходяться в елементі об'єму $d\mathbf{x}$ і мають швидкості в інтервалі $d\mathbf{v}$, а загальна кількість молекул виражається через $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ наступним чином:

$$N = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

де $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ – швидкість молекули, а $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ – її координата. Під елементом об'єму мається на увазі фізично малий об'єм, оточуючий точку $\mathbf{x}$, розміри якого великі в порівнянні з розмірами молекул, проте достатній, щоб містити їх велику кількість, в той же час розміри об'єму малі в порівнянні з фазовим простором цих молекул (малі в порівнянні з масштабом змін таких макроскопічних величин, як тиск, температура або масова швидкість газу).

Відшукання функції розподілу $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, як основної величини при описанні еволюції газу за допомогою рівняння Больцмана, а також вивчення її властивостей і є основним завданням кінетичної теорії газів, тому, що, як добе відомо [58], всі основні макроскопічні характеристики (або гідродинамічні параметри потоку) виражаються через неї:

- $\rho(t, \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$ – густина;
- $\widetilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$ – масова швидкість;
- $\mathrm{T}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{3\mathrm{k}\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}})^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$ – абсолютна температура (k – постійна Больцмана).

2.1.3. Рівняння Больцмана для моделі твердих куль

Як відомо [68], функція розподілу $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ повинна задовольняти нелінійне інтегро-диференціальне кинетичне рівняння Больцмана, яке у випадку моделі твердих куль має вигляд [35], [58]:

$$D(f) = Q(f, f); \tag{2.2}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right); \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)| \\ \times [f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1') f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})], \end{gathered} \tag{2.4}$$

де

- $\mathbf{v}', \mathbf{v}_1'$ – швидкості двох молекул після зіткнення, які виражаються відомим чином (2.1) через відповідні величини швидкостей до зіткнення $\mathbf{v}$ і $\mathbf{v}_1$, а саме:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha),$$

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 + \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha);$$

- α – вектор, що належить одиничній сфері $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$;
- $D(f)$ (скорочене позначення лівої частини рівняння Больцмана) – лінійний диференціальний оператор першого порядку;
- $Q(f, f)$ (скорочене позначення правої частини рівняння Больцмана) – так званий інтеграл зіткнень (нелінійний інтегральний оператор),

який визначає швидкість зміни функції розподілу молекул внаслідок зіткнень між ними;

- $\frac{\partial f}{\partial t}$ – частинна похідна по часу;
- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} f$ – просторовий градієнт функції;
- $\mathbf{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right) \in \mathbb{R}^3$ – відповідно координата і швидкість молекули в момент часу $t \in \mathbb{R}^1$;
- $d > 0$ – діаметр молекули ($\frac{d^2}{2}$ може трактуватися як величина обернена числу Кнудсена, яке характеризує ступінь розрідження газу).

2.1.4. Максвелівські розподіли

Як уже було зазначено в огляді літератури, на даний момент єдиними відомими в явному вигляді точними розв'язками рівняння (2.2)–(2.4) є добре відомі [33], [35], [36], [54], [55] "максвеліани" або "рівноважні максвелівські розподіли" $M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, які обертають в нуль інтеграл зіткнень. У випадку моделі твердих куль вони мають вигляд:

$$M = M(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}})^2}, \tag{2.5}$$

де $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ – густина числа молекул в точці $\mathbf{x}$ в момент часу t, $\beta(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\mathrm{T}(t,\mathbf{x})}$ – обернена температура (T – абсолютна температура) і $\widetilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x})$ – масова швидкість течії певним чином залежать від t і $\mathbf{x}$. Таким чином, ці функції є розв'язками системи

$$\begin{cases} D(M) = 0, \\ Q(M, M) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

На Рисунку 2.2 представлена зміна функції розподілу Максвела залежно від зміни температури ($T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ або інакше $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \beta_4$) при однаковій густині та масовій швидкості.

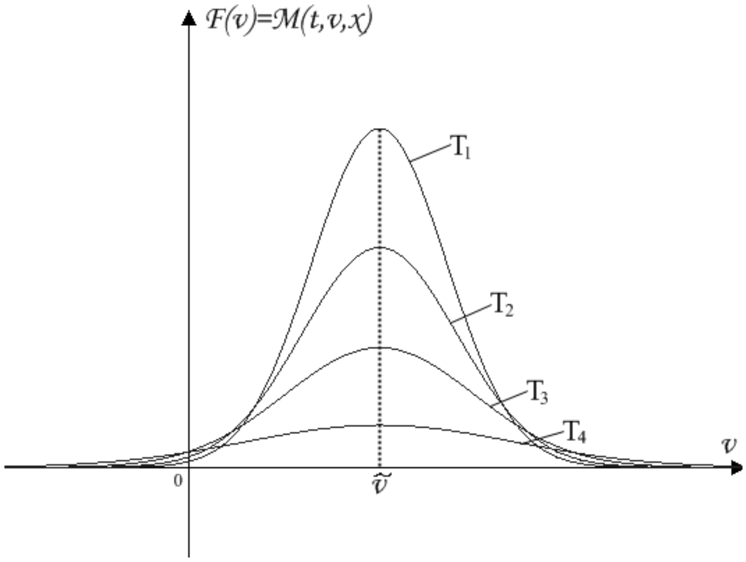

Рис. 2.2: Функція розподілу Максвела молекул газу по модулю швидкості при різних температурах.

Загальний вигляд залежності максвеліанів від часу і координати знайдений в роботах [35], [54], [58], [94] і визначає наступну класифікацію:

1) якщо ρ, β, $\widetilde{\mathbf{v}}$ – величини сталі, то максвеліан називається глобальним;

2) якщо ρ, β, $\widetilde{\mathbf{v}}$ деяким чином залежать від t і $\mathbf{x}$, то максвеліан називається локальним.

В свою чергу локальні максвеліани підрозділяються на:

1) неоднорідні, стаціонарні (залежать від $\mathbf{x}$ і не залежать від t);

2) однорідні, нестаціонарні (не залежать від $\mathbf{x}$, але залежать від t);

3) неоднорідні, нестаціонарні (залежать і від $\mathbf{x}$, і від t).

Детальний аналіз таких максвеліанів, а також їх класифікація з точки зору фізичного сенсу і геометричної структури були проведені в роботі [88]. Там же доведено, що однорідні нестаціонарні максвеліани для моделі твердих куль неможливі.

В рамках даної дисертаційної роботи розглядається окремий випадок локальних максвеліанів, вперше виділений та описаний в [88], який описує рух газу типу "прискорення-ущільнення" і має вигляд (2.5) при

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \overline{\rho} e^{\beta\left(\widetilde{\mathbf{v}}^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}, \mathbf{x})\right)}, \qquad (2.7)$$

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{u}}t, \tag{2.8}$$

де $\overline{\rho} = const$, а $\overline{\mathbf{v}}$, $\overline{\mathbf{u}}$ – довільні фіксовані вектори в $\mathbb{R}^3$, а обернена температура β не залежить ні від t, ні від $\mathbf{x}$.

З фізичної точки зору нестаціонарний і неоднорідний розподіл (2.5), (2.7), (2.8) описує поступальний рух газу з лінійною масовою швидкістю $\overline{\mathbf{v}}$ та масовим прискоренням $-\overline{\mathbf{u}}$ вздовж осі $\overline{\mathbf{u}}$ в довільній точці $\mathbf{x}$ простору. Щільність газу ρ змінюється від 0 до $+\infty$, при цьому мінімального значення вона набуває при $t = t_0$, де $t_0 = \frac{1}{\overline{\mathbf{u}}^2}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}})$ для будь-якого фіксованого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, а для довільного фіксованого $t \in \mathbb{R}^1$ збільшується тільки вздовж вектора $\overline{\mathbf{u}}$.

Іншими словами, зі зростанням часу t число молекул в одиниці об'єму збільшується і при цьому поступово рухається швидше вздовж осі $\overline{\mathbf{u}}$, тобто потік газу ущільнюється і прискорюється.

2.2. Постановка задачі

Як видно з попередніх підрозділів, точні розв'язки рівняння Больцмана для моделі твердих куль вдається знайти тільки для газу, який знаходиться в рівноважному стані, однак при переході до опису нерівноважних процесів в газі доводиться шукати вже не точні, а лише наближені явні розв'язки.

Початок цієї теорії, як уже було зазначено в огляді літератури (Розділ 1), було покладено в середині XX століття [52], [109]. Надалі В.Д. Гордевський в роботі [28], дотримуючись ідей Тамма і Мотт-Сміта, ввів поняття бімодального розподілу. Саме ця ідея і лежить в основі даної роботи, а конкретно: будемо шукати явні наближені розв'язки рівняння (2.2)–(2.4) у вигляді бімодальних розподілів, тобто лінійних комбінацій двох максвеліанів з різними гідродинамічними параметрами:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{2.9}$$

де φ_i, $i = 1,2$ – деякі невід'ємні гладкі коефіцієнтні функції, тобто

$$\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x}) \geqslant 0; \quad \varphi_i \in C^1\left(\mathbb{R}^4\right), \ i = 1,2, \tag{2.10}$$

а максвеліани M_i, $i = 1,2$ відносяться до течій типу "прискорення-ущільнення" [86], [88] та задаються формулами

$$M_i = \rho_i(t,\mathbf{x}) \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}}_i)^2}, \ i = 1,2, \tag{2.11}$$

$$\rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i e^{\beta_i\left(\widetilde{\mathbf{v}}_i^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right)}, \ i = 1,2, \tag{2.12}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}_i = \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \ i = 1,2, \tag{2.13}$$

де $\rho_i(t,\mathbf{x})$ – густина i-ї течії, а $\beta_i = \frac{1}{2\mathrm{T}_i}$ – її обернена температура, (T – абсолютна температура), $\overline{\rho}_i = const$; $\widetilde{\mathbf{v}}_i = \widetilde{\mathbf{v}}_i(t)$ – масова швидкість i-ї течії, $\overline{\mathbf{u}}_i$ та $\overline{\mathbf{v}}_i$ – довільні фіксовані вектори в $\mathbb{R}^3$; $(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}}_i)^2$ – скалярний квадрат вектора.

Як вже було зазначено в огляді літератури, описані вище течії типу "прискорення-ущільнення" вигляду (2.11)–(2.13) вперше було виділено в роботі [88]. Наступна лема показує, що ці вирази дійсно є точними розв'язками рівняння Больцмана для моделі твердих куль, тобто є одним з типів максвеліанів.

Лема 2.1. Нехай функція розподілу $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ в рівнянні (2.2)–(2.4) має вигляд (2.5) при виконанні (2.7) та (2.8). Тоді виконується твердження (2.6).

Доведення. Перш за все підставимо (2.7) та (2.8) до (2.5):

$$M = \overline{\rho}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{\beta\left(2(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}}) - 2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})t - \overline{\mathbf{v}}^2\right)\right\}. \tag{2.14}$$

Далі, підставивши останній вираз (2.14) в (2.3) та провівши необхідні обчислення, переконаємося, що перша рівність системи (2.6) виконується. Отже:

$$D(M) = \frac{\partial M}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} M)$$

$$= \overline{\rho}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{\beta\left(2(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x})+2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}})-2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})t-\overline{\mathbf{v}}^2\right)} \{-2\beta(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})\}$$
$$+\overline{\rho}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{\beta\left(2(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x})+2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}})-2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})t-\overline{\mathbf{v}}^2\right)} \{2\beta(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})\} = 0.$$

Перейдемо тепер до правої частини рівняння (2.2), а саме до виразу (2.4). Запишемо його в наступному вигляді:

$$Q(M,M) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1,\alpha)| \tag{2.15}$$
$$\times[M(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_1')M(t,\mathbf{x},\mathbf{v}') - M(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_1)M(t,\mathbf{x},\mathbf{v})].$$

Випишемо окремо квадратну дужку з (2.15), підставивши в неї конкретні вирази для M вигляду (2.14):

$$M(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_1')M(t,\mathbf{x},\mathbf{v}') - M(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_1)M(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$$
$$= \overline{\rho}^2\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3}\Big[e^{\beta\left(4(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x})+2(\mathbf{v}_1',\overline{\mathbf{v}})-2(\mathbf{v}_1',\overline{\mathbf{u}})t+2(\mathbf{v}',\overline{\mathbf{v}})-2(\mathbf{v}',\overline{\mathbf{u}})t-2\overline{\mathbf{v}}^2\right)} \tag{2.16}$$
$$-e^{\beta\left(4(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x})+2(\mathbf{v}_1,\overline{\mathbf{v}})-2(\mathbf{v}_1,\overline{\mathbf{u}})t+2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}})-2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})t-2\overline{\mathbf{v}}^2\right)}\Big].$$

Далі скористаємося формулою (2.1), показник першої експоненти з (2.16) набуде вигляду:

$$\beta\,(4(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{v}_1+\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1,\alpha),\overline{\mathbf{v}}) - 2(\mathbf{v}_1+\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1,\alpha),\overline{\mathbf{u}})t$$
$$+2(\mathbf{v}-\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1,\alpha),\overline{\mathbf{v}}) - 2(\mathbf{v}-\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1,\alpha),\overline{\mathbf{u}})t - 2\overline{\mathbf{v}}^2\Big)$$
$$= \beta\left(4(\overline{\mathbf{u}},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{v}_1,\overline{\mathbf{v}}) - 2(\mathbf{v}_1,\overline{\mathbf{u}})t + 2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}}) - 2(\mathbf{v},\overline{\mathbf{u}})t - 2\overline{\mathbf{v}}^2\right).$$

Легко бачити, що останній вираз повністю ідентичний показнику другої експоненти в (2.16), а тому права частина рівності (2.16) дорівнюють нулю, звідки випливає, що $Q(M,M)=0$.

Отже, обдві рівності системи (2.6) виконуються. □

Для побудови бімодальних розподілів з модами типу "прискорення-ущільнення", які описують взаємодію між течіями в газі з твердих куль і задовольняють рівняння Больцмана з яким завгодно ступенем точності, розглядаються різні норми різниці $D(f) - Q(f,f)$ між частинами рівняння (2.2)–(2.4), які ми введемо нижче за допомогою деяких додаткових означень.

Означення 2.1. Позначимо через $CL\left(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m\right)$ простір функцій $g(y,z)$, $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^m$, де k, $m \geqslant 0$ з нормою

$$\|g\| = \sup_{y \in \mathbb{R}^k} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |g(y,z)|\, dz.$$

Означення 2.2. Позначимо через $\widetilde{C}L\left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3\right)$ і $\widetilde{C}_q L\left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3\right)$ простори функцій $g(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $t \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ з наступними нормами відповідно:

$$\|g\|_t = \left\| \frac{g(t,\mathbf{x},\mathbf{v})}{1+|t|} \right\|_{\widetilde{C}L(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3)} = \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |g(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\, d\mathbf{v}$$

і

$$\|g\|_q = \left\| \frac{g(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \cdot q(\mathbf{x})}{1+|t|} \right\|_{\widetilde{C}_q L(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3)} = \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |g(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\, d\mathbf{v}$$

при цьому функція $q(\mathbf{x}) > 0$ обмежена на $\mathbb{R}^3$.

Означення 2.3. Позначимо через $L_1\left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3\right)$ простір функцій $g(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $t \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ з наступною нормою:

$$\|g\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |g(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\, d\mathbf{v}.$$

Означення 2.4. Назвемо рівномірно-інтегральним ("змішаним") відхилом, змішаним відхилом з "однорідною вагою", змішаним відхилом з "неоднорідною вагою" та інтегральним відхилом для рівняння Больцмана відповідно наступні вирази:

$$\Delta(f) = \|D(f) - Q(f,f)\|_{CL(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3)}, \tag{2.17}$$

$$\widetilde{\Delta}(f) = \|D(f) - Q(f,f)\|_{\widetilde{C}L(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3)}, \tag{2.18}$$

$$\widetilde{\Delta}_q(f) = \|D(f) - Q(f,f)\|_{\widetilde{C}_q L(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3)}, \tag{2.19}$$

$$\Delta_1(f) = \|D(f) - Q(f,f)\|_{L_1(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3)}. \tag{2.20}$$

2.2.1. Точна постановка задачі

Знайти функції $\varphi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$, які задовольняють умовам (2.10), і таку поведінку всіх вхідних до максвеліанів M_i, $i = 1, 2$ параметрів, щоб при досить низьких температурах потоків, тобто коли $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$, відхили (2.17)–(2.20) були скільки завгодно малими.

2.3. Висновки до розділу 2

У другому розділі розглянуто вид рівняння Больцмана для моделі твердих куль, наведені супутні йому поняття, а також основні позначення пов'язані з даним рівнянням.

Як вже неодноразово було відмічено: для описаної вище моделі газу з твердих куль жодного точного розв'язку рівняння Больцмана в явному вигляді, крім максвеліанів, досі не знайдено. У зв'язку з цим особливий інтерес набуває пошук явних наближених розв'язків цього рівняння, які, як правило, шукаються в бімодальному вигляді. Тому сформульована в даному розділі постановка задачі задає напрям дослідження дисертаційної роботи, а саме: будуть побудовані деякі з таких можливих явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль спеціального вигляду (2.9), де максвелівські моди M_i, $i = 1, 2$ відповідають течіям типу "прискорення-ущільнення", а коефіцієнтні функції $\varphi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ підбираються таким чином щоб те чи інше відхилення між частинами рівняння (2.2)–(2.4), визначене однією з формул (2.17)–(2.20), було скільки завгодно мале, тобто прямувало до нуля.

РОЗДІЛ 3

ВЗАЄМОДІЯ МІЖ ДВОМА ТЕЧІЯМИ ТИПУ "ПРИСКОРЕННЯ-УЩІЛЬНЕННЯ" В ГАЗІ З ТВЕРДИХ КУЛЬ

У даному розділі побудовано бімодальний розподіл, який наближено описує низькотемпературний перехідний режим між двома локально-максвелівськими течіями типу (2.11)–(2.13) в розрідженому газі з твердих куль. Для опису ступеня наближеності взято рівномірно-інтегральний відхил (2.17), для якого знайдено достатні умови довільної малості. Основні результати даного розділу були опубліковані в роботах [26] і [86].

3.1. Випадок рівномірно-інтегрального відхилу

Для початку запишемо рівномірно-інтегральний відхил (2.17) між частинами рівняння (2.2) в наступному вигляді:

$$\Delta(f) = \Delta = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v}. \tag{3.1}$$

Далі будемо шукати будь-які можливі достатні умови довільної малості відхилу (3.1) для розподілу $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, який має бімодальний вигляд (2.9), (2.10) з модами M_i, $i = 1,2$ типу (2.11)–(2.13) при граничному припущенні $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$.

Низькотемпературний граничний перехід в усіх результатах роботи є необхідним, оскільки при прямуванні обернених температур максвелівських потоків до нескінченості самі максвеліани поводять себе δ–подібно; саме така поведінка максвеліанів дозволяє всі швидкості індивідуальних молекул потоків локалізувати поблизу значень їх масових швидкостей, завдяки цьому інтеграли по змінній $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ обчислюються, що спрощує подальший аналіз з метою мінімізації відхилу.

Перш ніж перейти безпосередньо до викладу основних тверджень, які дають різні можливості для розв'язання поставленої задачі, введемо таке означення.

Означення 3.1. Позначимо через $P(\mathbb{R}^n)$ клас невід'ємних функцій з $C^1(\mathbb{R}^n)$, які мають обмежений носій (коротко – фінітні функції) або спадають на нескінченності разом зі своїми частинними похідними першого порядку швидше ніж функція e^{-az^2} ($a > 0$ – деяка константа, а $z \in \mathbb{R}^n$).

Теорема 3.1. Нехай функції φ_i, $i = 1, 2$ в розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i \left(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{u}}_i \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\overline{\mathbf{u}}_i^2} \right), \; i = 1, 2, \tag{3.2}$$

де константи l_i, D_i задовольняють умови:

$$D_i > 0; \quad l_i \geqslant \frac{1}{2}, \; i = 1, 2, \tag{3.3}$$

а функції $C_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ належать $P(\mathbb{R}^3)$.

Нехай, крім того, виконуються умови:

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \; i = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_i = \frac{\overline{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}, \; i = 1, 2, \tag{3.5}$$

де

$$n_i \geqslant 1; \; k_i \geqslant \frac{1}{2}; \; k_i \geqslant \frac{1}{2} n_i, \quad i = 1, 2 \tag{3.6}$$

і $\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_{oi} \in \mathbb{R}^3$ – довільні фіксовані вектори.

Тоді має місце твердження:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; \forall D_1, D_2 : \; 0 < D_1, D_2 < \delta; \\ \exists \beta_o > 0, \; \forall \beta_i > \beta_o \;\; (i = 1, 2) \\ \Delta < \varepsilon. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Для доведення Теореми 3.1 нам знадобиться наступна лема, яка дає достатні умови неперервності супремума спеціального вигляду функції багатьох змінних, який взято по частині змінних.

Лема 3.1. (дивись [25], Лема 1). Нехай функції $\zeta(y)$, $L(z,y)$ визначені при $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $z \in Z \subseteq \mathbb{R}^q$ і задовольняють умови:

1) $\zeta(y)$ обмежена на Y;

2) $\forall z \in Z,\ L(z,y)$ обмежена на Y;

3) $L(z,y)$ неперервна по z на Z рівномірно відносно y на Y, тобто

$$\forall z_0 \in Z,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall y \in Y,\ \forall z \in Z,\ |z - z_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |L(z,y) - L(z_0,y)| < \varepsilon.$$

Тоді функція

$$l(z) = \sup_{y \in Y} |\zeta(y) + L(z,y)|$$

неперервна на множині Z.

Доведення. (Теореми 3.1) Перш за все перетворимо праву частину (3.1). Для цього спочатку підставимо розподіл (2.9) в рівняння (2.2)–(2.4), врахуючи той факт, що максвеліани $M_i,\ i = 1,2$ є точними розв'язками рівняння Больцмана, а це значить, що

$$D(M_i) = Q(M_i, M_i) = 0,\ i = 1,2. \tag{3.8}$$

Отримаємо наступні вирази для $D(f)$ і $Q(f,f)$ з (2.2)–(2.4)

$$D(f) = D(\varphi_1)M_1 + D(M_1)\varphi_1 + D(\varphi_2)M_2 + D(M_2)\varphi_2$$
$$= D(\varphi_1)M_1 + D(\varphi_2)M_2,$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)| \left[(\varphi_1 M_1(\mathbf{v}_1') + \varphi_2 M_2(\mathbf{v}_1'))\right.$$
$$\times (\varphi_1 M_1(\mathbf{v}') + \varphi_2 M_2(\mathbf{v}')) - (\varphi_1 M_1(\mathbf{v}_1) + \varphi_2 M_2(\mathbf{v}_1))$$
$$\left.\times (\varphi_1 M_1(\mathbf{v}) + \varphi_2 M_2(\mathbf{v}))\right] = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)|$$
$$\times \left[\varphi_1^2 (M_1(\mathbf{v}_1')M_1(\mathbf{v}') - M_1(\mathbf{v}_1)M_1(\mathbf{v})) + \varphi_2^2 (M_2(\mathbf{v}_1')M_2(\mathbf{v}')\right.$$
$$-M_2(\mathbf{v}_1)M_2(\mathbf{v})) + \varphi_1\varphi_2 (M_1(\mathbf{v}_1')M_2(\mathbf{v}') - M_1(\mathbf{v}_1)M_2(\mathbf{v})$$

$$+M_2(\mathbf{v}_1')M_1(\mathbf{v}') - M_2(\mathbf{v}_1)M_1(\mathbf{v}))] = \varphi_1^2 Q(M_1, M_1) + \varphi_2^2 Q(M_2, M_2)$$

$$+\varphi_1\varphi_2\left[Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1)\right] = \varphi_1\varphi_2\left[Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1)\right].$$

Тоді модуль різниці між правою і лівою частинами рівняння Больцмана можна записати в наступному вигляді:

$$|D(f) - Q(f, f)|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{2} D(\varphi_i) M_i - \varphi_1\varphi_2 \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} Q(M_i, M_j) \right|. \tag{3.9}$$

Далі скористаємося відомим представленням інтегралу зіткнень Q у вигляді розбиття на "прибуткову" та "затратну" частини G і L [28], [36], [58], а саме: для будь-яких g_1, g_2 має місце наступне твердження

$$Q(\mathrm{g}_1,\ \mathrm{g}_2) = \mathrm{G}(\mathrm{g}_1,\ \mathrm{g}_2) - \mathrm{g}_1 \mathrm{L}(\mathrm{g}_2), \tag{3.10}$$

де

$$\mathrm{G}(\mathrm{g}_1,\ \mathrm{g}_2) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)| \mathrm{g}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1') \mathrm{g}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'),$$

$$\mathrm{g}_1 \mathrm{L}(\mathrm{g}_2) = \mathrm{g}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)| \mathrm{g}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1).$$

Для подальших перетворень наведемо відомий факт [58]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} Q(M_i, M_j) d\mathbf{v} = 0,$$

звідки зважаючи на (3.10), очевидно, слідує рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{G}(M_i, M_j) d\mathbf{v} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_i \mathrm{L}(M_j) d\mathbf{v},\ i, j = 1, 2,\ i \neq j. \tag{3.11}$$

Тепер повернемося до виразу (3.9) і оцінемо його зверху (використовуючи відому нерівність $|a + b| \leqslant |a| + |b|$), враховуючи при цьому, що $\mathrm{G}(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \geqslant 0$ і $M_i > 0$, а також замінюючи $Q(M_i, M_j)$ правою частиною рівності (3.10) (замість g_1 і g_2 підставимо максвеліани M_1 і M_2 відповідно):

$$\begin{gathered}
|D(f) - Q(f,f)| = |D(\varphi_1)M_1 + D(\varphi_2)M_2 \\
-\varphi_1\varphi_2 \left[\mathrm{G}(M_1, M_2) + \mathrm{G}(M_2, M_1) - M_1\mathrm{L}(M_2) - M_2\mathrm{L}(M_1) \right]| \\
\leqslant \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[|D(\varphi_i) + \varphi_1\varphi_2\mathrm{L}(M_j)| \, M_i + \varphi_1\varphi_2\mathrm{G}(M_i, M_j) \right].
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Проінтегруємо отриману оцінку по всьому простору лінійних швидкостей (в припущені, що права частина нерівності (3.12) інтегровна по $\mathbf{v}$ на $\mathbb{R}^3$), і скористаємося рівністю (3.11):

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)| \, d\mathbf{v} \\
\leqslant \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(\varphi_i) + \varphi_1\varphi_2\mathrm{L}(M_j)| \, M_i d\mathbf{v} + \varphi_1\varphi_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_i\mathrm{L}(M_j) d\mathbf{v} \right].
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Далі, так як [28]

$$\mathrm{L}(M_j) = \frac{\rho_j d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_j - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right| e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w},$$

то зважаючи на (2.3) і (2.11) сума в правій частині нерівності (3.13) може бути представлена у наступному вигляді:

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}} \right) + \varphi_1\varphi_2\rho_j(t,\mathbf{x}) \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \right.\right. \\
\left. \times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_j - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right| e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \right| \rho_i(t,\mathbf{x}) \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}}_i)^2} d\mathbf{v} \\
\left. +\varphi_1\varphi_2\rho_i(t,\mathbf{x})\rho_j(t,\mathbf{x}) \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_j - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right| e^{-\mathbf{w}^2 - \beta_i(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}}_i)^2} d\mathbf{w} d\mathbf{v} \right].
\end{gathered}$$

Після заміни змінної

$$\mathbf{u} = \sqrt{\beta_i}(\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_i)$$

в усіх інтегралах ($J = \beta_i^{-3/2}$ – якобіан заміни), отримаємо наступне:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v} \\
&\leqslant \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \widetilde{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right. \right. \\
&+ \varphi_1 \varphi_2 \rho_j(t,\mathbf{x}) \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \widetilde{\mathbf{v}}_i - \widetilde{\mathbf{v}}_j - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right| e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \Bigg| \\
&\times \rho_i(t,\mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} + \varphi_1 \varphi_2 \frac{\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})}{\pi^2} d^2 \\
&\times \left. \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \widetilde{\mathbf{v}}_i - \widetilde{\mathbf{v}}_j - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right| e^{-\mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u} \right].
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Зробивши підстановку (2.13) і взявши супремум від обох частин (3.14), для відхилу Δ вигляду (3.1) отримаємо таку оцінку зверху, яку позначимо через Δ':

$$
\begin{aligned}
\Delta \leqslant \Delta' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} &\sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right. \right. \\
&+ \varphi_1 \varphi_2 \rho_j(t,\mathbf{x}) \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \Bigg| \rho_i(t,\mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \\
&+ \left. \varphi_1 \varphi_2 \frac{\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})}{\pi^2} d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u} \right],
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

де

$$
F_{ij} = F_{ij}(t,\mathbf{u},\mathbf{w}) = \left| \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{v}}_j + (\overline{\mathbf{u}}_j - \overline{\mathbf{u}}_i) t - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \ i \neq j, \tag{3.16}
$$

та

$$
\rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i \exp\left\{ \beta_i ((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})) \right\}, \ i = 1,2 \tag{3.17}
$$

(отримано підстановкою (2.13) в (2.12); $\rho_j(t,\mathbf{x})$ буде ідентично (3.17) тільки з індексом j замість i).

З'ясуємо коректність цієї оцінки. Збіжність інтегралів в правій частині (3.15) очевидна (завдяки лінійності виразу F_{ij} та наявності швидко спадаючих по $\mathbf{u}$ та $\mathbf{w}$ експонент), а для того, щоб існував супремум по $t,\ \mathbf{x}$, достатньо пересвідчитись, що величини

$$\varphi_i;\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|;\ \varphi_i t;\ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}\right),\quad i=1,2 \tag{3.18}$$

разом з множником вигляду (3.17), за умови, що $\varphi_i = \varphi_i(t,\mathbf{x})$ мають вигляд (3.2), будуть обмеженими на $\mathbb{R}^4$ для кожного фіксованого значення параметрів (зокрема, $\beta_i,\ i=1,2$). Перевіримо це. Перший з зазначених добутків, тобто $\varphi_i\rho_i(t,\mathbf{x})$ після такого перепозначення

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{\mathbf{u}}_i\frac{(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\overline{\mathbf{u}}_i^2}, \tag{3.19}$$

набуває вигляду:

$$\varphi_i\rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}C_i(\mathbf{y})\exp\left\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{y})\right\}. \tag{3.20}$$

Але завдяки (3.3) та фінітності функцій $C_i(\mathbf{y}),\ i=1,2$ з (3.20) випливає обмеженість по $t,\ \mathbf{y}$ на $\mathbb{R}^4$ не тільки самого цього виразу, а ще й його добутку на t. Аналогічний висновок залишається в силі і для решти добутків (3.18) на (3.17), оскільки з (3.2), знов переходячи до змінної (3.19), легко можна знайти, що:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = -\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}\left[\frac{2l_i t}{1+t^2}C_i(\mathbf{y}) + \frac{(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2}{\overline{\mathbf{u}}_i^2}\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \nabla_{\mathbf{y}}C_i(\mathbf{y})\right)\right] \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}\nabla_{\mathbf{x}}C_i(\mathbf{y}),\quad i=1,2, \tag{3.22}$$

а тому, використовуючи той факт, що $C_i(\mathbf{y}) \in P(\mathbb{R}^3),\ i=1,2$ (Означення3.1) разом з умовою (3.3), знову ж таки отримуємо обмежені функції.

Далі, з (3.15) і властивостей супремума, отримаємо:

$$\Delta' \leqslant \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,\mathbf{x}) + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\rho_i(t,\mathbf{x})\right.\right.$$

$$+\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}\Bigg|\Bigg] e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$

$$+\frac{d^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left[\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}(\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})(F_{12}+F_{21}))\right]e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u},$$

де F_{ij} має вигляд (3.16), а $\rho_i(t,\mathbf{x})$ з (3.17).

Остання нерівність після підстановки виразів (3.2), (3.4), (3.5), (3.21), (3.22) і введення позначення $\gamma_i=\frac{1}{\beta_i}$, $i=1,2$ набуде вигляду:

$$\Delta'\leqslant\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\frac{1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\Bigg|-\frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}\left\{\frac{2l_it}{1+t^2}C_i(\mathbf{y})\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_i^{k_i}(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\overline{\mathbf{v}}_{oi})-\gamma_i^{n_i}t\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2}{\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2}(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\nabla_{\mathbf{y}}C_i(\mathbf{y}))\right\}\rho_i(t,\mathbf{x}) \tag{3.23}$$
$$+\left(\sqrt{\gamma_i}\mathbf{u}+\gamma_i^{k_i}\overline{\mathbf{v}}_{oi}-\gamma_i^{n_i}\overline{\mathbf{u}}_{oi}t,\ \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}}\nabla_{\mathbf{x}}C_i(\mathbf{y})\right)\rho_i(t,\mathbf{x})$$
$$+\frac{D_1D_2}{(1+t^2)^{l_1+l_2}}C_1(\mathbf{y})C_2(\mathbf{y})\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}(t,\mathbf{u},\mathbf{w})e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}\Bigg|\Bigg]e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$
$$+\frac{d^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\Bigg[\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\Bigg(\frac{D_1D_2}{(1+t^2)^{l_1+l_2}}C_1(\mathbf{y})C_2(\mathbf{y})\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})$$
$$\times(F_{12}(t,\mathbf{u},\mathbf{w})+F_{21}(t,\mathbf{u},\mathbf{w}))\Bigg)\Bigg]e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u},$$

де $\mathbf{y}$, $\rho_i(t,\mathbf{x})$, $F_{ij}(t,\mathbf{u},\mathbf{w})$, завдяки все тим же припущенням (3.4), (3.5), тепер матимуть вигляд ($\gamma_i=\frac{1}{\beta_i}$, $i=1,2$):

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}+\overline{\mathbf{u}}_{oi}\frac{\left(\overline{\mathbf{v}}_{oi}\gamma_i^{k_i-\frac{1}{2}n_i}-\overline{\mathbf{u}}_{oi}t\gamma_i^{\frac{1}{2}n_i}\right)^2}{2\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2},\ i=1,2; \tag{3.24}$$

$$\rho_i(t,\mathbf{x})=\overline{\rho}_i\exp\left\{\left(\overline{\mathbf{v}}_{oi}\gamma_i^{k_i-\frac{1}{2}}-\overline{\mathbf{u}}_{oi}t\gamma_i^{n_i-\frac{1}{2}}\right)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})\gamma^{n_i-1}\right\}; \tag{3.25}$$

$$F_{ij}(t,\mathbf{u},\mathbf{w})$$
$$=\left|\sqrt{\gamma_i}\mathbf{u}+\overline{\mathbf{v}}_{oi}\gamma_i^{k_i}-\overline{\mathbf{v}}_{oj}\gamma_j^{k_j}+(\overline{\mathbf{u}}_{oj}\gamma_j^{n_j}-\overline{\mathbf{u}}_{oi}\gamma_i^{n_i})t-\sqrt{\gamma_j}\mathbf{w}\right|,\ i\neq j. \tag{3.26}$$

Застосуємо Лему 3.1 до кожного з супремумів, які входять до (3.23). Тут $y = (t, \mathbf{x})$, $z = (\mathbf{u}, \gamma)$, виконання умов 1,2 Леми 3.1 випливає з обмеженості добутків величин (3.18) на множник вигляду (3.17) (цей факт доведено вище), при цьому φ_i та $\rho_i(t, \mathbf{x})$ мають вигляд (3.2) та (3.25) відповідно. Умова 3 Леми 3.1 задовольняється завдяки знову ж таки (3.18), лінійності (3.26) відносно змінної $\mathbf{u}$, а також рівномірній збіжності внутрішніх інтегралів в (3.23) по $\mathbf{u}$ та γ на будь-якому компакті, а по t і $\mathbf{x}$ – на всьому просторі $\mathbb{R}^4$. Отже, кожен з інтегралів в (3.23) береться від функції, неперервної по $\mathbf{u}$, γ, а також збігається рівномірно відносно γ на будь-якому компакті, а значить, вся величина Δ' неперервна по γ. Тому в (3.23) можна перейти до низькотемпературної границі при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$, що рівносильно прямуванню γ_i, $i = 1, 2$ до нуля. Таким чином, застосування Леми 3.1 та теореми про граничний перехід під знаком інтегралу дає нам змогу перейти до границі під знаками інтегралів, що входять до (3.23), при цьому, оскільки обидва супремуми в (3.23) є неперервними функціями, то їх границі при $\gamma_i \to 0$, $i = 1, 2$ дорівнюють значенням цих супремумів при $\gamma_i = 0$. Звідси, другий супремум в (3.23) буде дорівнювати нулю, зважаючи на (3.26) та (3.6), так само як і деякі доданки першого супремума. Тому в (3.23), згадуючи (3.24), (3.25) при виконанні (3.6), та вертаючись до параметрів β_i ($\beta_i = \frac{1}{\gamma_i}$, $i = 1, 2$), маємо:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta'$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \left| -\frac{2D_i l_i t}{(1+t^2)^{l_i+1}} C_i(\mathbf{x} + \mathbf{U}_i) \overline{\rho}_i \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \right| e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}, \tag{3.27}$$

де

$$\mathbf{U}_i = \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{якщо } k_i > \frac{1}{2} n_i \\ \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi} \overline{\mathbf{v}}_{oi}^2}{2 \overline{\mathbf{u}}_{oi}^2}, & \text{якщо } k_i = \frac{1}{2} n_i \end{array} \right. , \quad i = 1, 2; \tag{3.28}$$

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} 1; & n_i > 1; k_i > \frac{1}{2}, \\ \exp\left\{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \mathbf{x})\right\}; & n_i = 1; k_i > \frac{1}{2}, \\ \exp\left\{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \mathbf{x})\right\}; & n_i = 1; k_i = \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad i = 1, 2, \tag{3.29}$$

(випадок $n_i > 1$, $k_i = \frac{1}{2}$ не вказано, оскільки при таких умовах $\mathcal{F}_i(\mathbf{x})$ дорівнює деякій константі, і не дає принципово нових результатів).

Після тривіального інтегрування в (3.27) по змінній $\mathbf{u}$, здобуваємо:

$$\begin{gathered} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' \\ \leqslant \sum_{i=1}^{2} \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{2D_i l_i |t|}{(1+t^2)^{l_i+1}} C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\overline{\rho}_i \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \\ \leqslant 2 \max_{i=1,2} \left(l_i \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}} \right) \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i D_i \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \{\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\}, \end{gathered} \tag{3.30}$$

де $\mathcal{F}_i(\mathbf{x})$ задано в (3.29), а $\mathbf{U}_i$ дорівнює або 0, або (3.28) (в обох випадках функція C_i залишається фінітною, що забезпечує існування скінченного супремума по $\mathbf{x}$). Вираз (3.30), очевидно, можна зробити скільки завгодно малим при досить малих значеннях $D_1,\ D_2 > 0$, а оскільки він є границею при $\beta_i \to +\infty,\ i = 1, 2$ оцінки зверху для відхилу Δ, то й сама величина Δ за таких умов стає довільно малою (це видно з (3.15)), що й можна записати у вигляді твердження (3.7). Теорему доведено. □

Зауваження 3.1. Ця теорема дає достатню умову довільної малості відхилу Δ, але твердження (3.7) можна трактувати лише як існування і рівність нулю деякої повторної границі в просторі тих параметрів, які до нього входять. Тобто твердження (3.7) позначає той факт, що

$$\lim_{D_1, D_2 \to 0} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta = 0.$$

При цьому покажемо, як при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайти таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta < \varepsilon$ при будь-яких $0 < D_i < \delta(\varepsilon)$ (i=1,2).

Дійсно, якщо прийняти до уваги коректно визначену оцінку зверху Δ' для відхилу Δ, а саме вираз (3.15), а також врахувати той факт, що $\lim\limits_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta \leqslant \lim\limits_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta'$, а значить

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta \leqslant 2\max_{i=1,2}\left(l_i \sup_{t\in\mathbb{R}^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}\right)\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i D_i \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\{\mathcal{F}_i(\mathbf{x})C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\}.$$

(скористалися виразом (3.30) при збереженні (3.28) та (3.29)). Отже,

$$2\max_{i=1,2}\left(l_i \sup_{t\in\mathbb{R}^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}\right)\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i D_i \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\{\mathcal{F}_i(\mathbf{x})C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\} < \varepsilon.$$

Неважко бачити, що $\max\limits_{i=1,2}\left(l_i \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}\right)$ – це деяка константа, яка залежить лише від l_i, при цьому умова (3.3) ($l_i \geqslant \frac{1}{2}$) забезпечує існування скінченного супремума по t.

Значить

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i D_i \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\{\mathcal{F}_i(\mathbf{x})C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\} < \frac{\varepsilon}{2\max\limits_{i=1,2}\left(l_i \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}\right)}.$$

Враховуючи існування скінченного супремума по $\mathbf{x}$ (цей факт доведено в Теоремі 3.1), ліву частину останньої нерівності можна оцінити наступним чином

$$\max_{i=1,2}\left(\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\{\mathcal{F}_i(\mathbf{x})C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\}\right)\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i D_i < \frac{\varepsilon}{2\max\limits_{i=1,2}\left(l_i \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}\right)}$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i D_i < \frac{\varepsilon}{2\max\limits_{i=1,2}\left(l_i \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^1}\frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}\right)\max\limits_{i=1,2}\left(\sup\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}\{\mathcal{F}_i(\mathbf{x})C_i(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i)\}\right)}.$$

Далі, нехай

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i D_i \leqslant \max_{i=1,2}(\overline{\rho}_i)\sum_{i=1}^{2}D_i = \max_{i=1,2}\overline{\rho}_i\,(D_1+D_2)\,,$$

тоді

$$< \frac{\frac{D_1 + D_2}{\varepsilon}}{2 \max\limits_{i=1,2} \left(l_i \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^1} \frac{|t|}{(1+t^2)^{l_i+1}} \right) \max\limits_{i=1,2} \left(\sup\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \{\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) C_i(\mathbf{x} + \mathbf{U}_i)\} \right) \max\limits_{i=1,2} \overline{\rho}_i}.$$

Якщо позначити знаменник правої частини останньої нерівності, наприклад, через $\mathcal{W}$, де $\mathcal{W}$ як можна бачити буде деяка константа, то можна сказати, що достатньо взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{2\mathcal{W}}$.

Зазначимо, що для всіх результатів Розділу 3, аналогічних твердженню (3.7), так само буде достатньо взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{2\mathcal{W}}$ тільки константа $\mathcal{W}$ буде мати дещо інакший вигляд.

Далі розглянемо результат на основі деяких інших припущень, які дають змогу компенсувати збільшення $\rho_i(t, \mathbf{x})$ при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$.

Теорема 3.2. Нехай коефіцієнтні функції в розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) \exp\left\{ -\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})) \right\}, \ i = 1, 2, \tag{3.31}$$

де функції $\psi_i(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$ гладкі і такі, що величини

$$\psi_i; \ \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \ \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right|; \ \psi_i t; \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad i = 1, 2 \tag{3.32}$$

обмежені по t, $\mathbf{x}$ на $\mathbb{R}^4$, крім того, нехай виконується умова (3.4), а саме

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \ i = 1, 2,$$

де

$$n_i \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.33}$$

Тоді відхил Δ вигляду (3.1) коректно визначений, й існує така величина Δ', що

$$\Delta \leqslant \Delta', \tag{3.34}$$

причому для $n_i > \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta' = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right.$$
$$\left.+\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\right|$$
$$+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}(\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x}))=\mathcal{L}, \tag{3.35}$$

а для $n_i=\frac{1}{2}$ додатково в (3.35) виникає новий доданок

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta'=\mathcal{L}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\psi_i(t,\mathbf{x}). \tag{3.36}$$

Доведення. Для функцій (3.31) замість (3.21) та (3.22) ми отримаємо:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\exp\left\{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_it)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))\right\}$$
$$\times\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i((\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{u}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2)\right\}, \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}=\exp\left\{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_it)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))\right\}$$
$$\times\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}-2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right\},\ i=1,2. \tag{3.38}$$

Вирази (3.16) й (3.17), очевидно, залишаються в силі. Таким чином, підстановка (3.17), (3.31), (3.37), (3.38) в (3.15) дає наступний вираз:

$$\Delta'=\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i((\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{u}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2)\right.\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_it,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}-2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right)\right\}e^{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_it)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))}$$
$$+\psi_1\psi_2\overline{\rho}_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}e^{-\beta_1((\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x}))-\beta_2((\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x}))}e^{\beta_j((\overline{\mathbf{v}}_j-\overline{\mathbf{u}}_jt)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_j,\mathbf{x}))}$$
$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}\right|\overline{\rho}_ie^{\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_it)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))}\pi^{-3/2}e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$
$$+\psi_1\psi_2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\frac{d^2}{\pi^2}e^{-\beta_1((\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x}))-\beta_2((\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x}))}$$

$$\times e^{\beta_1((\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1 t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x}))+\beta_2((\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2 t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x}))}\int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u}\Bigg],$$

який після спрощення приводить до остаточного вигляду Δ' з (3.34) зі збереженням (3.16). Отже,

$$\Delta' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i((\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{u}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2)$$
$$+\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}-2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right)$$
$$+\psi_1\psi_2\overline{\rho}_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}\Bigg|\overline{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$
$$+\psi_1\psi_2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\frac{d^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u}\Bigg]$$

(існування значень Δ і Δ' слідує з умов Теореми 3.2). Далі, після деяких спрощень, а саме після розкриття дужок під знаком модуля та приведення подібних, отримаємо наступне:

$$\Delta' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)-2\psi_i\sqrt{\beta_i}(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_i)$$
$$+\psi_1\psi_2\overline{\rho}_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}\Bigg|\overline{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$
$$+\psi_1\psi_2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\frac{d^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u}\Bigg],$$

що завдяки перепозначенням запишеться у вигляді

$$\Delta' = \pi^{-3/2}\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+A_{ij}+B_i\right|+A_{ij}\right]e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}, \qquad (3.39)$$

де

$$A_{ij}=A_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w})=\psi_1\psi_2\overline{\rho}_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w},\quad i,j=1,2,\ i\neq j, \qquad (3.40)$$

$$B_i = B_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) - 2\psi_i\sqrt{\beta_i}(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_i), \ \ i = 1,2. \quad (3.41)$$

Перехід до границі при $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$ в (3.39) може бути зроблений таким же чином, як при доведенні Теореми 3.1 (завдяки гладкості функцій $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2$ з урахуванням припущень Теореми 3.2, а також застосовуючи Лему 3.1 та техніку розвивену при доведенні Теореми 3.1), але результат буде інший. Дійсно, якщо врахувати, що рівномірно на кожному компакті має місце наступна рівність (випливає з (3.16) та (3.4) при умові (3.33)):

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} F_{ij} = |\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{v}}_j|, \ \ i,j = 1,2, \ i \neq j, \quad (3.42)$$

то перехід до низькотемпературної границі в (3.40) та подальше інтегрування по змінній $\mathbf{w}$, дає наступний результат:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} A_{ij} = \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{v}}_j|, \ \ i,j = 1,2, \ i \neq j. \quad (3.43)$$

Границя B_i залежить від параметра n_i (умови (3.4) і (3.33)):

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} B_i = \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) + 2\psi_i H_i, \ \ i = 1,2, \quad (3.44)$$

де

$$H_i = \left[\begin{array}{ll} 0, & n_i > \frac{1}{2} \\ -(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_{oi}), & n_i = \frac{1}{2}. \end{array}\right. \quad (3.45)$$

Отже, остаточно, перехід до границі при низьких значеннях температур у виразі (3.39), з використанням (3.43)–(3.44) буде виглядати наступним чином:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \pi^{-3/2} \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \int_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\Bigg| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ + \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| + 2\psi_i H_i \Bigg| + \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \Bigg] e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \\ = \pi^{-3/2} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ + \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| + 2\psi_i H_i \Bigg| e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$+\pi^{-1/2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} d^2\overline{\rho}_i\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\psi_1\psi_2 e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u},$$

де H_i з (3.45).

Для випадку $H_i=0$ границя (3.46) перепишеться наступним чином:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta'=\pi^{-3/2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right.$$
$$\left.+\psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\right|e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u} \tag{3.47}$$
$$+\pi^{-1/2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} d^2\overline{\rho}_i\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\psi_1\psi_2 e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u},$$

що після інтегрування по $\mathbf{u}$ приводить до (3.35).

У випадку $H_i=-(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_{oi})$ в (3.47) з'являється додатковий доданок

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta'=\pi^{-3/2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right.$$
$$\left.+\psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|-2\psi_i(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_{oi})\right|e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$
$$+\pi^{-1/2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} d^2\overline{\rho}_i\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\psi_1\psi_2 e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}$$
$$=\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)+\psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\right| \tag{3.48}$$
$$+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}(\psi_1\psi_2)$$
$$+\pi^{-3/2}\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}2\psi_i\left|(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_{oi})\right|e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}.$$

Розглянемо останній доданок в (3.48) детальніше. Існування супремума в ньому, очевидно, випливає з обмеженості функції, яка під ним стоїть, а саме завдяки гладкості й обмеженості функції $\psi_i=\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$. Далі, безпосереднім інтегруванням в сферичній системі координат, отримаємо:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_{oi})\right|e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}=2\pi|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|.$$

Таким чином, при $n_i > \frac{1}{2}$ ми отримуємо значення границі (3.36).

Отже, істинність всіх тверджень теореми доведена. $\square$

Наслідок 3.1. Нехай виконуються вимоги Теореми 3.2, а саме (3.31), (3.4) й (3.33), і функції $\psi_i = \psi_i(t, \mathbf{x})$ мають вигляд

$$\psi_i = D_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{3.49}$$

де $D_i > 0$; а гладкі, невід'ємні функції $C_i(t)$, $i = 1, 2$, такі, що вирази $tC_i(t)$ й $C_i'(t)$ обмежені на $\mathbb{R}^1$.

Тоді:

а) для C_1, C_2, $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$, які задовольняють наступні умови

$$\mathrm{supp}\ C_1 \cap \mathrm{supp}\ C_2 = \emptyset \tag{3.50}$$

або

$$\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_2, \tag{3.51}$$

справедливе твердження (3.7);

б) для довільних C_1, C_2, $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$ дійсно наступне твердження:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall D_1, D_2, d: \ 0 < D_1, D_2, d < \delta; \\ \exists \beta_o > 0, \ \forall \beta_1, \beta_2 > \beta_o \\ \Delta < \varepsilon. \end{gathered} \tag{3.52}$$

Доведення. Вимога (3.49) разом з умовами, які були накладені на функції $C_i(t)$, $i = 1, 2$ в даному наслідку, забезпечують виконання припущень Теореми 3.2. Отже, вирази (3.35) і (3.36), враховуючи той факт, що функції ψ_i, $i = 1, 2$ тепер будуть мати вигляд (3.49), перетворюються: для $n_i > \frac{1}{2}$ на

$$\begin{gathered} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' \\ = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \left| D_i C_i'(t) + D_1 D_2 C_1(t) C_2(t) \pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \right| \\ + 2\pi d^2 D_1 D_2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{t \in \mathbb{R}^1} (C_1(t) C_2(t)) = \mathcal{L}_1, \end{gathered} \tag{3.53}$$

а для $n_i = \frac{1}{2}$ – на

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \mathcal{L}_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} D_i \overline{\rho}_i |\overline{\mathbf{u}}_{oi}| \sup_{t \in \mathbb{R}^1} C_i(t). \tag{3.54}$$

Далі, завдяки припущенням (3.50) або (3.51), або при $d \to 0$ (остання умова – єдиний новий чинник в (3.52) у порівнянні з (3.7)), ненульовими доданками в (3.53) й (3.54) будуть тільки

$$D_i \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |C_i'(t)|, \quad D_i \sup_{t \in \mathbb{R}^1} |C_i(t)|, \quad i = 1, 2.$$

Обидва ці супремуми, завдяки гладкості функцій $C_i(t)$, скінченні. Таким чином, ми отримуємо твердження (3.7) і (3.52) для ситуацій а) і б) даного наслідку відповідно. □

Існують також ще два можливих варіанти, коли показник ступеня в (3.31) містить в собі не обидва доданки, а тільки якийсь один з них. Перший з таких варіантів описує наступна теорема.

Теорема 3.3. Нехай в бімодальному розподілі (2.9) коефіцієнтні функції мають вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i (\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}, \quad i = 1, 2, \tag{3.55}$$

де функції $\psi_i(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$, $i = 1, 2$ гладкі і такі, що добутки величин (3.32) на множники $\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\}$, $i = 1, 2$ обмежені по t, $\mathbf{x}$ на $\mathbb{R}^4$.

Крім того, нехай виконується умова (3.4)

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \quad i = 1, 2$$

де

$$n_i \geqslant 1. \tag{3.56}$$

Тоді справедливим є твердження (3.34), тобто $\Delta \leqslant \Delta'$, причому для $n_i > 1$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta' = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\left|\mu_i(\mathbf{x})\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})\mu_1(\mathbf{x})\mu_2(\mathbf{x})\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|\right|+2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2| \tag{3.57}$$
$$\times\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\left[\mu_1(\mathbf{x})\mu_2(\mathbf{x})\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})\right]=\Omega,$$

а для $n_i = 1$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\Delta' = \Omega + 2\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i|(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\overline{\mathbf{v}}_i)|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\{\mu_i(\mathbf{x})\psi_i(t,\mathbf{x})\}, \tag{3.58}$$

де

$$\mu_i(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} 1, & \text{якщо } n_i>1,\\ \exp\left\{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})\right\}, & \text{якщо } n_i=1, \end{array}\right. \quad i=1,2. \tag{3.59}$$

Доведення. Продиференціюємо функцію $\varphi_i(t,\mathbf{x})$ з (3.55) по змінним t і $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{u}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right)\exp\left\{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}, \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\exp\left\{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}. \tag{3.61}$$

Далі, скористаємося оцінкою (3.15), підставивиши замість функції φ_i та частинних похідних $\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}$ і $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}$ вирази (3.55), (3.60) і (3.61) відповідно, не забувши при цьому скористатися формулою (3.17), тоді

$$\Delta' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|e^{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2}\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right\}\right.\right.$$
$$+\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)e^{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2}$$
$$\left.+\psi_1\psi_2 e^{-\beta_1(\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1 t)^2}e^{-\beta_2(\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2 t)^2}\overline{\rho}_j e^{\beta_j((\overline{\mathbf{v}}_j-\overline{\mathbf{u}}_j t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_j,\mathbf{x}))}\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}\right|$$
$$\times\overline{\rho}_i e^{\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))}\pi^{-3/2}e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}+\psi_1\psi_2 e^{-\beta_1(\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1 t)^2}e^{-\beta_2(\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2 t)^2}$$
$$\left.\times\left(\frac{d}{\pi}\right)^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 e^{\beta_1((\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1 t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x}))}e^{\beta_2((\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2 t)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x}))}\int\limits_{\mathbb{R}^6}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u}\right],$$

а відтак

$$\Delta' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i \left((\overline{\mathbf{u}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right) \right.\right.$$
$$+ \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right)$$
$$\left. + \psi_1\psi_2 \overline{\rho}_j e^{2\beta_j(\overline{\mathbf{u}}_j,\mathbf{x})} \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \right| \overline{\rho}_i e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})} \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \tag{3.62}$$
$$\left. + \psi_1\psi_2 \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 e^{2(\mathbf{x},\beta_1\overline{\mathbf{u}}_1+\beta_2\overline{\mathbf{u}}_2)} \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u} \right],$$

де F_{ij} знову мають вигляд (3.16). Отримана оцінка Δ' для (3.34) буде коректно визначена завдяки умовам Теореми 3.3 та збіжності всіх інтегралів, які до неї входять. Так само як і при доведенні Теореми 3.2, аналогічно виразу (3.39), проведемо перепозначення в (3.62) (але зараз як сам вираз (3.39) так і вирази (3.40), (3.41) будуть дещо складніші):

$$\Delta' = \pi^{-3/2} \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_{ij} + B_i \right| + A_{ij} \right] e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}, \tag{3.63}$$

$$A_{ij} = A_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w}) = \psi_1\psi_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \overline{\rho}_j e^{2\beta_j(\overline{\mathbf{u}}_j,\mathbf{x})} \int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w}, \quad i \neq j, \tag{3.64}$$

$$B_i = B_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) + 2\beta_i\psi_i \left((\overline{\mathbf{u}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right) \tag{3.65}$$

Перейдемо в отриманих виразах до границі при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$ аналогіно тому, як це було зроблено в доведенні Теореми 3.2 (враховуючи умови (3.4) і (3.56)), а потім проінтегруємо їх по змінній $\mathbf{w}$, при цьому легко бачити, що (3.42) не зміниться. Отже,

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} A_{ij} = \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j \mu_j(\mathbf{x}) |\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{v}}_j|, \quad i,j = 1,2,\ i \neq j, \tag{3.66}$$

де $\mu_j(\mathbf{x})$ має вигляд (3.59) тільки з індексом j;

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} B_i = \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) + 2\psi_i H_i',\ i = 1,2, \tag{3.67}$$

де

$$H_i' = \left[\begin{array}{ll} 0, & n_i > 1, \\ (\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_i), & n_i = 1. \end{array} \right. \tag{3.68}$$

Відтак граничний перехід в (3.63) (його обґрунтування проводиться аналогічно тому, як це було зроблено в доведеннях Теореми 3.1 та Теореми 3.2), беручи до уваги (3.66)–(3.68), та подальше інтегрування по змінній $\mathbf{u}$ приведе до виразів (3.57) та (3.58), що й треба було довести. □

Наслідок 3.2. Нехай виконані умови Теореми 3.3, і функції $\psi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ мають вигляд:

$$\psi_i(t, \mathbf{x}) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i \left([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i] \right), \; i = 1, 2, \tag{3.69}$$

якщо

$$(\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{u}}_i) = 0, \; i = 1, 2; \tag{3.70}$$

та

$$\psi_i(t, \mathbf{x}) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i \left(\mathbf{x} \right), \; i = 1, 2 \tag{3.71}$$

для довільних $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$, де виконується умова (3.3) ($D_i > 0$, $l_i \geqslant \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$), й функції C_i, $i = 1, 2$ належать $P(\mathbb{R}^3)$. Тоді обидва твердження Наслідку 3.1 залишаються вірними.

Доведення. Перевіримо, чи буде вираз (3.69) при вказаній в даному наслідку умові (3.70) узгоджуватися з вимогами Теореми 3.3. Розкладемо довільний вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ по ортогональному базису (зважаючи на (3.70))

$$\overline{\mathbf{u}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i, [\overline{\mathbf{u}}_i \times \overline{\mathbf{v}}_i], \qquad \text{тобто} \qquad \mathbf{x} = x_1 \overline{\mathbf{u}}_i + x_2 \overline{\mathbf{v}}_i + x_3 [\overline{\mathbf{u}}_i \times \overline{\mathbf{v}}_i],$$

тоді

$$\begin{gathered} \psi_i e^{2\beta_i (\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i]) e^{2\beta_i (\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})} \\ = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(x_1 [\overline{\mathbf{u}}_i \times \overline{\mathbf{v}}_i] - x_3 [\overline{\mathbf{v}}_i \times [\overline{\mathbf{u}}_i \times \overline{\mathbf{v}}_i]]) e^{2\beta_i x_1 \overline{\mathbf{u}}_i^2} \\ = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} C_i(x_1 [\overline{\mathbf{u}}_i \times \overline{\mathbf{v}}_i] - x_3 \overline{\mathbf{u}}_i \overline{\mathbf{v}}_i^2) e^{2\beta_i x_1 \overline{\mathbf{u}}_i^2}, \end{gathered} \tag{3.72}$$

однак зі зростанням x_1, коли експонента в (3.72) також зростає, аргумент функції C_i вне залежності від поведінки x_3, очевидно, теж збільшується (x_2 в (3.72) відсутнє завдяки перпендикулярності компонентів цього аргументу). Таким чином, функція C_i або зникне (якщо вона фінітна), або буде пригнічувати ріст експоненти з урахуванням припущення про її швидке спадання. Отже, вираз (3.72) в цілому буде обмежений при $x_3 \to \infty$. Добуток (3.72) на t також обмежений завдяки (3.3). Похідна $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$ веде себе абсолютно так само (вираз $\frac{2D_i l_i |t|}{(1+t^2)^{l_i+1}}$ буде обмежений з огляду на (3.3)). Крім того, з (3.69) ми знаходимо:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left[\overline{\mathbf{v}}_i \times \nabla_{\mathbf{x}} C_i([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i]) \right], \; i = 1, 2, \tag{3.73}$$

тобто вирази

$$\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right| e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})}; \quad t \left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})}$$

обмежені з тих же причин, що і (3.72), оскільки $\nabla_{\mathbf{x}} C_i([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i])$ фінітний або швидко спадний (Означення 3.1).

Очевидно, що вираз (3.71), при вказаних у даному наслідку умовах, також узгоджується з вимогами Теореми 3.3 завдяки аналогічним міркуванням та Означеню 3.1 для функції $C_i(\mathbf{x}), \; i = 1, 2$.

Таким чином, для обох виразів (3.69), (3.71) всі умови Теореми 3.3 виконуються. Отже, твердження (3.57) або (3.58) вірні. При цьому, якщо виконується (3.70), то другий доданок в (3.58) зникає, тобто це важливо тільки, коли $n_i = 1$ і виконується (3.69).

Далі, в обох випадках а), б) Наслідку 3.1 єдиним ненульовим виразом в (3.57) залишається

$$\mu_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right).$$

Але в (3.58) додатковий доданок до Ω може залишитися у випадку (3.71). Однако, як видно з (3.73), при виконанні (3.69), ми маємо

$$\left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0, \; i = 1, 2,$$

та для (3.71)

$$\left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) = \frac{D_i}{(1+t^2)^{l_i}} \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \nabla_{\mathbf{x}} C_i(\mathbf{x})\right), \; i = 1, 2,$$

так, для всіх можливих випадків, твердження (3.57), (3.58) при постійних чинниках скоротяться до значень типу (3.30), де визначені або безпосередньо функції C_i, $i = 1, 2$, або їх градієнти. Цей факт, очевидно, призводить до (3.7) і (3.52) так само, як і в доведені попереднього наслідку. □

Зауваження 3.2. Вирази (3.69) і (3.71) схожі, але вони не замінюють один одного. Дійсно, $C_i([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i])$ описує функцію від $\mathbf{x}$, яка є постійною уздовж вектора $\overline{\mathbf{v}}_i$, тобто (завдяки (3.70)) в напрямку перпендикулярному напрямку прискорення і ущільнення i-го потоку, і фінітна або швидко спадна, зокрема, уздовж вектора $\overline{\mathbf{u}}_i$, тобто в напрямку росту множника $\mu_i(\mathbf{x})$ ("циліндр"). Тим не менш, (3.71) відповідає деякому "згустку" газу, зосередженому на обмеженому в $\mathbb{R}^3$ носії, а чинники залежні від t, які входять до (3.69) та (3.71), означають, що взаємодія між двома течіями слабшає при $t \to \pm\infty$, але не занадто швидко.

Теорема 3.4. Нехай функції $\varphi_i = \varphi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ в бімодальному розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) \exp\left\{-2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\right\}, \quad i = 1, 2, \tag{3.74}$$

і вимоги

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \quad \overline{\mathbf{v}}_i = \frac{\overline{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}, \; i = 1, 2 \tag{3.75}$$

справедливі при

$$n_i \geqslant \frac{1}{2}, \; k_i \geqslant \frac{1}{2}, \; i = 1, 2, \tag{3.76}$$

де $\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_{oi} \in \mathbb{R}^3$ – довільні фіксовані вектори.

Крім того, нехай гладкі, невід'ємні функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2$ гарантуют обмеженість на $\mathbb{R}^4$ добутків величин

$$\psi_i;\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|;\ \psi_i t;\ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right),\quad i = 1,2$$

на множники вигляду $\exp\left\{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}$.

Тоді оцінка (3.34) залишається вірною, при цьому:

1. Якщо $n_i > \frac{1}{2}$; $k_i > \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right|. \tag{3.77}$$

2. Якщо $n_i > \frac{1}{2}$; $k_i = \frac{1}{2}$, то

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2} \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right|. \tag{3.78}$$

3. Якщо $n_i = \frac{1}{2}$; $k_i > \frac{1}{2}$, то

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \left\{ e^{t^2\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i(t,\mathbf{x}) t \overline{\mathbf{u}}_{oi}^2\right|\right\} \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \left|\overline{\mathbf{u}}_{oi}\right| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \left\{ e^{t^2\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2} \psi_i(t,\mathbf{x})\right\}.\end{gathered} \tag{3.79}$$

4. Якщо $n_i = k_i = \frac{1}{2}$, то

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \left\{ e^{(\overline{\mathbf{v}}_{oi} - \overline{\mathbf{u}}_{oi} t)^2} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i(t,\mathbf{x}) t \overline{\mathbf{u}}_{oi}^2\right|\right\} \\ +2 \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \left(\frac{2|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|}{\sqrt{\pi}} + \left|(\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_{oi})\right|\right) \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \left\{ e^{(\overline{\mathbf{v}}_{oi} - \overline{\mathbf{u}}_{oi} t)^2} \psi_i(t,\mathbf{x})\right\}.\end{gathered} \tag{3.80}$$

Доведення. Очевидно, що для функцій вигляду (3.74) аналоги формул (3.60)–(3.62) будуть наступними:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \exp\left\{-2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\right\},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} - 2\beta_i \psi_i \overline{\mathbf{u}}_i\right) \exp\left\{-2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\right\};$$

$$\Delta' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} \right) \right.\right.$$

$$\left. -2\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i \right) + \psi_1\psi_2\overline{\rho}_j e^{\beta_j(\overline{\mathbf{v}}_j-\overline{\mathbf{u}}_j t)^2} \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \right|$$

$$\times\overline{\rho}_i e^{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2} \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}$$

$$\left. +\psi_1\psi_2 \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 e^{\beta_1(\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{u}}_1 t)^2+\beta_2(\overline{\mathbf{v}}_2-\overline{\mathbf{u}}_2 t)^2} \int_{\mathbb{R}^6} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u} \right].$$

Таким чином, замість (3.63)–(3.65) ми отримаємо:

$$\begin{gathered} \Delta' = \pi^{-3/2} \sup_{(t,\mathbf{x})\in R^4} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2} \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + A_{ij} + B_i \right| + A_{ij} \right] e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}, \end{gathered} \tag{3.81}$$

$$A_{ij} = A_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w}) = \psi_1\psi_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \overline{\rho}_j e^{\beta_j(\overline{\mathbf{v}}_j-\overline{\mathbf{u}}_j t)^2} \int_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w}, \quad i\neq j, \tag{3.82}$$

$$\begin{gathered} B_i = B_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} \right) \\ +2\beta_i\psi_i \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\beta_i}}(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_i) - (\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i) + t\overline{\mathbf{u}}_i^2 \right\}. \end{gathered} \tag{3.83}$$

Далі, застосовуючи Лему 3.1 та техніку розвивену при доведенні Теореми 3.1, границя експонент, які входять до Δ' з (3.81), залежить від значень параметрів n_i, k_i, $i = 1,2$ наступним чином:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} e^{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2} = \sigma_i(t) = \left[\begin{array}{ll} 1, & \text{якщо } n_i > \frac{1}{2}, k_i > \frac{1}{2} \\ e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2}, & \text{якщо } n_i > \frac{1}{2}, k_i = \frac{1}{2} \\ e^{t^2\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2}, & \text{якщо } n_i = \frac{1}{2}, k_i > \frac{1}{2} \\ e^{(\overline{\mathbf{v}}_{oi}-\overline{\mathbf{u}}_{oi} t)^2}, & \text{якщо } n_i = k_i = \frac{1}{2}. \end{array} \right. \tag{3.84}$$

Тому, після граничного переходу, аналогічна експонента в (3.82) (з індексом $j \neq i$) завжди має скінченну границю $\sigma_j(t)$, тобто A_{ij} в цілому прямує до нуля завдяки умовам (3.75), (3.76), зважаючи на (3.26).

Нарешті, завдяки все тим же умовам (3.75), (3.76) в (3.83) залишиться тільки другий доданок:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} B_i = 2\psi_i H_i^{''}(t), \quad i = 1, 2, \tag{3.85}$$

де

$$H_i^{''}(t) = \begin{bmatrix} 0, & \text{якщо } \ n_i > \frac{1}{2}, k_i \geqslant \frac{1}{2} \\ t\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2 - (\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}_{oi}), & \text{якщо } \ n_i = \frac{1}{2}, k_i > \frac{1}{2} \\ t\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2 - (\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}_{oi}) - (\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_{oi}), & \text{якщо } \ n_i = k_i = \frac{1}{2}. \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

Приймаючи до уваги (3.82)–(3.86), та той факт, що низькотемпературна границя виразу (3.82) дорівнює нулю, граничний перехід в (3.81) приводить до (3.77)–(3.80), що і треба було довести. □

Наслідок 3.3. Нехай зберігаються всі умови Теореми 3.4. Тоді твердження (3.7) справедливе, якщо функції $\psi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ мають вигляд

$$\psi_i(t, \mathbf{x}) = D_i C_i(t) E_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \tag{3.87}$$

де $D_i > 0$; $C_i(t) \in P(\mathbb{R}^1)$ і $E_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$ – гладкі та обмежені разом з $\nabla_{\mathbf{x}} E_i(\mathbf{x})$ функції від $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Доведення. Очевидно, що функції (3.87) з урахуванням умов, які накладаються в даному наслідку, забезпечують обмеженість всіх згаданих в Теоремі 3.4 виразів. Крім того, безпосередньо з (3.77)–(3.80) видно, що всі супремуми, що входять в ці формули, скінченні для будь-яких можливих значень постійних n_i, k_i з (3.76), що, з урахуванням наявності в (3.87) множника D_i, $i = 1, 2$, приводит до (3.7). □

Зауваження 3.3. Можливо було б цікаво мінімізувати вирази (3.79), (3.80) розв'язуючи наступне диференційне рівняння (для кожного $i = 1, 2$):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\psi_i(t, \mathbf{x}) t \overline{\mathbf{u}}_{oi}^2 = 0.$$

Однак, можна легко бачити, що його розв'язки

$$\psi_i(t, \mathbf{x}) = e^{-t^2 \overline{\mathbf{u}}_{oi}^2} E_i(\mathbf{x})$$

з $E_i(\mathbf{x})$ такими ж, як в Наслідку 3.3, незважаючи на гарантоване існування обох супремумів в (3.79) і при додатковій умові (3.70) також в (3.80), не задовольняють умови Теореми 3.4, так як це не може гарантувати обмеженість зазначених у ній виразів перед граничним переходом при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$.

Зауваження 3.4. Даний розділ, як і всі наступні, присвячений максвеліанам такого типу, які задаються формулами (2.5), (2.7)–(2.8). Легко бачити, що температура відповідної течії (тобто параметр β) тут є сталою, а обертання відсутнє, зато масова швидкість (2.8) залежить від часу t, а густина (2.7) – ще й від координати $\mathbf{x}$. Саме характер такої залежності і дозволяє говорити про те, що такі потоки прискорюються і ущільнюються (збільшення $\widetilde{\mathbf{v}}$ і ρ при $t \to +\infty$). Доведена в даному розділі Теорема 3.1, як видно з (3.2), стосується лише випадку, коли коефіцієнтні функції φ_1, φ_2 явно не залежать від температур потоків (тобто β_1, β_2). Однак в подальшому, а саме в Теоремі 3.2, Теоремі 3.3 та Теоремі 3.4 така залежність з'являється і саме вона дозволяє знайти нові достатні умови довільної малості відхилу (3.1).

3.2. Висновки до розділу 3

В результаті досліджень проведених у Розділі 3 було побудовано ряд нових явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль, які мають вигляд бімодальних розподілів вигляду (2.9), (2.10) з модами типу "прискорення-ущільнення" (2.11)–(2.13) і різними коефіцієнтними функціями φ_i, $i = 1, 2$. Знайдено достатні умови довільної малості відхилу (3.1), взятого в якості норми різниці між частинами рівняння (2.2)–(2.4).

РОЗДІЛ 4

МІНІМІЗАЦІЯ НОРМ РІЗНИЦІ МІЖ ЧАСТИНАМИ РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА В ПРОСТОРАХ З ВАГОЮ

У даному розділі побудовані наближені розв'язки кінетичного рівняння Больцмана для моделі твердих куль у вигляді бімодального розподілу, тобто лінійної комбінації нестаціонарних неоднорідних максвеліанів типу "прискорення-ущільнення". При цьому для оцінки величини "відхилу", тобто розбіжності між лівою і правою частинами рівняння (2.2), використовуються дві різні норми різниці між ними вигляду (2.18) та (2.19). Основні результати розділу були опубліковані в роботах [27] і [105].

4.1. Випадок змішаного відхилу з однорідною вагою

Будемо шукати розподіл f у вигляді (2.9), (2.10), де максвеліани M_i, $i = 1, 2$ відповідають течіям типу "прискорення-ущільнення" (2.11)–(2.13). Треба знайти коефіцієнтні функції φ_i, $i = 1, 2$ та таку поведінку всіх параметрів, що забезпечують довільну малість відхилу (2.18), який ми запишемо у наступному вигляді:

$$\widetilde{\Delta}(f) = \widetilde{\Delta} = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Далі наведемо декілька результатів, які дають розв'язок цієї задачі.

Теорема 4.1. Нехай коефіцієнтні функції в розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = C_i \left(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{u}}_i \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\overline{\mathbf{u}}_i^2} \right), \ i = 1, 2, \tag{4.2}$$

де $C_i \geqslant 0$ – довільні фінітні або досить швидко спадні на нескінченності гладкі функції ($C_i \in P(\mathbb{R}^3)$). Нехай, крім того,

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \overline{\mathbf{u}}_{oi} \beta_i^{-n_i}, \quad i = 1, 2, \tag{4.3}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_i = \overline{\mathbf{v}}_{oi}\beta_i^{-k_i}, \quad i = 1, 2, \tag{4.4}$$

де $\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_{oi} \in \mathbb{R}^3$ – довільні та фіксовані, а числа n_i, k_i такі, що

$$n_i \geqslant 1; \ k_i \geqslant \frac{1}{2}; \ k_i \geqslant \frac{1}{2}n_i, \quad i = 1, 2. \tag{4.5}$$

Тоді має місце твердження

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{4.6}$$

Доведення. З використанням техніки розвиненої при доведенні Теореми 3.1 та з урахуванням (2.11)–(2.13), (4.2) легко перевірити, що величини

$$t\varphi_i\rho_i(t,\mathbf{x}); \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,\mathbf{x}); \ \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|\rho_i(t,\mathbf{x}); \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\rho_i(t,\mathbf{x}), \quad i = 1, 2$$

обмежені на $\mathbb{R}^4$ після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Звідси, в силу припущення про гладкість функцій $\varphi_i(t,\mathbf{x})$, випливає, що така ж "обмеженість з вагою" має місце й для величин $\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, отже, і для їх добутку $|t|\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})$, що знову, внаслідок гладкості, гарантує те ж саме й без множника $|t|$. Звідси випливає, що коректно визначена оцінка зверху $\widetilde{\Delta}'$ для відхилу (4.1):

$$\widetilde{\Delta} \leqslant \widetilde{\Delta}' \tag{4.7}$$

наступного вигляду (вона здобувається після підстановки в рівняння (2.2)–(2.4) формул (2.1), а також (2.9), (2.11)–(2.13) з урахуванням (3.8) та спираючись на викладки зроблені в доведенні Теореми 3.1, отже техніка виведення оцінки $\widetilde{\Delta}'$ аналогічна техніці, яка використовувалась для виведення оцінки Δ' в доведенні Теореми 3.1):

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}' = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}} \right) \\ + \varphi_1\varphi_2\rho_j(t,\mathbf{x}) \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \Bigg| \rho_i(t,\mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$+\varphi_1\varphi_2\frac{\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})}{\pi^2}d^2\int\limits_{\mathbb{R}^6}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2}d\mathbf{w}d\mathbf{u}\Bigg],$$

де $F_{ij},\ i,j=1,2,\ i\neq j$ повністю ідентично (3.16), а $\rho_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$ співпадає з (3.17), а саме:

$$F_{ij}=F_{ij}(t,\mathbf{u},\mathbf{w})=\left|\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{v}}_j+(\overline{\mathbf{u}}_j-\overline{\mathbf{u}}_i)t-\frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}}\right|,\ i\neq j; \tag{4.9}$$

$$\rho_i(t,\mathbf{x})=\overline{\rho}_i\exp\left\{\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_it)^2+2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))\right\},\ i=1,2 \tag{4.10}$$

($\rho_j(t,\mathbf{x})$ буде ідентично (4.10) тільки з індексом j замість i).

Переходячи тепер в (4.9), (4.10), (4.2), (4.8) до низькотемпературної границі ($\beta_i\to+\infty,\ i=1,2$) з урахуванням умов (4.3)–(4.5) (можливість такого граничного переходу обґрунтовується аналогічно тому як це було зроблено в доведенні Теореми 3.1: за допомогою Леми 3.1 та стандартних теорем про граничний перехід під знаком інтегралу – умови всіх цих тверджень легко перевіряються завдяки структурі виразів (4.8) та (4.9), гладкості функцій, що до них входять, та хорошій збіжності всіх інтегралів), здобудемо (рівномірно на кожному компакті):

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}F_{ij}=0,\quad i\neq j;$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\rho_i(t,\mathbf{x})=\overline{\rho}_i\mathcal{F}_i(\mathbf{x}),\quad i=1,2, \tag{4.11}$$

де $\mathcal{F}_i$ має вигляд (3.29);

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\varphi_i=C_i\left(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i\right), \tag{4.12}$$

де $\mathbf{U}_i$ таке ж як в рівності (3.28).

Далі обчислимо границі частинних похідних функції (4.2) по змінним t і $\mathbf{x}$ знову ж таки враховуючи (4.3)–(4.5). Маємо (в тому ж сенсі, що і вище):

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\frac{t\overline{\mathbf{u}}_i^2-(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)}{\overline{\mathbf{u}}_i^2}\left(\overline{\mathbf{u}}_i,\nabla_{\mathbf{y}}C_i(\mathbf{y})\right)=0, \tag{4.13}$$

де $\mathbf{y}$ має вигляд (3.19), тобто $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{\mathbf{u}}_i \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\overline{\mathbf{u}}_i^2}$;

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} C_i \left(\mathbf{x} + \mathbf{U}_i \right). \tag{4.14}$$

Отже, остаточний граничний перехід у виразі (4.8), дає наступний результат:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}' = 0, \tag{4.15}$$

що з урахуванням (4.7) тягне за собою (4.6), що і треба було довести. □

Зауваження 4.1. Умови, що накладаються на функції C_i, $i = 1, 2$ можна було б дещо полегшити, бо, як видно з (4.10)–(4.14), множники при цих функціях зростають не за всіма напрямками в $\mathbb{R}^3$, а лише вздовж вектора $\overline{\mathbf{u}}_i$.

Теорема 4.2. Нехай функції φ_i в розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) \exp \left\{ -\beta_i ((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})) \right\}, \quad i = 1, 2 \tag{4.16}$$

де гладкі функції $\psi_i(t, \mathbf{x}) \geqslant 0$ такі, що вирази

$$t\psi_1\psi_2; \ \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \ t\psi_i; \ \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right|; \ t \left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad i = 1, 2, \tag{4.17}$$

обмежені на $\mathbb{R}^4$ після множення на $\frac{1}{1+|t|}$. Нехай до того ж виконується (4.3), тобто $\overline{\mathbf{u}}_i = \overline{\mathbf{u}}_{oi} \beta_i^{-n_i}$, $i = 1, 2$ при

$$n_i > \frac{1}{2}. \tag{4.18}$$

Тоді справедлива оцінка (4.7), причому існує скінченна границя:

$$\begin{gathered} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}' \\ = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + |t|} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right. \\ \left. + \psi_1(t, \mathbf{x}) \psi_2(t, \mathbf{x}) \pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \right| \\ + 2\pi d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{1 + |t|} (\psi_1(t, \mathbf{x}) \psi_2(t, \mathbf{x})). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Доведення. З урахуванням (4.10), (4.16) маємо:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \overline{\rho}_i[\rho_i(t,\mathbf{x})]^{-1}\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{u}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right\}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} = \overline{\rho}_i[\rho_i(t,\mathbf{x})]^{-1}\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} - 2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right\}, \tag{4.21}$$

тому замість (4.8) здобудемо (існування відповідних супремумів випливає з умови (4.17) даної теореми):

$$\widetilde{\Delta}' = \pi^{-3/2}\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\frac{1}{1+|t|}\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_{ij} + B_i\right| + A_{ij}\right]e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}, \tag{4.22}$$

де

$$A_{ij} = A_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w}) = \psi_1\psi_2\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\overline{\rho}_j\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}, \quad i\neq j, \ i=1,2, \tag{4.23}$$

$$B_i = B_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) - 2\psi_i\sqrt{\beta_i}(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_i), \ i=1,2 \tag{4.24}$$

при збереженні (4.9). Значить, граничний перехід при $\beta_i \to +\infty$, $i=1,2$ завдяки (4.3), (4.18) (його обґрунтування таке ж, як при доведенні Теореми 4.1) та подальше інтегрування у виразі A_{ij} по змінній $\mathbf{w}$ тепер дає:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} F_{ij} = |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2|; \tag{4.25}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} A_{ij} = \psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j\left|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2\right|, \quad i\neq j; \tag{4.26}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} B_i = \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right). \tag{4.27}$$

Все це після переходу до границі в (4.22) та подальшого інтегрування по змінній $\mathbf{u}$ приводить до (4.19). Теорему доведено. $\square$

Легко тепер сформулювати наслідок з цієї теореми, який дає одну з можливих достатніх умов довільної малості відхилу (4.1).

Наслідок 4.1. Нехай виконуються всі умови Теореми 4.2, і функції $\psi_i(t, \mathbf{x})$ мають вигляд:

$$\psi_i = C_i \left(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{v}}_i t\right), \quad i = 1, 2, \tag{4.28}$$

або

$$\psi_i = C_i \left([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i]\right), \quad i = 1, 2, \tag{4.29}$$

де $C_i \geqslant 0$ – фінітні гладкі функції.

Тоді:

1) якщо C_1, C_2, $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$ задовольняють наступні умови:

$$\operatorname{supp} C_1 \cap \operatorname{supp} C_2 = \emptyset \tag{4.30}$$

або

$$\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_2, \tag{4.31}$$

то має місце твердження (4.6);

2) при довільних C_1, C_2, $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$ маємо:

$$\lim_{d \to 0} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta} = 0. \tag{4.32}$$

Доведення. Перш за все, легко бачити, що функції вигляду (4.28) або (4.29), за накладених тут умов, задовольняють вимоги Теореми 4.2. Дійсно, для (4.28) виконується:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\left(\overline{\mathbf{v}}_i, \nabla_{\widetilde{\mathbf{y}}} C_i(\widetilde{\mathbf{y}})\right), \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} C_i(\widetilde{\mathbf{y}}), \tag{4.34}$$

де $\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{v}}_i t$; а у випадку (4.29) буде:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0, \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} = \left[\overline{\mathbf{v}}_i \times \nabla_{\mathbf{x}} C_i \left([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i]\right)\right]. \tag{4.36}$$

Значить, справедливе (4.19), і, крім того, в обох випадках

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.37}$$

Остання рівність разом з (4.30) або (4.31), як видно з (4.19) дає: у випадку 1) даного наслідку просто (4.15), у випадку 2) – прямування виразу (4.19) до нуля при $d \to 0$. Звідси, завдяки (4.7), здобудемо (4.6) або (4.32). Наслідок доведено. $\square$

Зауваження 4.2. Наслідок 4.1 дає достатню умову прямування відхилу $\widetilde{\Delta}$ до нуля. Покажемо, як у випадку 2) цього наслідку при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайти таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta} < \varepsilon$ при будь-якому $0 < d < \delta(\varepsilon)$.

Приймемо до уваги коректно визначену оцінку зверху $\widetilde{\Delta}'$ для відхилу $\widetilde{\Delta}$, а саме вираз (4.7), тоді $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta} \leqslant \lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'$. При виконанні умов Наслідку 4.1, і зважаючи на (4.28) або (4.29), тобто на вигляд функцій ψ_i, де за умовою другого випадку C_1, C_2, $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$ – довільні, вираз (4.19) буде мати вигляд:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \left| C_1 C_2 \pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \right|$$
$$+ 2\pi d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} (C_1 C_2).$$

Також для отримання останньої рівності було використано той факт, що для обох випадків функцій вигляду (4.28) та (4.29) виконується (4.37).

Далі, якщо перший доданок в правій частині останнього виразу розкласти, то ми отримаємо наступне:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}' = 4\pi d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} (C_1 C_2).$$

Отже,

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta} \leqslant 4\pi d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} (C_1 C_2) < \varepsilon.$$

Звідси,

$$d^2 < \frac{\varepsilon}{4\pi\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup\limits_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|}(C_1C_2)},$$

$$0 < d < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup\limits_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|}(C_1C_2)}}.$$

Таким чином, якщо позначити знаменник правої частини останньої нерівності, наприклад, через $\mathcal{W}_1$, де $\mathcal{W}_1$ як можна бачити буде деяка константа, то можна сказати, що достатньо взяти $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\mathcal{W}_1}$.

Наступне твердження можна розглядати як деяке "проміжкове" між Теоремою 4.1 і Теоремою 4.2, оскільки показник експоненти в (4.16) замінюється тепер лише одним з присутніх там доданків.

Теорема 4.3. Нехай в розподілі (2.9) функції φ_i мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}, \quad i = 1, 2, \tag{4.38}$$

причому вирази

$$\begin{gathered} t\psi_1\psi_2 \exp\{2\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x}) + 2\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})\}; \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\}; \\ t\psi_i \exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\}; \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right| \exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\}; \\ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\}, \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{4.39}$$

обмежені з вагою $\frac{1}{1+|t|}$, а припущення $\overline{\mathbf{u}}_i = \overline{\mathbf{u}}_{oi}\beta_i^{-n_i}, \quad i = 1, 2$ виконується для $n_i \geqslant 1, \quad i = 1, 2$.

Тоді справедливе (4.7), причому існує скінченна границя величини $\widetilde{\Delta}'$, яка дорівнює виразу (4.19) при $n_i > 1$, а при $n_i = 1$

$$\begin{gathered} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \left|\mu_i(\mathbf{x})\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right)\right. \\ \left. + \psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})\mu_1(\mathbf{x})\mu_2(\mathbf{x})\pi d^2\overline{\rho}_j|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2|\right| \\ + 2\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|}[\mu_1(\mathbf{x})\mu_2(\mathbf{x})\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})] + \end{gathered} \tag{4.40}$$

$$+2\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i|(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\overline{\mathbf{v}}_i)|\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\frac{1}{1+|t|}\{\mu_i(\mathbf{x})\psi_i(t,\mathbf{x})\},$$

де

$$\mu_i(\mathbf{x})=\exp\left\{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})\right\}, \quad i=1,2. \tag{4.41}$$

Доведення. Доведення даної теореми аналогічне доведенню Теореми 4.2, але зараз завдяки (4.38) замість (4.20), (4.21) будемо мати:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right)\exp\left\{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\},$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\exp\left\{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}.$$

Тому вирази (4.22), (4.23), (4.24) зміняться наступним чином:

$$\widetilde{\Delta}'=\pi^{-3/2}\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\frac{1}{1+|t|}$$
$$\times\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+A_{ij}+B_i\right|+A_{ij}\right]e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u}, \tag{4.42}$$

де

$$A_{ij}=A_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w})=\psi_1\psi_2\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\overline{\rho}_j e^{2\beta_j(\overline{\mathbf{u}}_j,\mathbf{x})}\int\limits_{\mathbb{R}^3}F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}, \quad i\neq j, \tag{4.43}$$

$$B_i=B_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u})=\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{\mathbf{v}}_i-\overline{\mathbf{u}}_i t,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)+2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)-t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right) \tag{4.44}$$

при збереженні (4.9).

Тоді при граничному переході в (4.42)–(4.44), коли $\beta_i\to+\infty,\ i=1,2$, рівність (4.25) взагалі не зміниться, але вирази (4.26) та (4.27) будуть дещо інакші (обґрунтування можливості такого граничного переходу аналогічне обґрунтуванню низькотемпературних граничних переходів проведених в доведеннях попередніх теорем):

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}A_{ij}=\psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j\mu_j(\mathbf{x})|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2|, \quad i\neq j,\ i,j=1,2, \tag{4.45}$$

де

$$\mu_j(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} 1, & n_j > 1 \\ e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oj},\mathbf{x})}, & n_j = 1; \end{array}\right. \quad j = 1, 2. \tag{4.46}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} B_i = \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right) + 2\psi_i H_i', \quad i = 1, 2, \tag{4.47}$$

де

$$H_i' = \left[\begin{array}{ll} 0, & n_i > 1 \\ (\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_i), & n_i = 1. \end{array}\right. \tag{4.48}$$

З (4.45)–(4.48) видно, що низькотемпературна границя виразу (4.42) при $n_i > 1$ буде дорівнювати виразу (4.19), оскільки, очевидно, що в цьому випадку границя величин $\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\}$, $i = 1, 2$, при виконанні припущення даної теореми про вигляд вектора $\overline{\mathbf{u}}_i$ для значень параметрів $n_i > 1$, $i = 1, 2$, дорівнює просто 1. Але при $n_i = 1$ границя величин $\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\}$, $i = 1, 2$ збігається з (4.41), тому саме в цьому (другому) випадку в граничному виразі для $\widetilde{\Delta}'$ не тільки виникають множники $\mu_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, але з'являється ще й додаткова сума (див. (4.47), (4.48)), яка не зустрічалася раніше, тобто в попередніх теоремах цього розділу, що й тягне за собою (4.40). Теорему доведено. □

Наслідок 4.2. Нехай виконуються умови Теореми 4.3, і крім того, виконується додаткова умова:

$$\overline{\mathbf{u}}_i \perp \overline{\mathbf{v}}_i, \quad i = 1, 2, \tag{4.49}$$

а також зберігаються припущення щодо вигляду функцій $\psi_i(t, \mathbf{x})$ з Наслідку 4.1, а саме:

$$\psi_i = C_i\left(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{v}}_i t\right), \quad i = 1, 2,$$

або

$$\psi_i = C_i\left([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i]\right), \quad i = 1, 2,$$

де $C_i \geqslant 0$ – фінітні гладкі функції.

Тоді обидва твердження Наслідку 4.1 залишаються в силі.

Доведення. Перш за все перевіримо той факт, що функції вигляду (4.28) та (4.29), при виконанні умов даного наслідку, задовольняють вимоги Теореми 4.3.

Нехай спочатку виконане (4.28), тоді перший з виразів (4.39) за припущенням (4.30) просто дорівнює нулю тотожно, а у випадку (4.31) після заміни $\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{v}}_i t$ з урахуванням (4.49) набуває вигляду:

$$tC_1(\widetilde{\mathbf{y}})C_2(\widetilde{\mathbf{y}})e^{2(\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\widetilde{\mathbf{y}})+\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\widetilde{\mathbf{y}}))}. \tag{4.50}$$

Оскільки $C_1(\widetilde{\mathbf{y}})$ та $C_2(\widetilde{\mathbf{y}})$ фінітні, то після множення на $\frac{1}{1+|t|}$ вираз (4.50), очевидно, є обмеженим.

Якщо ж взяти ψ_i у вигляді (4.29) і знову розглянути ситуацію (4.31), то після розкладення довільного вектора $\mathbf{x}$ по ортогональному (внаслідок (4.49)) базису:

$$\overline{\mathbf{u}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i, [\overline{\mathbf{u}}_i \times \overline{\mathbf{v}}_i], \quad i = 1, 2,$$

завдяки специфіці аргументів в (4.29) виявиться, що функції C_i "зануляються" саме за тими напрямками в $\mathbb{R}^3$, за якими відповідні експоненти в (4.39) здатні зростати (множник t з огляду на наявність ваги є несуттєвим).

Решта виразів, що входять до (4.39), оцінюються цілком аналогічно з використанням формул (4.33) та (4.34), або (4.35) та (4.36).

Отже, ми можемо скористатися твердженням Теореми 4.3, тобто формулою (4.19) при $n_i > 1$ або формулами (4.40), (4.41) при $n_i = 1$. Але всі доданки, які в них входять, або просто дорівнюють нулю (внаслідок (4.37) та (4.49) за умови (4.30) чи (4.31)), або прямують до нуля при $d \to 0$. Звідси, завдяки (4.7), здобудемо (4.6) або (4.32). Наслідок доведено. □

4.2. Випадок змішаного відхилу з неоднорідною вагою

В даному підрозділі вивчається поведінка змішаного відхилу з "неоднорідною вагою" $\widetilde{\Delta}_q(f)$ з (2.19) для вже розглянутих бімодальних розподілів, які описують взаімодію між двома максвелівськими течіями з твердих куль типу "прискорення-ущільнення" та мають нестаціонарні густини; що дозволяє отримати дещо інші результати, відмінні від отриманих в попередньому підрозділі 4.1.

Таким чином, ми знову будемо шукати такі функції φ_i, $i = 1, 2$ з розподілу (2.9)–(2.10) і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб змішаний відхил з "неоднорідною вагою" вигляду

$$\widetilde{\Delta}_q(f) = \widetilde{\Delta}_q = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v} \tag{4.51}$$

був скільки завгодно малий. Тут $q(\mathbf{x})$ – невід'ємна обмежена на $\mathbb{R}^3$ функція.

Далі наведено декілька можливих результатів розв'язання вказаної задачі.

Теорема 4.4. Нехай в бімодальному розподілі (2.9) з модами M_i, $i = 1, 2$ виду (2.11)–(2.13) функції φ_i, $i = 1, 2$ не залежать від β_i, $i = 1, 2$ і мають вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = C_i \left(\mathbf{x} + \overline{\mathbf{u}}_i \frac{(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}{2\overline{\mathbf{u}}_i^2} \right), \; i = 1, 2, \tag{4.52}$$

де гладкі функції $C_i \geqslant 0$ обмежені на $\mathbb{R}^3$ разом зі своїми похідними.

Нехай, крім того,

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \overline{\mathbf{u}}_{oi} \beta_i^{-n_i}, \quad i = 1, 2, \tag{4.53}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_i = \overline{\mathbf{v}}_{oi} \beta_i^{-k_i}, \quad i = 1, 2, \tag{4.54}$$

де $\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_{oi} \in \mathbb{R}^3$ – довільні фіксовані вектори, причому числа n_i , k_i такі, що

$$n_i \geqslant 1; \; k_i \geqslant \frac{1}{2}; \; k_i \geqslant \frac{n_i}{2}, \quad i = 1, 2. \tag{4.55}$$

Припустимо також наступне: нехай функція $q(\mathbf{x})$ є такою, що величина $q(\mathbf{x})e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}$ обмежена на $\mathbb{R}^3$.

Тоді справедливе наступне твердження:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}_q = 0. \tag{4.56}$$

Доведення. Підстановка (2.9) в (2.3) і (2.4), а потім в (4.51), з урахуванням (2.11)–(2.13), а також використання техніки розвиненої при доведені Теореми 3.1, приводить до наступної оцінки зверху $\widetilde{\Delta}'_q$ для відхилу $\widetilde{\Delta}_q$:

$$\widetilde{\Delta}_q \leqslant \widetilde{\Delta}'_q = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right.\right.$$
$$\left. + \varphi_1\varphi_2\rho_j(t,\mathbf{x}) \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} \right| \rho_i(t,\mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \tag{4.57}$$
$$\left. + \varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})}{\pi^2} d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{ij} e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u} \right],$$

де

$$F_{ij} = \left| \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{v}}_j + (\overline{\mathbf{u}}_j - \overline{\mathbf{u}}_i)t - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \quad i,j = 1,2, \ i \neq j \tag{4.58}$$

та

$$\rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i \exp\left\{ \beta_i \left((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x}) \right) \right\}, \ i = 1,2. \tag{4.59}$$

Коректність цієї оцінки обумовлена тим фактом, що, з урахуванням (4.52) та (4.59), величини

$$t\varphi_i\rho_i(t,\mathbf{x}); \ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\rho_i(t,\mathbf{x}); \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right| \rho_i(t,\mathbf{x}); \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \rho_i(t,\mathbf{x}), \quad i = 1,2$$

обмежені на $\mathbb{R}^4$ після множення на $\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}$.

А також, зважаючи на те, що функції $\varphi_i(t,\mathbf{x})$ гладкі, величини $\sqrt{|t|}\varphi_i\rho_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2$ і $|t|\varphi_1\varphi_2\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})$ будуть обмежені як з множником $|t|$ так і без нього.

Перехід до низькотемпературної границі в (4.52), (4.57)–(4.59) при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$, якщо прийняти до уваги (4.53)–(4.55), аналогічний до граничного переходу в доведенні Теореми 4.1 та дає той самий результат (можливість такого переходу під знаками супремумів та інтегралів обґрунтовується так само, як в Теоремі 3.1 з використанням Леми 3.1 та теореми про граничний перехід під знаком інтегралу, після чого інтеграли по $\mathbf{w}$ і $\mathbf{u}$ легко обчислюються):

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i\mathcal{F}_i(\mathbf{x})$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \overline{\rho}_i; & n_i>1; k_i>\frac{1}{2}, \\ \overline{\rho}_i e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}; & n_i=1; k_i>\frac{1}{2}, \\ \overline{\rho}_i e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2+2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}; & n_i=1; k_i=\frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad i=1,2; \tag{4.60}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \varphi_i = C_i\left(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i\right) = \left[\begin{array}{ll} C_i(\mathbf{x}), & k_i>\frac{1}{2}n_i, \\ C_i\left(\mathbf{x}+\frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2}{2\overline{\mathbf{u}}_{oi}^2}\right), & k_i=\frac{1}{2}n_i, \end{array}\right. \quad i=1,2; \tag{4.61}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0;$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \frac{\partial\varphi_i}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} C_i\left(\mathbf{x}+\mathbf{U}_i\right); \tag{4.62}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} F_{ij} = 0,\ i\neq j,$$

де $\mathbf{U}_i$ з (3.28).

Відтак,

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'_q = 0.$$

Звідки, в силу співвідношення (4.57), отримуємо (4.56). Теорему доведено. □

Зауваження 4.3. Як видно з (4.59), (4.60)–(4.62), множники при функціях C_i, $i=1,2$ в (4.57) зростають тільки вздовж вектора $\overline{\mathbf{u}}_i$, тому умову (накладену в теоремах підрозділу 4.1) фінітності або швидкого спадання для функцій C_i, завдяки обмеженості функції $q(\mathbf{x})$, в даній теоремі було послаблено, при цьому $q(\mathbf{x})$ може бути не тільки обмеженою, але й фінітною оба швидко спадною, хоча б за напрямками паралельними вектору $\overline{\mathbf{u}}_{oi}$.

Теорема 4.5. Нехай функції φ_i в розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x}))\right\}, \quad i = 1,2 \qquad (4.63)$$

причому добутки множника $\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}$ на величини

$$t\psi_1\psi_2; \ \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \ t\psi_i; \ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|; \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right), \quad i = 1,2 \qquad (4.64)$$

обмежені по t і $\mathbf{x}$ на $\mathbb{R}^4$. Нехай, крім того, умова (4.53), а саме: $\overline{\mathbf{u}}_i = \overline{\mathbf{u}}_{oi}\beta_i^{-n_i}, \quad i = 1,2$ виконується для

$$n_i > \frac{1}{2}, \ i = 1,2. \qquad (4.65)$$

Тоді існує величина $\widetilde{\Delta}'_q$ така, що

$$\widetilde{\Delta}_q \leqslant \widetilde{\Delta}'_q, \qquad (4.66)$$

і

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'_q = \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right)\right.$$
$$\left. + \psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})\pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \right| \qquad (4.67)$$
$$+ 2\pi d^2 \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} (\psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x})).$$

Доведення. Похідні функцій $\varphi_i(t,\mathbf{x})$, з урахуванням (4.59) та (4.63) будуть мати наступний вигляд:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \overline{\rho}_i [\rho_i(t,\mathbf{x})]^{-1} \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{v}}_i, \overline{\mathbf{u}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right\},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} = \overline{\rho}_i [\rho_i(t,\mathbf{x})]^{-1} \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} - 2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right\}.$$

Умова (4.64) гарантує існування відповідних супремумів по t і $\mathbf{x}$, тому з огляду на (4.63) замість (4.57) отримаємо наступний вираз:

$$\widetilde{\Delta}'_q = \pi^{-3/2} \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_{ij} + B_i\right| + A_{ij}\right] e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}, \quad (4.68)$$

де

$$A_{ij} = A_{ij}(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w}) = \psi_1\psi_2\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\overline{\rho}_j\int\limits_{\mathbb{R}^3} F_{ij}e^{-\mathbf{w}^2}d\mathbf{w}, \quad i\neq j,\ i,j=1,2, \quad (4.69)$$

$$B_i = B_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right) - 2\psi_i\sqrt{\beta_i}(\mathbf{u},\overline{\mathbf{u}}_i),\ i=1,2 \quad (4.70)$$

при збереженні (4.58).

Завдяки умовам (4.53) і (4.65), після низькотемпературного граничного переходу в (4.69), (4.70) і (4.58) та здійснивши подальшу оцінку зверху для (4.68), отримаємо:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\widetilde{\Delta}'_q = \pi^{-3/2}\sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4}\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}\sum_{i,j=1,i\neq j}^{2}\overline{\rho}_i\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j\left|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2\right| + \left(\overline{\mathbf{v}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right| + \psi_1\psi_2\pi d^2\overline{\rho}_j\left|\overline{\mathbf{v}}_1-\overline{\mathbf{v}}_2\right|\right]e^{-\mathbf{u}^2}d\mathbf{u},$$

що після інтегрування по змінній $\mathbf{u}$ і призводить до (4.67). Теорему доведено. $\square$

Одна з можливих достатніх умов довільної малості відхилу (4.51) приводиться в наступному наслідку.

Наслідок 4.3. Нехай виконуються всі умови Теореми 4.5, і функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ мають вигляд:

$$\psi_i = C_i\left(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{v}}_i t\right), \quad i=1,2 \quad (4.71)$$

або

$$\psi_i = C_i\left([\mathbf{x}\times\overline{\mathbf{v}}_i]\right), \quad i=1,2. \quad (4.72)$$

Тоді твердження (4.56) справедливе, якщо мають місце наступні умови:

1) $C_i\geqslant 0,\ i=1,2$ – обмежені гладкі функції,

2) добутки $q(\mathbf{x})C_i$, $q(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}C_i$ і $q(\mathbf{x})\nabla_{\widetilde{\mathbf{y}}}C_i(\widetilde{\mathbf{y}})$ обмежені,

3)
$$\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_2. \tag{4.73}$$

Доведення. Знайдемо похідні обох функцій по t і $\mathbf{x}$.

Для випадку (4.71) отримаємо:
$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} C_i(\widetilde{\mathbf{y}}); \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial t} = -\left(\overline{\mathbf{v}}_i, \nabla_{\widetilde{\mathbf{y}}} C_i(\widetilde{\mathbf{y}})\right), \quad i = 1, 2, \tag{4.74}$$
де $\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{v}}_i t$;

а у випадку (4.72) буде:
$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} = \left[\overline{\mathbf{v}}_i \times \nabla_{\mathbf{x}} C_i\left([\mathbf{x} \times \overline{\mathbf{v}}_i]\right)\right]; \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4.75}$$
звідки видно, що в обох випадках
$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.76}$$

Твердження (4.67) справедливе, так як функції вигляду (4.71) і (4.72), з урахуванням виконання умов даного наслідку, задовольняють умови Теореми 4.5.

Отже, при виконанні умови (4.73), $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'_q = 0$. Звідки, з огляду на (4.66), отримуємо (4.56). □

Теорема 4.6. Нехай в бімодальному розподілі (2.9) функції φ_i мають вигляд:
$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) \exp\left\{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}, \quad i = 1, 2, \tag{4.77}$$
де кожен з добутків множника $\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})\}$ на функції виду (4.64), тобто
$$t\psi_1\psi_2; \ \frac{\partial\psi_i}{\partial t}; \ t\psi_i; \ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|; \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right), \quad i = 1, 2$$
обмежений з вагою $\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}$.

Нехай, крім того, умова (4.53) ($\overline{\mathbf{u}}_i = \overline{\mathbf{u}}_{oi}\beta_i^{-n_i}$) виконується при $n_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$.

Тоді існує скінченна границя величини $\widetilde{\Delta}'_q$ і вірна нерівність (4.66), тобто $\widetilde{\Delta}_q \leqslant \widetilde{\Delta}'_q$, причому:

1) якщо $n_i > 1$, то оцінка зверху $\widetilde{\Delta}'_q$ для відхилу $\widetilde{\Delta}_q$ дорівнює виразу (4.67);

2) якщо $n_i = 1$, то

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'_q \\
&= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \overline{\rho}_i \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \left| e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})} \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} \right) \right) \right. \\
&\left. +\psi_1\psi_2 e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})} e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o2},\mathbf{x})} \pi d^2 \overline{\rho}_j |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \right| + 2\pi d^2 \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \qquad (4.78) \\
&\times \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \left[e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})} e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o2},\mathbf{x})} \psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x}) \right] \\
&+2\sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i |(\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_i)| \sup_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}^4} \frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \left\{ e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})} \psi_i(t,\mathbf{x}) \right\}.
\end{aligned}$$

Доведення. Доведення даної теореми проводиться по тій же схемі, що і доведення Теореми 4.3. Здійснивши аналогічні перетворення, але вже для відхилу (4.51), отримаємо оцінку зверху $\widetilde{\Delta}'_q$ для відхилу $\widetilde{\Delta}_q$ повністю ідентичну (4.68)–(4.70). Перейшовши до низькотемпературної границі у виразах (4.69) і (4.70) при $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$, знайдемо:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} A_{ij} \qquad (4.79) \\
&= \left[\begin{array}{ll} \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j \left|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2\right|, & n_i > 1, \\ e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})} \psi_1\psi_2\pi d^2 \overline{\rho}_j \left|\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2\right|, & n_i = 1, \end{array} \right. \quad i \neq j,\ i,j = 1,2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} B_i \qquad (4.80) \\
&= \left[\begin{array}{ll} \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} \right), & n_i > 1, \\ \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} \right) + 2\psi_i \left(\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_i \right), & n_i = 1, \end{array} \right. \quad i = 1,2.
\end{aligned}$$

Далі, враховуючи (4.79) та (4.80), після граничного переходу в (4.68) (його обґрунтування таке ж як в доведенні Теореми 4.4), отримаємо:

1) при $n_i > 1$, $\lim\limits_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'_q$ співпадає з (4.67) (оскільки границя величини

$e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})}$ в цьому випадку дорівнює 1);

2) при $n_i = 1$, $\lim\limits_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \widetilde{\Delta}'_q$ має вигляд (4.78) (тут $\lim\limits_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})} = e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}$, що і обумовлює появу додаткового множника і суми при граничному переході для $\widetilde{\Delta}'_q$).

Теорему доведено. $\square$

Далі наведено наслідки з цієї теореми.

Наслідок 4.4. Нехай в припущенні (4.53) параметри n_i, $i = 1,2$ задовольняють умову $n_i > 1$. Крім того, нехай функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ мають вигляд (4.71) або (4.72) і при цьому виконуються наступні умови:

1)
$$\operatorname{supp} C_1 \cap \operatorname{supp} C_2 = \emptyset \tag{4.81}$$
або
$$\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_2, \tag{4.82}$$
де C_i, $\nabla_{\mathbf{x}} C_i$ і $\nabla_{\widetilde{\mathbf{y}}} C_i(\widetilde{y})$ ($\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{v}}_i t$) – обмежені функції;

2) функція $q(\mathbf{x})$ – фінітна або швидко спадна на нескінченності (швидше ніж функція $e^{-\mathbf{x}^2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$).

Тоді для будь-яких $\overline{\mathbf{u}}_i$, $\overline{\mathbf{v}}_i$ і функцій $\varphi_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2$ вигляду (4.77) вірно (4.56).

Доведення. Перш за все перевіримо, що функції виду (4.71) і (4.72), з урахуванням умов даного наслідку, задовольняють умови Теореми 4.6. Для початку переконаємось в обмеженості наступних виразів:
$$\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} t\psi_1\psi_2 \exp\left\{2\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x}) + 2\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})\right\}, \quad i = 1,2; \tag{4.83}$$
$$\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} \frac{\partial\psi_i}{\partial t} \exp\left\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right\}, \quad i = 1,2; \tag{4.84}$$
$$\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|} t\psi_i \exp\left\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right\}, \quad i = 1,2; \tag{4.85}$$

$$\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|\exp\left\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right\}, \quad i=1,2; \tag{4.86}$$

$$\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}t\left(\overline{\mathbf{u}}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\exp\left\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\right\}, \quad i=1,2. \tag{4.87}$$

Легко бачити, що для обох функцій виду (4.71) і (4.72) вираз (4.83) буде одним і тим же $\frac{q(\mathbf{x})}{1+|t|}tC_1C_2\exp\left\{2\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x})+2\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})\right\}$, і з огляду на умову (4.81) буде тотожно дорівнювати нулю. За умови (4.82), цей вираз буде обмежений в силу обмеженості функцій C_i і фінітності або швидкого спадання функції $q(\mathbf{x})$, незалежно від структури аргументу (очевидно, що кожен із множників $\frac{t}{1+|t|}$; C_1C_2; $q(\mathbf{x})\exp\left\{2\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x})+2\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})\right\}$ обмежений).

Також не важко помітити, що для функції (4.72) вираз (4.84) дорівнює нулю, а для функції (4.71) обмежений завдяки умовам 1) та 2) даного наслідку.

Решта виразів (4.85)–(4.87) оцінюються аналогічним чином з використанням формул (4.74) і (4.75). Отже, ми можемо скористатися тверджнням Теореми 4.6 для $n_i > 1$, тобто формулою (4.67). В то й же час, беручи до уваги умови даного наслідку (4.81) і (4.82) та рівність (4.76), отримуємо, що $\lim\limits_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}}\widetilde{\Delta}'_q=0$. Таким чином, завдяки коректно визначеній оцінці (4.66) для відхилу (4.51), ми приходимо до (4.56). □

Наслідок 4.5. Нехай виконуються всі умови Наслідку 4.4, за виключенням того, що в даному випадку $n_i=1$, $i=1,2$. Крім цього, припустимо, що виконується додаткова умова

$$(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i)=0, \quad i=1,2. \tag{4.88}$$

Тоді твердження Наслідку 4.4 залишається вірним.

Доведення. Оскільки функції виду (4.71) і (4.72) задовольняють умови Теореми 4.6 (доведення цього факту було проведено в доведенні

Наслідку 4.4), ми в праві скористатися другим твердженням цієї теореми, тобто формулою (4.78).

Фінітність або достатньо швидке спадання функції $q(\mathbf{x})$ забезпечує обмеженість всіх виразів, які входять до (4.78) і пригнічує зростання множника $e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}$, $i = 1, 2$. Тобто оцінка $\widetilde{\Delta}'_q$ коректно визначена.

В результаті, використовуючи умови (4.81), (4.82), а також (4.88), отримуємо той факт, що всі доданки в (4.78) "зануляються", отже, ми знову отримуємо (4.56). □

Зауваження 4.4. Легко бачити, що коефіцієнтні функції (4.2) не містять не тільки окремого множника, спадаючого з часом на $\pm\infty$, а й мультиплікативної константи, без довільної малості якої в Розділі 3 не вдається здобути результат аналогічний (4.6), а лише значно слабкіше твердження, де в правій частині відповідної рівності замість нуля фігурує деяка величина, яка потребує подальшої мінімізації за рахунок інших параметрів розподілу. Те ж саме стосується і аналогів Наслідків 4.1, 4.2, де завдяки новому відхилу вдається суттєво розширити класи знайдених розв'язків, а саме, вигляду (4.28) або (4.29).

Що ж стосується відхилу $\widetilde{\Delta}_q(f)$ розглянутого в підрозділі 4.2, то на відміну від відхилу $\widetilde{\Delta}(f)$, він містить додатковий множник $q(\mathbf{x})$, за допомогою якого вдалося послабити умови, які накладаються на функції C_i (міркування Зауваження 4.3), що з точки зору фізичного сенсу дає можливість розглядати не тільки "згустки", які описуються співвідношенням (4.71), і "циліндри" вигляду (4.72), але й деякі потоки у всьому просторі, тим самим розширивши клас отриманих розв'язків.

Також функція $q(\mathbf{x})$ в Наслідку 4.3 допускає зростання як самих функцій C_i так і їх похідних за рахунок достатньо швидкого спадання хоча б уздовж вектора $\overline{\mathbf{u}}_{oi}$. При цьому немає необхідності подальшої мінімізації відхилу при $d \to 0$ для будь-яких $\overline{\mathbf{v}}_i$, яка використовувалася в Наслідку 4.1.

В той же час, завдяки використанню відхилу $\widetilde{\Delta}_q(f)$, вдається виключити умову перпендикулярності векторів $\overline{\mathbf{u}}_i$ і $\overline{\mathbf{v}}_i$, яка використовувалася в Наслідку 4.2 (для занулення функцій C_i за тими напрямками в $\mathbb{R}^3$, за якими експоненти в (4.83)–(4.87) зростають) хоча б для значень параметра $n_i > 1$, що дає можливість узагальнити отримані результати для параметрів більш загального вигляду ніж (4.53), (4.54).

4.3. Висновки до розділу 4

В даному розділі досліджено модифіковані відхили з різною вагою $\widetilde{\Delta}(f)$ і $\widetilde{\Delta}_q(f)$ вигляду (4.1) та (4.51), що дозволило здобути низку нових явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль, які описують перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення" та суттєво відрізняються від розв'язків, побудованих в Розділі 3 за допомогою "звичайного" рівномірно-інтегрального відхилу $\Delta(f)$.

РОЗДІЛ 5

БІМОДАЛЬНІ НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ В ПРОСТОРІ L_1

В даному розділі побудовано бімодальні розподіли вигляду (2.9)–(2.10), які описують процес взаємодії між двома максвелівськими течіями типу "прискорення-ущільнення" в газі з твердих куль і задовольняють рівняння Больцмана (2.2)–(2.4) з яким завгодно ступенем точності. Знайдено граничні випадки, в яких цей розподіл мінімізує інтегральний відхил вигляду (2.20) між частинами вказаного рівняння. Основні результати розділу були опубліковані в роботі [24].

5.1. Випадок інтегрального відхилу

Розглядається неоднорідна, нестаціонарна, лінійна комбінація двох максвеліанів виду (2.9)–(2.13). Потрібно знайти такий вигляд функцій (2.10) і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб при низькотемпературному граничному переході ($\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$) інтегральний відхил

$$\Delta_1(f) = \Delta_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v} \tag{5.1}$$

був як завгодно малим, тобто наближався до нуля.

Далі отримано декілька результатів, які дають розв'язок цієї задачі, а саме знайдені деякі умови, достатні для мінімізації відхилу Δ_1.

Перш ніж перейти до вивчення відхилу Δ_1 при параметрах β_i, $i = 1, 2$, прямуючих до $+\infty$, проведемо кілька попередніх перетворень правої частини виразу (5.1).

Підставивши розподіл (2.9) в рівняння (2.2)–(2.4), враховуючи рівність (3.8), ми отрмаємо:

$$D(f) = M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2),$$
$$Q(f,f) = \varphi_1 \varphi_2 \left[Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1) \right],$$

а значить, інтеграл по змінній $\mathbf{v}$ з (5.1) можна переписати в наступному вигляді:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{i=1}^{2} M_i D(\varphi_i) - \varphi_1\varphi_2 \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} Q(M_i, M_j) \right| d\mathbf{v}. \tag{5.2}$$

Використаємо представлення інтегралу зіткнень у вигляді розбиття на "прибуткову" і "затратну" частини G і L (аналогічно тому як це було зроблено при доведенні Теореми 3.1), тобто формулу (3.10), де

$$\mathrm{G}(\mathrm{g}_1,\ \mathrm{g}_2) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)| \mathrm{g}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1') \mathrm{g}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'),$$
$$\mathrm{g}_1 \mathrm{L}(\mathrm{g}_2) = \mathrm{g}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v}_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha)| \mathrm{g}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1).$$

Підставляючи замість функцій g_1 і g_2 відповідно максвеліани M_1, M_2, і враховуючи, що $\mathrm{G} \geqslant 0$ і $M_i > 0$, отримаємо наступну оцінку зверху для виразу (5.2):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} |M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2)$$
$$-\varphi_1\varphi_2 \left[\mathrm{G}(M_1, M_2) + \mathrm{G}(M_2, M_1) - M_1 \mathrm{L}(M_2) - M_2 \mathrm{L}(M_1)\right]|\, d\mathbf{v}$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[M_1 |D(\varphi_1)| + M_2 |D(\varphi_2)| + \varphi_1\varphi_2 \left(\mathrm{G}(M_1, M_2) + \mathrm{G}(M_2, M_1)\right)\right. \tag{5.3}$$
$$\left. + \varphi_1\varphi_2 \left(M_1 |\mathrm{L}(M_2)| + M_2 |\mathrm{L}(M_1)|\right)\right] d\mathbf{v}.$$

Далі, маючи на увазі той факт, що $\mathrm{G}(M_1, M_2) = \mathrm{G}(M_2, M_1)$, справедливі наступні рівності [36], [58]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{G}(M_1, M_2) d\mathbf{v} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_1 \mathrm{L}(M_2) d\mathbf{v} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{G}(M_2, M_1) d\mathbf{v} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_2 \mathrm{L}(M_1) d\mathbf{v}.$$

Отже, вираз (5.3) можна представити наступним чином:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v} \\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} [M_1|D(\varphi_1)| + M_2|D(\varphi_2)|]\, d\mathbf{v} + 4\varphi_1\varphi_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_1\, |\mathrm{L}(M_2)|\, d\mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Так як [28]

$$
\mathrm{L}(M_i) = \frac{\rho_i d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_i - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_i}} \right| e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w},
$$

то, з огляду на (2.3) і (2.11), сума інтегралів в (5.4) набуде вигляду:

$$
\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho_i(t,\mathbf{x}) \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta_i(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}}_i)^2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) \right| d\mathbf{v}
$$

$$
+4\varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})}{\pi^2} d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} \beta_1^{3/2} e^{-\beta_1(\mathbf{v}-\widetilde{\mathbf{v}}_1)^2} \left| \mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_2 - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_2}} \right| e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{v}.
$$

Звідки, після заміни $\mathbf{u} = \sqrt{\beta_i}(\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{v}}_i)$, з урахуванням (2.13), отримаємо основний вигляд оцінки зверху для (5.2):

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, d\mathbf{v} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| \rho_i(t,\mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \\
&\qquad +4\varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1(t,\mathbf{x})\rho_2(t,\mathbf{x})}{\pi^2} d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{12} e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u},
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

де

$$
F_{12} = F_{12}(t,\mathbf{u},\mathbf{w}) = \left| \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2 + (\overline{\mathbf{u}}_2 - \overline{\mathbf{u}}_1) t \right|, \tag{5.6}
$$

$$
\rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i \exp\left\{ \beta_i ((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})) \right\},\ i = 1, 2. \tag{5.7}
$$

Для повноти викладення подальших результатів наведемо декілька означень, які були введені в роботі [91].

Означення 5.1. Нехай $\mathcal{G}$ – така обмежена область в $\mathbb{R}^n$, що число компонент зв'язности перетину $\mathcal{G}$ з будь-якою прямою, параллельною якій-небудь з координатних осей, скінченно. Для будь-якого $\delta > 0$ позначимо через $\mathcal{G}_\delta$ множину точок з $\mathbb{R}^n$, які відстоять від $\mathcal{G}$ не більше ніж на δ.

Якщо $n = 4$ і координати позначаються як t, x^k $(k = 1, 2, 3)$, то через $\mathcal{G}^{\mathbf{x}}$ – позначимо проекцію $\mathcal{G}$ на гіперплощину $t = 0$, а через $\mathcal{G}^k$ – проекцію $\mathcal{G}$ на гіперплощину $x^k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$.

Позначимо об'єми (міри) відповідної розмірності буквою m.

Означення 5.2. Фінітним "δ–плато" над областю $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^4$, $\delta > 0$ називається така функція $\varphi_\delta(\mathcal{G}, t, \mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^4)$, що

$$\varphi_\delta(\mathcal{G}, t, \mathbf{x}) = \left[\begin{array}{l} 1, \ (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{G}, \\ 0, \ (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{G}_\delta, \\ 0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1, \ (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{G}_\delta \setminus \mathcal{G}, \end{array} \right. \tag{5.8}$$

і, крім цього, на будь-якій прямій, паралельній одній з координатних осей, функція φ_δ має не більше ніж скінченну кількість строгих екстремумів.

Тепер повернемося безпосередньо до поставленої задачі і розглянемо кілька варіантів її розв'язання, які дають різні достатні умови прямування відхилу (5.1) до нуля при певному виборі функцій φ_i, $i = 1, 2$ і відповідній поведінці гідродинамічних параметрів.

Теорема 5.1. Нехай $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathbb{R}^4$ – обмежені області з Означення 5.1, і $\delta_1, \delta_2 > 0$ такі, що $\mathcal{G}_{1,\delta_1} \cap \mathcal{G}_{2,\delta_2} = \varnothing$. Нехай функції φ_i, $i = 1, 2$ з розподілу (2.9) мають вигляд "δ–плато" (5.8), причому $\varphi_{\delta_1}(\mathcal{G}_1, t, \mathbf{x})$ і $\varphi_{\delta_2}(\mathcal{G}_2, t, \mathbf{x})$ такі, що загальна кількість їх екстремумів з Означення 5.2, обмежена рівномірно відносно всіх аргументів константою $\mathcal{K} > 0$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$.

Крім того, нехай виконуються наступні умови:

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \ i = 1, 2, \tag{5.9}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_i = \frac{\overline{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}, \ i = 1, 2, \tag{5.10}$$

де $\overline{\mathbf{u}}_{oi}$, $\overline{\mathbf{v}}_{oi} \in \mathbb{R}^3$ – довільні фіксовані вектори, а числа n_i, k_i задовольняють нерівностям

$$n_i \geqslant 1, \ k_i \geqslant \frac{1}{2}, \ i = 1, 2.$$

Тоді існує таке Δ_1', для якого вірно

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1'. \tag{5.11}$$

Причому при будь-якому фіксованому $d > 0$

$$\lim_{\substack{m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}) \to 0 \\ (i=1,2)}} \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = 0, \tag{5.12}$$

де $m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}})$, $i = 1, 2$ – об'єм (міра) проекції множини $\mathcal{G}_i$ на підпростір $t = 0$.

Доведення. Проінтегруємо вираз (5.5) по t і $\mathbf{x}$, звідки отримаємо наступний вигляд оцінки для відхилу (5.1):

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right.$$
$$+ \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \Bigg| \rho_i(t, \mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \tag{5.13}$$
$$+ 4\frac{d^2}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi_1 \varphi_2 \rho_1(t, \mathbf{x}) \rho_2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{12} e^{-\mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u},$$

де F_{12} має вигляд (5.6).

Ця оцінка коректно визначена, так як величини $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$; $\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) t$; $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|$; φ_i; $\varphi_i t$; $\varphi_1 \varphi_2$, після множення на $\rho_i(t, \mathbf{x})$ вигляду (5.7), належать простору $L_1(\mathbb{R}^4)$ при всіх $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$ завдяки фінітності функцій φ_i, $i = 1, 2$.

З умов коректності оцінки, описаних вище, фінітності функцій φ_i, а також завдяки тому, що функції $e^{-\mathbf{w}^2}$ і $e^{-\mathbf{u}^2}$ – швидкоспадні, випливає рівномірна збіжність всіх інтегралів, які входять до правої частини нерівності (5.13), відносно змінної γ_i, де $\gamma_i = \frac{1}{\beta_i}$, $i = 1,2$, а значить величина Δ_1' неперервна по γ_i, що дозволяє перейти в цьому виразі до границі при $\gamma_i \to 0$ ($\beta_i \to +\infty$).

Таким чином, при переході до низькотемпературної границі в (5.13), враховуючи умови (5.9), (5.10), границі "фрагментів" вигляду (5.6) та (5.7) будуть, очевидно, такими:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \rho_i(t,\mathbf{x}) = \overline{\rho}_i \mathcal{F}_i(\mathbf{x}),\ i = 1,2,$$

де

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{ll} 1, & n_i > 1,\ k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}, & n_i = 1,\ k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}, & n_i = 1,\ k_i = \frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad i = 1,2; \tag{5.14}$$

та

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} F_{12} = 0.$$

Значить,

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left[\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \right] dt d\mathbf{x},$$

звідки, після обчислення інтегралу по змінній $\mathbf{u}$, маємо:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left[\sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \right] dt d\mathbf{x}. \tag{5.15}$$

Вертаючись безпосередньо до вигляду функцій φ_i, $i = 1,2$, тобто до виразу (5.8), з огляду на (5.14), ми отримаємо наступні результати.

1) Якщо $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = 1$, то границя (5.15) набуде вигляду:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \overline{\rho}_1 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt d\mathbf{x} + \overline{\rho}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt d\mathbf{x}. \tag{5.16}$$

Спираючись на умови даної теореми, розглянемо перший інтеграл з (5.16) (позначимо $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{G}_{1,\delta_1} \backslash \mathcal{G}_1$) і обчислимо його (без врахування константи $\overline{\rho}_1$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|dtd\mathbf{x}=\int\limits_{\mathcal{G}_1}\left|\frac{\partial 1}{\partial t}\right|dtd\mathbf{x}+\int\limits_{\mathbb{R}^4\setminus\mathcal{G}_{1,\delta_1}}\left|\frac{\partial 0}{\partial t}\right|dtd\mathbf{x}$$

$$+\int\limits_{\mathcal{G}_{1,\delta_1}\setminus\mathcal{G}_1}\left|\frac{\partial\varphi_{\delta_1}}{\partial t}\right|dtd\mathbf{x}=\int\limits_{\mathfrak{D}_1}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|dtd\mathbf{x}=\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}}d\mathbf{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|dt$$

$$=\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}}d\mathbf{x}\sum_{s=1}^{\mathcal{N}(\mathbf{x},\delta_1)}\int\limits_{a_s}^{a_{s+1}}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|dt=\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}}d\mathbf{x}\sum_{s=1}^{\mathcal{N}(\mathbf{x},\delta_1)}\left|\int\limits_{a_s}^{a_{s+1}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}dt\right| \tag{5.17}$$

$$=\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}}\left[\sum_{s=1}^{\mathcal{N}(\mathbf{x},\delta_1)}|\varphi_1(a_{s+1},\mathbf{x})-\varphi_1(a_s,\mathbf{x})|\right]d\mathbf{x}$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}}\mathcal{N}(\mathbf{x},\delta_1)d\mathbf{x}\leqslant 2\mathcal{K}m(\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}),$$

де a_s, $s=1,...,\mathcal{N}(\mathbf{x},\delta_1)$ – строгі екстремуми функції φ_1, які належать прямим паралельним вісі t, для деяких фіксованих $\mathbf{x}$ і δ_1; $\mathcal{K}$ – константа з умови даної теореми; оцінка φ_1 випливає з (5.8).

Аналогічним чином оцінюється другий інтеграл з (5.16), де $\mathfrak{D}_2=\mathcal{G}_{2,\delta_2}\setminus\mathcal{G}_2$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4}\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|dtd\mathbf{x}=\int\limits_{\mathfrak{D}_2^{\mathbf{x}}}d\mathbf{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|dt\leqslant 2\mathcal{K}m(\mathfrak{D}_2^{\mathbf{x}}). \tag{5.18}$$

Згадуючи позначення для $\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}$ і $\mathfrak{D}_2^{\mathbf{x}}$, ми можемо зробити висновок, що

$$\lim_{\delta_1\to 0}m(\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}})=m(\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}), \tag{5.19}$$

$$\lim_{\delta_2\to 0}m(\mathfrak{D}_2^{\mathbf{x}})=m(\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}). \tag{5.20}$$

Таким чином, з (5.16)–(5.20), ми отримаємо:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1'\leqslant 2\overline{\rho}_1\mathcal{K}m(\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}})+2\overline{\rho}_2\mathcal{K}m(\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}})=2\mathcal{K}\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}),$$

звідки випливає (5.12).

2) Якщо $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}$ (з (5.14)), то вираз (5.15) набуде вигляду:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = \overline{\rho}_1 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} + \overline{\rho}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right| e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o2},\mathbf{x})} dt d\mathbf{x}. \quad (5.21)$$

Перетворимо інтеграли в (5.21) аналогічно тому, як це було зроблено у випадку 1), з урахуванням того, що в силу обмеженості множин $\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}$, $\mathfrak{D}_2^{\mathbf{x}}$ існує константа $\lambda > 0$ така, що $|\mathbf{x}| \leqslant \lambda$, значить $e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})} \leqslant e^{2|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|\lambda}$. Отже, маємо:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}} e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})} d\mathbf{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| dt$$

$$\leqslant e^{2|\overline{\mathbf{u}}_{o1}|\lambda} \int\limits_{\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}} d\mathbf{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right| dt \leqslant 2\mathcal{K} m(\mathfrak{D}_1^{\mathbf{x}}) e^{2|\overline{\mathbf{u}}_{o1}|\lambda};$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right| e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o2},\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} \leqslant 2\mathcal{K} m(\mathfrak{D}_2^{\mathbf{x}}) e^{2|\overline{\mathbf{u}}_{o2}|\lambda}.$$

Тому, враховуючи (5.19) та (5.20), отримуємо:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to0\\ \delta_2\to0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' \leqslant 2\mathcal{K} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{2|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|\lambda} m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}),$$

звідки випливає необхідне твердження (5.12).

3) Якщо з (5.14) взяти $\mathcal{F}_i(\mathbf{x}) = e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}$, то, використовуючи викладки, отримані у випадках 1) і 2), маємо:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' \leqslant 2\mathcal{K} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2 + 2|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|\lambda} m(\mathfrak{D}_i^{\mathbf{x}}).$$

Переходячи до границі при $\delta_1 \to 0$ і $\delta_2 \to 0$ в останній нерівності, ми отримаємо:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to0\\ \delta_2\to0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' \leqslant 2\mathcal{K} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2 + 2|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|\lambda} m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}),$$

що в подальшому приводить нас до необхідного результату, тобто знову до твердження (5.12).

Таким чином при будь-яких $\mathcal{F}_i(\mathbf{x})$ з (5.14) справедлива рівність (5.12), що і треба було довести. $\square$

Теорема 5.2. Нехай функції φ_i в розподілі (2.9) мають вигляд:

$$\varphi_i(t,\mathbf{x}) = \psi_i(t,\mathbf{x}) e^{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))},\ i=1,2, \tag{5.22}$$

де функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ такі, що вирази

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right|;\ \psi_1\psi_2;\ \psi_i;\ \psi_i t;\ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right),\ i=1,2 \tag{5.23}$$

належать простору $L_1(\mathbb{R}^4)$.

Крім того, нехай виконується умова (5.9) ($\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{0i}}{\beta_i^{n_i}}$) при $n_i > \frac{1}{2}$.

Тоді справедлива оцінка (5.11), причому існує така скінченна границя:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right| dt d\mathbf{x} \\ +4\pi d^2 \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \int\limits_{\mathbb{R}^4} \psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x}) dt d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Доведення. Будемо спиратися на вигляд оцінки (5.11), а саме на формулу (5.13), отриману при доведенні Теореми 5.1. Обчислимо похідні функцій $\varphi_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$, вигляду (5.22):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} - 2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right) e^{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))}, \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i((\overline{\mathbf{v}}_i,\overline{\mathbf{u}}_i) - \overline{\mathbf{u}}_i^2 t)\right) e^{-\beta_i((\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2 + 2(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x}))}. \tag{5.26}$$

Підставивиши отримані вирази частинних похідних функцій φ_i, $i=1,2$, тобто (5.25) і (5.26) в (5.13) (збіжність відповідних інтегралів випливає з умови (5.23)), ми приходимо до наступної оцінки Δ_1':

$$\begin{aligned} \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^4} dt d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right. \\ \left. + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}}, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right) - 2\left(\mathbf{u}, \sqrt{\beta_i}\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i\right)\right| \overline{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \\ +4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \psi_1\psi_2 dt d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{12} e^{-\mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u} \end{aligned} \tag{5.27}$$

при збереженні (5.6).

В результаті переходу до низькотемпературної границі при $\beta_i \to +\infty,\ i=1,2$ у виразі (5.27), завдяки (5.9) (можливість здійснення такого граничного переходу обґрунтовується так само як при доведенні Теореми 5.1), отримаємо:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^4} dtd\mathbf{x} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\rho}_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| \pi^{-3/2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \psi_1\psi_2 dtd\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^6} |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2} d\mathbf{w}d\mathbf{u} \qquad (5.28)$$

Подальше тривіальне інтегрування в (5.28) по змінним $\mathbf{u}$ і $\mathbf{w}$ призводить до (5.24). Теорему доведено. □

Наслідок 5.1. Нехай мають місце всі припущення Теореми 5.2, а функції $\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$ мають вигляд "δ–плато" (5.8), причому $\psi_{\delta_1}(\mathcal{G}_1,t,\mathbf{x})$ і $\psi_{\delta_2}(\mathcal{G}_2,t,\mathbf{x})$ такі, що загальна кількість їх екстремумів з Означення 5.2, обмежена рівномірно відносно всіх аргументів константою $\mathcal{K}_1>0$ при $\delta_1,\delta_2\to 0$.

Тоді співвідношення

$$\Delta_1 \to 0 \qquad (5.29)$$

справедливе в припущеннях аналогічних (5.12), а саме:

$$\lim_{\substack{m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}})\to 0\\ m(\mathcal{G}_i^k)|\overline{v}_i^k|\to 0\\(i=1,2,k=1,2,3)}} \ \lim_{\substack{\delta_1\to0\\ \delta_2\to0}} \ \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = 0,$$

якщо має місце хоча б одна з таких умов:

1) для будь-яких $\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i=1,2$, які задовольняють умови (5.23),

$$\overline{\mathbf{v}}_1 = \overline{\mathbf{v}}_2; \qquad (5.30)$$

2)

$$\mathrm{supp}\ \psi_1 \cap \mathrm{supp}\ \psi_2 = \varnothing; \qquad (5.31)$$

3) для довільних $\overline{\mathbf{v}}_1$, $\overline{\mathbf{v}}_2$ і $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$, з урахуванням (5.23),

$$d \to 0. \tag{5.32}$$

Доведення. Легко бачити, що умова (5.23) Теореми 5.2 виконується завдяки фінітності функцій $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$ і, враховуючи (5.9) при $n_i > \frac{1}{2}$, очевидно, справедлива рівність (5.24), причому всі інтеграли, які до неї входять, збігаються також завдяки фінітності $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$.

Виходячи з того, що функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$ $i=1,2$ вибрано у вигляді фінітних "δ–плато", а саме у вигляді (5.8), де замість φ_i відбувається підстановка ψ_i, $i=1,2$, і згадуючи позначення $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{G}_{1,\delta_1} \backslash \mathcal{G}_1$ та $\mathfrak{D}_2 = \mathcal{G}_{2,\delta_2} \backslash \mathcal{G}_2$, перший доданок в (5.24) може бути ще раз оцінено зверху наступним чином:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| dt d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathfrak{D}_i} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| dt d\mathbf{x} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathfrak{D}_i} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right| + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x^k} \right| |\overline{v}_i^k| \right] dt d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Спираючись на техніку оцінювання інтегралів, використану при доведенні Теореми 5.1 (зокрема у випадоку 1)), для першої частини останньої суми в (5.33) отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathfrak{D}_i} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right| dt d\mathbf{x} \leqslant 2\mathcal{K}_1 \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i m(\mathfrak{D}_i^{\mathbf{x}}), \tag{5.34}$$

звідки, використовуючи справедливі і зараз рівності (5.19) та (5.20), можемо записати, що

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} 2\mathcal{K}_1 \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i m(\mathfrak{D}_i^{\mathbf{x}}) = 2\mathcal{K}_1 \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}). \tag{5.35}$$

Тепер оцінимо другу частину суми, а саме вираз

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\int\limits_{\mathfrak{D}_i}\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x^1}\right||\overline{v}_i^1|+\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x^2}\right||\overline{v}_i^2|+\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x^3}\right||\overline{v}_i^3|\right]dtd\mathbf{x}. \tag{5.36}$$

Обчислимо в (5.36) інтеграл по t, $\mathbf{x}$ від одного з доданків для $i=1$ (всі інші оцінюються аналогічним чином), наприклад:

$$\int\limits_{\mathfrak{D}_1}\left[\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}\right||\overline{v}_1^1|\right]dtd\mathbf{x}=|\overline{v}_1^1|\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{t,x^2,x^3}}dtdx^2dx^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}\right|dx^1$$

$$=|\overline{v}_1^1|\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{t,x^2,x^3}}dtdx^2dx^3\sum_{s=1}^{\mathcal{N}(t,x^2,x^3,\delta_1)}\int\limits_{a_s}^{a_{s+1}}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}\right|dx^1$$

$$=|\overline{v}_1^1|\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{t,x^2,x^3}}dtdx^2dx^3\sum_{s=1}^{\mathcal{N}(t,x^2,x^3,\delta_1)}\left|\int\limits_{a_s}^{a_{s+1}}\frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}dx^1\right|$$

$$=|\overline{v}_1^1|\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{t,x^2,x^3}}dtdx^2dx^3\sum_{s=1}^{\mathcal{N}(t,x^2,x^3,\delta_1)}\left|\psi_1(a_{s+1},t,x^2,x^3)-\psi_1(a_s,t,x^2,x^3)\right|$$

$$\leqslant 2|\overline{v}_1^1|\int\limits_{\mathfrak{D}_1^{t,x^2,x^3}}\mathcal{N}(t,x^2,x^3,\delta_1)dtdx^2dx^3\leqslant 2|\overline{v}_1^1|\mathcal{K}_1 m(\mathfrak{D}_1^{t,x^2,x^3}),$$

де a_s, $s=1,...,\mathcal{N}(t,x^2,x^3,\delta_1)$ – строгі екстремуми функції ψ_1, які належать прямим паралельним вісі x^1, для деяких фіксованих t, x^2, x^3 і δ_1; $\mathcal{K}_1$ – константа з умови даного наслідку; оцінка ψ_1 випливає з (5.8) де φ замінюється на ψ.

Отже, загальна оцінка для виразу (5.36) виглядатиме наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\int\limits_{\mathfrak{D}_i}\sum_{k=1}^{3}\left[\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x^k}\right||\overline{v}_i^k|\right]dtd\mathbf{x}$$
$$\leqslant 2\mathcal{K}_1\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\left[|\overline{v}_i^1|m(\mathfrak{D}_i^{t,x^2,x^3})+|\overline{v}_i^2|m(\mathfrak{D}_i^{t,x^1,x^3})+|\overline{v}_i^3|m(\mathfrak{D}_i^{t,x^1,x^2})\right]. \tag{5.37}$$

Знову згадуючи позначення для $\mathfrak{D}_i$ і означення для $\mathcal{G}^k$ (Означення 5.1), ми можемо записати наступне:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} m(\mathfrak{D}_i^{t,x^2,x^3}) = m(\mathcal{G}_i^1),$$

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} m(\mathfrak{D}_i^{t,x^1,x^3}) = m(\mathcal{G}_i^2),$$

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} m(\mathfrak{D}_i^{t,x^1,x^2}) = m(\mathcal{G}_i^3),$$

тому

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathfrak{D}_i} \sum_{k=1}^{3} \left[\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x^k}\right| |\overline{v}_i^k|\right] dtd\mathbf{x} = 2\mathcal{K}_1 \sum_{i=1}^{2} \left[\overline{\rho}_i \sum_{k=1}^{3} |\overline{v}_i^k| m(\mathcal{G}_i^k)\right], \quad (5.38)$$

де $m(\mathcal{G}_i^k)$, $i = 1, 2$ – об'єм (міра) проекції множини $\mathcal{G}_i$ на підпростір $x^k = 0$, $(k = 1, 2, 3)$.

Таким чином, повертаючись до першого доданку з (5.24), враховуючи (5.33)–(5.38), ми отримаємо:

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right)\right| dtd\mathbf{x} \\ &\leqslant 2\mathcal{K}_1 \sum_{i=1}^{2} \left[\overline{\rho}_i m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}) + \sum_{k=1}^{3} \overline{\rho}_i |\overline{v}_i^k| m(\mathcal{G}_i^k)\right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Відтак, якщо припустити, що $m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}) \to 0$ і $m(\mathcal{G}_i^k)|\overline{v}_i^k| \to 0$ ($i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$), то перший доданок в (5.24) прямує до нуля, а другий доданок стає нескінченно малим за рахунок виконання хоча б однієї з умов (5.30)–(5.32). Звідки випливає виконання (5.29), що і треба було довести. □

Теорема 5.3. Нехай в бімодальному розподілі (2.9) коефіцієнтні функції мають наступний вигляд:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) e^{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}, \; i = 1, 2, \quad (5.40)$$

де функції $\psi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ такі, що добутки величин (5.23), тобто

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \; \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|; \; \psi_1\psi_2; \; \psi_i; \; \psi_i t; \; t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right), \; i = 1, 2$$

на множник $\exp\{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})\}$, $i = 1,2$ належать простору $L_1(\mathbb{R}^4)$, а припущення (5.9) ($\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}$), виконується для $n_i \geqslant 1$, $i = 1,2$.

Тоді існує Δ_1, визначене у відповідності з (5.1), таке, що виконується $\Delta_1 \leqslant \Delta_1'$, причому скінченна границя величини Δ_1' існує і дорівнює виразу (5.24) при $n_i > 1$, а при $n_i = 1$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \int\limits_{\mathbb{R}_4} \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\overline{\mathbf{v}}_i)\psi_i(t,\mathbf{x}) + \left(\overline{\mathbf{v}}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right| e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} \tag{5.41}$$
$$+4\pi d^2 \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2| \int\limits_{\mathbb{R}^4} \psi_1(t,\mathbf{x})\psi_2(t,\mathbf{x}) e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o1},\mathbf{x})} e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{o2},\mathbf{x})} dt d\mathbf{x}.$$

Доведення. Проведемо доведення аналогічно тому, як це було зроблено в Теоремі 5.2, при цьому, завдяки (5.40) замість (5.25) і (5.26) будемо мати:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}} e^{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right) e^{-\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2}.$$

Отже, буде справедливим наступний аналог виразу (5.27) (де F_{12} має вигляд (5.6)), а саме:

$$\Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^4} dt d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i\left((\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i) - t\overline{\mathbf{u}}_i^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial\psi_i}{\partial\mathbf{x}}\right)\right| \overline{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \tag{5.42}$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \psi_1\psi_2 e^{2\beta_1(\overline{\mathbf{u}}_1,\mathbf{x})} e^{2\beta_2(\overline{\mathbf{u}}_2,\mathbf{x})} dt d\mathbf{x} \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{12} e^{-\mathbf{w}^2-\mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u}.$$

Подальший перехід до низькотемпературної границі при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$ (можливість такого граничного переходу була обґрунтована в доведенні Теореми 5.1), з огляду на (5.9), дає наступні результати для деяких "фрагментів" виразу (5.42):

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} 2\beta_i\psi_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i) = \left[\begin{array}{ll} 2\psi_i(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\overline{\mathbf{v}}_i), & n_i = 1, \\ 0, & n_i > 1; \end{array}\right. \tag{5.43}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} 2\beta_i\psi_i\overline{\mathbf{u}}_i^2 t = 0 \text{ при } n_i \geqslant 1; \tag{5.44}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} e^{2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i,\mathbf{x})} = \left[\begin{array}{ll} e^{2(\overline{\mathbf{u}}_{oi},\mathbf{x})}, & n_i = 1, \\ 1, & n_i > 1; \end{array}\right. \tag{5.45}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} F_{12} = |\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{v}}_2|. \tag{5.46}$$

Таким чином, граничний перехід в (5.42), з урахуванням (5.43)–(5.46), після інтегрування по $\mathbf{w}$ і $\mathbf{u}$, приводить нас до остаточного вигляду границі величини Δ_1', яка дорівнює виразу (5.24) при $n_i > 1$, а при $n_i = 1$ повністю співпадає з (5.41). Теорему доведено. □

Наслідок 5.2. Нехай виконані всі припущення Теореми 5.3, й функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2$ мають вигляд "δ–плато" (5.8), причому $\psi_{\delta_1}(\mathcal{G}_1,t,\mathbf{x})$ і $\psi_{\delta_2}(\mathcal{G}_2,t,\mathbf{x})$ такі, що загальна кількість їх екстремумів з Означення 5.2, обмежена рівномірно відносно всіх аргументів константою $\mathcal{K}_1 > 0$ при $\delta_1,\delta_2 \to 0$.

Крім того, нехай виконується додаткова умова

$$(\overline{\mathbf{u}}_i,\overline{\mathbf{v}}_i) = 0, \; i = 1,2. \tag{5.47}$$

Тоді твердження (5.29) ($\Delta_1 \to 0$) залишається в силі при виконанні хоча б однієї з умов 1)–3) Наслідку 5.1.

Доведення. Неважко переконатися, що, завдяки фінітності, функції $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i = 1,2$ вигляду (5.8), при виконанні припущень даного наслідку, задовольняють вимоги Теореми 5.3. Таким чином, ми можемо скористатися твердженнями цієї теореми.

Розглянемо випадок, коли $n_i > 1$. Легко бачити, що доведення цього випадку ідентично доведенню Наслідку 5.1, де в підсумку ми приходимо до необхідного результату. Однак, для значення параметрів $n_i = 1$, ситуація дещо ускладнюється. Як було доведено вище, ми можемо скористатися твердженням (5.41) Теореми 5.3, де вираз $2\psi_i(\overline{\mathbf{u}}_{oi}, \overline{\mathbf{v}}_i)$ в першому доданку зникне завдяки умові (5.47), а другий доданок буде або дорівнювати нулю, або до нього прямувати внаслідок виконання хоча б одного з припущень (5.30)–(5.32). Подальша оцінка залишившихся доданків в рівності (5.41) виконується подібно до того, як це було зроблено в доведенні Наслідку 5.1, з тією лише різницею, що у виразі (5.39) з'явиться множник $e^{2|\overline{\mathbf{u}}_{oi}|\lambda}$, $i = 1, 2$, де $\lambda > 0$ – константа, існування якої описано в другому пункті доведення Теореми 5.1, що знову приводить до необхідного результату, а саме до виконання твердження (5.29). □

Теорема 5.4. Нехай в розподілі (2.9) для коефіцієнтних функцій $\varphi_i = \varphi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ виконується наступна рівність:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) e^{-2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})}, \ i = 1, 2, \tag{5.48}$$

і зберігаються припущення (5.9), (5.10), тобто

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \frac{\overline{\mathbf{u}}_{oi}}{\beta_i^{n_i}}, \quad \overline{\mathbf{v}}_i = \frac{\overline{\mathbf{v}}_{oi}}{\beta_i^{k_i}}, \ i = 1, 2$$

для параметрів

$$n_i > \frac{1}{2}, \ k_i \geqslant \frac{1}{2}, \ i = 1, 2. \tag{5.49}$$

Крім того, нехай функції $\psi_i(t, \mathbf{x})$, $i = 1, 2$ такі, що добутки величин

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \ \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right|; \ \psi_1\psi_2; \ \psi_i; \ \psi_i t; \ t\left(\overline{\mathbf{u}}_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right), \ i = 1, 2$$

на множник $\exp\left\{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2\right\}$, $i = 1, 2$ належать простору $L_1(\mathbb{R}^4)$.

Тоді дійсна оцінка $\Delta_1 \leqslant \Delta_1'$, де

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \sigma_i \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right| dt d\mathbf{x}, \tag{5.50}$$

та

$$\sigma_i = \left[\begin{array}{ll} 1, & n_i > \frac{1}{2}, k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2}, & n_i > \frac{1}{2}, k_i = \frac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{5.51}$$

Доведення. Очевидно, що при обчисленні частинних похідних від (5.48), ми отримаємо наступне:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} - 2\beta_i \psi_i \overline{\mathbf{u}}_i\right) e^{-2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})},\ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} e^{-2\beta_i(\overline{\mathbf{u}}_i, \mathbf{x})},\ i = 1, 2,$$

що в свою чергу, після підстановки в (5.13) дасть результат аналогічний (5.42), а саме:

$$\Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^4} dt d\mathbf{x} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}\right) \right.$$
$$\left. -2\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t, \beta_i \psi_i \overline{\mathbf{u}}_i\right)\right| \overline{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2} e^{-\mathbf{u}^2} d\mathbf{u} \tag{5.52}$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} dt d\mathbf{x} \psi_1 \psi_2 e^{\beta_1(\overline{\mathbf{v}}_1 - \overline{\mathbf{u}}_1 t)^2} e^{\beta_2(\overline{\mathbf{v}}_2 - \overline{\mathbf{u}}_2 t)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} F_{12} e^{-\mathbf{w}^2 - \mathbf{u}^2} d\mathbf{w} d\mathbf{u}.$$

Далі, припущення (5.9), (5.10) та (5.49) гарантують існування скінченної границі експоненти представленої в (5.52):

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} e^{\beta_i(\overline{\mathbf{v}}_i - \overline{\mathbf{u}}_i t)^2} = \sigma_i,\ i = 1, 2,$$

де функції σ_i мають вигляд (5.51).

З огляду на все ті ж щойно згадані умови (5.9), (5.10), (5.49), при изькотемпературному граничному переході в (5.52), всі доданки першої частини оцінки Δ_1', які знаходяться під модулем, окрім $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$, прямують до нуля; друга ж частина теж прямує до нуля, завдяки тому, що саме границя виразу F_{12} дорівнює нулю при $\beta_i \to +\infty,\ i = 1, 2$ і виконанні умов (5.9), (5.10), (5.49) (можливість аналогічного низькотемпературного граничного переходу обґрунтована в доведенні Теореми 5.1).

Всі викладені факти після застосування до рівності (5.52) і подальшого обчислення інтегралів по змінних $\mathbf{w}$ і $\mathbf{u}$ приводять до (5.50), (5.51). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 5.1. Якщо в рівності (5.48) в якості функцій $\psi_i(t,\mathbf{x})$, $i=1,2$ розглядати фінітні "δ–плато", описані в Означенні 5.1, то ми отримаємо результат ідентичний випадку 1) з доведення Теореми 5.1, причому множник $e^{\overline{\mathbf{v}}_{oi}^2}$ з (5.51) істотно ні на що не впливає.

5.2. Аналіз результатів

Отримані при доведенні Наслідку 5.1 умови $m\left(\mathcal{G}_i^k\right)|\overline{v}_i^k| \rightarrow 0$ значно розширюють кількість можливих варіантів мінімізації відхилу (5.1), в порівнянні, наприклад, з умовами $m\left(\mathcal{G}_i^k\right) \rightarrow 0$ або $|\overline{v}_i^k| \rightarrow 0$, завдяки тому, що при різних значеннях індексу $k=1,2,3$ або міра відповідної проекції множини $\mathcal{G}_i$, або відповідна складова масової швидкості прямують до нуля. Нижче наведено аналіз фізичного змісту таких варіантів.

Зробимо ще одне зауваження про те, що в Теоремі 5.2 умова (5.9) розглядається лише для параметрів $n_i > \frac{1}{2}$, так як у випадку $n_i = \frac{1}{2}$ у виразі (5.24) з'являється додатковий доданок, мінімізація якого призводить до тривіального результату. Те ж саме справедливе і для Теореми 5.4. А відмова від припущення (5.10) в Теоремі 5.2 та Теоремі 5.3 дозволяє розглянути більш загальний вигляд розв'язків поставленої в цьому розділі задачі.

Також відзначимо, що в граничних переходах типу (5.32) використана довільна малість числа d, що відповідає потоку газу, близькому до свободномолекулярного (газ, близький до кнудсенівського); в інших же випадках розглядається больцманівський газ при довільному $d>0$.

Тепер розглянемо фізичний сенс отриманих в Розділі 5 результатів. Вперше опис фізичного змісту і геометричної структури деяких явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль був представлений в роботі [91], в якій було побудовано тримодальні розподіли з глобальними макселівськими модами і коефіцієнтними функціями типу "розбиття одиниці", при цьому, в якості ступеня наближеності використано інтегральний відхил між частинами вказаного рівняння. Ми ж встановимо фізичні особливості явних наближених розв'язків знову ж таки рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль, але тепер ці розв'язки мають вигляд бімодальних розподілів з коефіцієнтними функціями різного вигляду та локальними модами типу "прискорення-ущільнення" і, при цьому, забезпечують мінімізацію інтегрального відхилу. Тобто проаналізуємо геометричну структуру і фізичний зміст об'єктів, які з'являються після граничного переходу

$$\lim_{\substack{m(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}})\to 0 \\ m(\mathcal{G}_i^k)|\overline{v}_i^k|\to 0 \\ (i=1,2,k=1,2,3)}} \lim_{\substack{\delta_1\to 0 \\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1 = 0$$

в Наслідку 5.1. Як і в роботі [91] припустимо, що проекція кожного нестаціонарного обмеженого об'єкту на вісь t – це деякий відрізок або об'єднання скінченного числа відрізків, тобто об'єкти існують тільки в деякому інтервалі часу або на деяких з таких інтервалів. Отже, нестаціонарні розв'язки, знайдені в цьому розділі наближено описують коливання густини, температури і масової швидкості в низькотемпературному (остигаючому) газі.

Означення 5.3. (дивись [91], Означення 3). Назвемо обмежену область $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$, яка стягується до множини $\mathfrak{D}$ (індекс при m вказує розмірність відповідної міри: довжина, площа, об'єм):

а) згустком, якщо $m_3(\mathfrak{D}) \neq 0$;

б) оболонкою, якщо $m_3(\mathfrak{D}) = 0$, а $m_2(\mathfrak{D}) \neq 0$; зокрема, циліндричним блином, якщо $\mathfrak{D}$ є частиною деякої циліндричної поверхні з віссю, паралельною одній з координатних осей (якщо напрямна циліндру – замкнена крива, назвемо об'єкт трубою);

в) плоским блином, якщо $\mathfrak{D}$ – частина деякої площини, яка паралельна будь-якій з координатних площин, причому $m_2(\mathfrak{D}) \neq 0$.

г) волокном, якщо $m_2(\mathfrak{D}) = 0$, $m_1(\mathfrak{D}) \neq 0$.

Дотримуючись термінології, яка була щойно приведена, перерахуємо об'єкти, які були отримані в Наслідку 5.1 (враховуючи той факт, що в нашій нестаціонарній ситуації згустки неможливі, оскільки умова $m\left(\mathcal{G}_i^{\mathbf{x}}\right) \to 0$ є необхідною). Зауважимо також, що поведінка об'єктів між собою ніяк не пов'язана, тобто вони не залежні один від одного. Отже.

1. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_2^1) \to 0$, $\overline{v}_1^2 = \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^2 = \overline{v}_2^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ і $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – два циліндричних блина, які знаходяться на циліндрах з паралельними осями і літають кожен вздовж осі свого циліндра з довільними швидкостями.

2. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_2^2) \to 0$, $\overline{v}_1^2 = \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^1 = \overline{v}_2^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ і $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – два циліндричних блина, які знаходяться на циліндрах з перпендикулярними осями і літають кожен вздовж осі свого циліндра з довільними швидкостями.

3. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1) \to 0$, $m(\mathcal{G}_2^1), m(\mathcal{G}_2^2) \to 0$, $\overline{v}_1^2 = \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в будь-якому напрямку в своїй площині з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – циліндричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю паралельно цій площині.

4. Якщо $m(\mathcal{G}_1^3) \to 0$, $m(\mathcal{G}_2^1), m(\mathcal{G}_2^2) \to 0$, $\overline{v}_1^1 = \overline{v}_1^2 = \overline{v}_2^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в будь-якому напрямку в своїй площині з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – циліндрічний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю перпендикулярно цій площині.

5. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_1^2) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^1) \to 0,\ \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^2 = \overline{v}_2^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в будь-якому напрямку в своїй площині з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – циліндричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю паралельно цій площині.

6. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_1^2) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^3) \to 0,\ \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^1 = \overline{v}_2^2 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в будь-якому напрямку в своїй площині з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – циліндричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю перепендикулярно цій площині.

7. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^k) \to 0,\ k = 1, 2, 3,\ \overline{v}_1^2 = \overline{v}_1^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – циліндричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – волокно з довільною швидкістю.

8. Якщо $m(\mathcal{G}_1^k) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^1) \to 0,\ k = 1, 2, 3,\ \overline{v}_2^2 = \overline{v}_2^3 = 0$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – волокно з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – цилідричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю.

9. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1) \to 0,\ \overline{v}_2^k = 0,\ \overline{v}_1^2 = \overline{v}_1^3 = 0,\ k = 1, 2, 3$, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – цилідричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – оболонка в стані спокою.

10. Якщо $\overline{v}_1^k = 0,\ m(\mathcal{G}_2^1) \to 0,\ \overline{v}_2^2 = \overline{v}_2^3 = 0,\ k = 1, 2, 3$, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – оболонка в стані спокою, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – цилідричний блин, який літає вздовж осі свого циліндру з довільною швидкістю.

11. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_1^2) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^1), m(\mathcal{G}_2^2) \to 0,\ \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^3 = 0,$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ та $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – два плоских блина, які

знаходяться в паралельних площинах та кожен з них літає в будь-якому напрямку в своїй площині.

12. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_1^2) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^1), m(\mathcal{G}_2^3) \to 0,\ \overline{v}_1^3 = \overline{v}_2^2 = 0,$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ та $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – два плоских блина, які знаходяться в перпендикулярних площинах та кожен з них літає в будь-якому напрямку в своїй площині.

13. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_1^2) \to 0, m(\mathcal{G}_2^k) \to 0,\ \overline{v}_1^3 = 0,\ k = 1, 2, 3$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в своїй площині з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – волокно з довільною швидкістю.

14. Якщо $m(\mathcal{G}_1^k) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^1), m(\mathcal{G}_2^2) \to 0,\ \overline{v}_2^3 = 0,\ k = 1, 2, 3$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – волокно з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в своїй площині з довільною швидкістю.

15. Якщо $m(\mathcal{G}_1^1), m(\mathcal{G}_1^2) \to 0,\ \overline{v}_2^k = 0,\ \overline{v}_1^3 = 0,\ k = 1, 2, 3$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в своїй площині з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – оболонка в стані спокою.

16. Якщо $\overline{v}_1^k = 0,\ m(\mathcal{G}_2^1), m(\mathcal{G}_2^2) \to 0,\ \overline{v}_2^3 = 0,\ k = 1, 2, 3$ або дійсні інші комбінації такого типу, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – оболонка в стані спокою, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – плоский блин, який літає в своїй площині з довільною швидкістю.

17. Якщо $m(\mathcal{G}_1^k) \to 0,\ m(\mathcal{G}_2^k) \to 0,\ k = 1, 2, 3$, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ та $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – два волокна з довільними швидкостями.

18. Якщо $m(\mathcal{G}_1^k) \to 0,\ \overline{v}_2^k = 0,\ k = 1, 2, 3$, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – волокно з довільною швидкістю, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – оболонка в стані спокою.

19. Якщо $\overline{v}_1^k = 0,\ m(\mathcal{G}_2^k) \to 0,\ k = 1, 2, 3$, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ – оболонка в стані спокою, а $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – волокно з довільною швидкістю.

20. Якщо $\overline{v}_1^k = 0,\ \overline{v}_2^k = 0,\ k = 1, 2, 3$, то $\mathcal{G}_1^{\mathbf{x}}$ та $\mathcal{G}_2^{\mathbf{x}}$ – дві оболонки в стані спокою.

Якщо припустити, що у випадках (1)–(19) не тільки окремі компоненти швидкостей дорівнюють нулю, а вся швидкість дорівнює нулю, то можно сказати, що отримані волокна, блини та оболонки знаходяться в стані спокою.

5.3. Висновки до розділу 5

В Розділі 5 побудовано низку нових бімодальних розподілів вигляду (2.9)–(2.13), які є явними наближеними розв'язками рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль (2.2)–(2.4). За міру розбіжності між частинами рівняння обрана норма їх різниці в функціональному просторі L_1. Знайдено низку умов, які є достатніми для довільної малості інтегрального відхилу $\Delta_1(f)$ вигляду (5.1). І хоча знайдені розв'язки задовольняють рівняння Больцмана лише наближено, в сенсі мінімізації зазначеного відхилу, проте мають досить цікавий фізичний зміст.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено дослідження математичної моделі газу з твердих куль у всьому просторі на основі кінетичного рівняння Больцмана. Запропоновано і розвинено новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків цього нелінійного інтегро-диференціального рівняння. Такі розв'язки наближено описують процес взаємодії між максвелівськими течіями газу з твердих куль і мають вигляд бімодальних розподілів, які забезпечують довільну малість того чи іншого відхилу між частинами рівняння Больцмана.

Основними результатами, які отримано в роботі, є наступні положення.

- Знайдено явні наближені розв'язки кінетичного рівняння Больцмана для моделі твердих куль у вигляді двопотокових розподілів, які описують взаємодію двох течій, що прискорюються та ущільнюються, з використанням рівномірно-інтегрального відхилу.

- Досліджено бімодальні розподіли з модами типу "прискорення-ущільнення" з використанням рівномірно-інтегрального відхилу з "однорідною вагою".

- Запропоновано новий тип відхилу між частинами рівняння Больцмана у випадку моделі твердих куль, а саме рівномірно-інтегральний відхил з "неоднорідною вагою", за допомогою якого виділено новий клас явних наближених розв'язків вищезгаданого рівняння. На відміну від розв'язків, отриманих у випадку змішаного відхилу з "однорідною вагою", які описують "згустки" і "циліндри", побудовані бімодальні наближені розв'язки з модами типу "прискорення-ущільнення" у випадку змішаного відхилу з "неоднорідною вагою" описують потоки газу з твердих куль у всьому просторі.

- Встановлено достатні умови довільної малості інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана, а саме знайдені такі нетривіальні умови, що накладаються на коефіцієнтні функції бімодальних розподілів з локальними максвелівськими модами типу "прискорення-ущільнення", які забезпечують мінімізацію зазначеного відхилу.

Результати дисертації носять теоретичний характер і можуть бути використані при подальшому вивченні рівняння Больцмана як для моделі твердих куль, так і для деяких інших моделей, наприклад, моделі шорскуватих куль. Також дисертаційні дослідження можуть використовуватися при вивченні схожих з рівнянням Больцмана кінетичних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акыш А.Ш. О нелинейном уравнении Больцмана / А.Ш. Акыш // Математический журнал (Алматы). – 2002. – Т. 2, № 1. – С. 10–16.
2. Акыш А.Ш. Сходимость метода расщепления для нелинейного уравнения Больцмана / А.Ш. Акыш // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 123–131.
3. Аникин Ю.А. Решение кинетического уравнения для двухатомного газа с использованием дифференциальных сечений рассеяния, рассчитанных методом классических траекторий / Ю.А. Аникин, О.И. Додулад // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 7. – С. 1193–1211.
4. Арсеньев А.А. Задача Коши для линеаризованного уравнения Больцмана / А.А. Арсеньев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 5. – С. 864–882.
5. Берд Г. Молекулярная газовая динамика / Берд Г. – Москва: Мир, 1981. – 319 с.
6. Бобылев А.В. О методах Чепмена – Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана / А.В. Бобылев // ДАН СССР. – 1982. – Т. 262, № 1. – С. 71–75.
7. Бобылев А.В. О некоторых свойствах уравнения Больцмана для максвелловских молекул / Бобылев А.В. – Москва: ИПМ АН СССР, 1975. – 29 с. – (Препринт / АН СССР, ИПМ им. М.В. Келдыша: 1975–51).
8. Бобылев А.В. О структуре общего решения и классификации частных решений нелинейного уравнения Больцмана для

максвелловских молекул / А.В. Бобылев // ДАН СССР. – 1980. – Т. 251, № 6. – С. 1361–1365.

9. Бобылев А.В. О структуре пространственно однородных нормальных решений нелинейного уравнения Больцмана для смеси газов / А.В. Бобылев // ДАН СССР. – 1980. – Т. 250, № 2. – С. 340–343.

10. Бобылев А.В. О точных решениях уравнения Больцмана / А.В. Бобылев // ДАН СССР. – 1975. – Т. 225, № 6. – С. 1296–1299.

11. Бобылев А.В. Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау / Бобылев А.В. – Москва: ИПМ АН СССР, 1987. – 251 с. – (Препринт / АН СССР, ИПМ им. М.В. Келдыша: 1987–322).

12. Боголюбов Н.Н. Микроскопические решения уравнения Больцмана – Энскога в кинетической теории для упругих шаров / Н.Н. Боголюбов // Теоретическая и математическая физика. – 1975. – Т. 24, № 2. – С. 242–247.

13. Больцман Л. Избранные труды / Больцман Л. – Москва: Наука, 1984. – 590 с.

14. Больцман Л. Лекции по теории газов / Больцман Л. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 554 с.

15. Веденяпин В.В. Анизотропные решения нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул / В.В. Веденяпин // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256, № 2. – С. 338–342.

16. Галкин В.А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского / Галкин В.А.– Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 408 с.

17. Галкин В.С. Обобщенный метод Чепмена – Энскога. Часть1: уравнение неравновесной газовой динамики / В.С. Галкин, М.Н. Коган, Н.К. Макашев // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Т. 5, № 5. – С. 66–76.

18. Герасименко В.И. О существовании глобальных решений задачи Коши для уравнений Боголюбова / В.И. Герасименко // ДАН УССР. – 1991. – № 9. – С. 41–45.

19. Гордевский В.Д. Бимодальные приближенные решения нелинейного уравнения Больцмана /В.Д. Гордевский, Н.В. Лемешева // Современные проблемы математики, механики и информатики: международная школа-конференция "Тараповские чтения – 2013", 29 сентября – 4 октября 2013 г.: тезисы докладов. – Харьков, 2013. – С. 92–93.

20. Гордевский В.Д. Взаимодействие винтовых потоков с нестационарными плотностями / В.Д. Гордевский // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2009. – № 875. – С. 48–56.

21. Гордевский В.Д. Винтовые потоки с плотностями, частично зависящими от температур / В.Д. Гордевский // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2009. – № 850. – С. 37–44.

22. Гордевский В.Д. Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер / В.Д. Гордевский // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 161, № 2. – С. 278–286.

23. Гордевский В.Д. Вихри в газе из твердых сфер / В.Д. Гордевский// Теоретическая и математическая физика. – 2003. – Т. 135, № 2. – С. 303–314.

24. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение в газе из твердых сфер с модами типа "ускорение-уплотнение" / В.Д. Гордевский, Н.В. Лемешева // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2014. – № 1133. – С. 114–130.

25. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами/ В.Д. Гордевский // Теоретическая и математическая физика. – 2001. – Т. 126, № 2. – С. 283–300.

26. Гордевський В.Д. Перехідний режим між деякими локально-максвелівськими течіями / В.Д. Гордевський, Н.В. Андріяшева // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 51–57.

27. Гордевський В.Д. Перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення" / В.Д. Гордевський, Н.В. Лемешева// Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2010. – № 931. – С. 49–58.

28. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер / В.Д. Гордевский // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1995. – Т. 2, № 2. – С. 168–176.

29. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана / В.Д. Гордевский // Теоретическая и математическая физика. – 1998. – Т. 114, № 1. – С. 126–136.

30. Гордевський В.Д. Смерчі в газі з пружних куль / В.Д. Гордевський// Доповіді НАН України. – 2006. – № 8. – С. 13–18.

31. Горелов С.Л. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло / С.Л. Горелов, М.Н. Коган // Механика жидкости и газа. – 1968. – № 6. – С. 136–139.

32. Грэд Г. Асимптотическая теория уравнения Больцмана / Грэд Г. // Некоторые вопросы кинетической теории газов. – Москва: Мир, 1965. – С. 7–129.

33. Грэд Г. Кинетическая теория газов / Грэд Г. // Термодинамика газов.– Москва: Машиностроение, 1970. – С. 5–109.

34. Додулад О.И. Расчеты структуры ударной волны в смеси газов на основе решения уравнения Больцмана / О.И. Додулад, Ю.Ю. Клосс, Ф.Г. Черемисин // Физико–химическая кинетика в газовой динамике. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 1–17.

35. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов / Карлеман Т. – Москва: ИЛ, 1960. – 120 с.

36. Коган М.Н. Динамика разреженного газа / Коган М.Н. – Москва: Наука, 1967. – 440 с.

37. Лемешева Н.В. Взаимодействие ускоряющихся и уплотняющихся потоков в газе из твердых сфер / Н.В. Лемешева // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: международная научная конференция для молодых учених, 24–26 апреля 2009 г.: тезисы докладов. – Харьков, 2009. – С. 74–76.

38. Лемешева Н.В. Описание взаимодействия потоков типа "ускорение-уплотнение" в пространстве с весом / Н.В. Лемешева // Тринадцята

міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 13–15 травня 2010 г.: тези доповідей. – Київ, 2010. – С. 169.

39. Лемешева Н.В. Переходный режим между потоками типа "ускорение-уплотнение" / Н.В. Лемешева // Современные проблемы науки и образования: 9-я международная междисциплинарная научно-практическая школа-конференция, 30 апреля – 10 мая 2009 г.: тезисы докладов. – Алушта, 2009. – С. 91–92.

40. Лемешева Н.В. Приближенные решения уравнения Больцмана в пространстве с неоднородным весом / Н.В. Лемешева // Пятнадцатая международная научная конференция имени академика Михаила Кравчука, 15–17 мая 2014 г.: тезисы докладов.– Киев, 2014. – С. 192–193.

41. Малахов С.Г. Исследование динамики неравновесного испарения в вакуум / Малахов С.Г. – Москва: Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2007. – 22 с. – (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша: 2007–5).

42. Маслова Н.Б. О решениях нестационарного уравнения Больцмана/ Н.Б. Маслова, Р.П. Чубенко // Вестник ЛГУ. – 1973. – № 19. – С. 100–105.

43. Маслова Н.Б. Предельные свойства решений уравнения Больцмана/ Н.Б. Маслова, Р.П. Чубенко // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 4. – С. 800–803.

44. Мищенко А.В. О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана / А.В. Мищенко, Д.Я. Петрина // Теоретическая и математическая физика. – 1988. – Т. 77, № 1. – С. 135–153.

45. Моисеев-Ольховский И.И. Об одной плоской линейной задаче обобщенной гидродинамики / И.И. Моисеев-Ольховский // ДАН СССР. – 1958. – Т. 118, № 3. – С. 468–471.

46. Неравновесные явления: уравнение Больцмана / [О.Э. Ланфорд, У. Гринберг, Я. Полевчак и др.]: под ред. Дж. Л. Либовица. – Москва: Мир, 1986. – 269 с.

47. Никольский А.А. Простейшие точные решения уравнения Больцмана для движений разреженного газа / А.А. Никольский // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151, № 2. – С. 299–302.

48. Петрина Д.Я. О точных решениях одного класса уравнений Больцмана / Д.Я. Петрина, А.В. Мищенко // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298, № 2. – С. 338–342.

49. Повзнер А.Я. Об уравнении Больцмана кинетической теории газов/ А.Я. Повзнер // Математический сборник. – 1962. – Т. 58(100), № 1. – С. 65–86.

50. Сирович Л. Формальные и асимптотические решения в кинетической теории / Сирович Л. // Некоторые вопросы кинетической теории газов. – Москва: Мир, 1965. – С. 156–186.

51. Струминский В.В. О методе Гильберта решения кинетического уравнения Больцмана / В.В. Струминский // ДАН СССР. – 1964.– Т. 158, № 1. – С. 70–73.

52. Тамм И.Е. О ширине ударных волн большой интенсивности / И.Е. Тамм // Труды Физического института им. П.Н. Лебедева АН СССР. – 1965. – Т. 29. – С. 239–249.

53. Трушечкин А.С. О строгом определении микроскопических решений уравнения Больцмана – Энскога / А.С. Трушечкин // Вестник

Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – № 1(30). – С. 270–278.

54. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана / О.Г. Фридлендер // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, № 5. – С. 973–977.

55. Чепмен С. Математическая теория неоднородных газов / Чепмен С., Каулинг Т. – Москва: ИЛ, 1960. – 510 с.

56. Черемисин Ф.Г. Численное решение кинетического уравнения Больцмана для одномерных стационарных течений газа / Ф.Г. Черемисин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 3. – С. 654–665.

57. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов / Черчиньяни К. – Москва: Мир, 1973. – 245 с.

58. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / Черчиньяни К. – Москва: Мир, 1978. – 495 с.

59. Arkeryd L. On the Boltzmann equation. Part I: Existence / L. Arkeryd// Arch. Ration. Mech. Anal. – 1972. – Vol. 45, N 1. – P. 1–16.

60. Arkeryd L. On the Boltzmann equation. Part II: The full initial value problem / L. Arkeryd // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1972. – Vol. 45, N 1. – P. 17–34.

61. Arkeryd L. The Boltzmann Equation for Weakly Inhomogeneous Data/ L. Arkeryd, R. Esposito, M. Pulvirenti // Commun. Math. Phys. – 1987. – Vol. 111, N 3. – P. 393–407.

62. Bellomo N. On the Asymptotic Equivalence between the Enskog and the Boltzmann Equations / N. Bellomo, M. Lachowicz // J. Statist. Phys. – 1988. – Vol. 51, N 1. – P. 233–247.

63. Benedetto D. A short review on the derivation of the nonlinear quantum Boltzmann equations / D. Benedetto, F. Castella, R. Esposito, M. Pulvirenti // Commun. Math. Sci. – 2007. – Vol. 5. – P. 55–71.

64. Bhatnagar P.L. A Model of Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems/ P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook // Phys. Rev. – 1954. – Vol. 94, N 3. – P. 511–525.

65. Bobylev A.V. Exact Eternal Solutions of the Boltzmann equation / A.V. Bobylev, C. Cercignani // J. Statist. Phys. – 2002. – Vol. 106, N 5-6. – P. 1019–1038.

66. Bobylev A.V. Proof of an Asymptotic Property of Self-Similar Solutions of the Boltzmann Equation for Granular Materials / A.V. Bobylev, C. Cercignani, G. Toscani // J. Statist. Phys. – 2003. – Vol. 111, N 1-2.– P. 413–417.

67. Bobylev A.V. Self-Similar Solutions of the Boltzmann Equation and Their Applications / A.V. Bobylev, C. Cercignani // J. Statist. Phys. – 2002. – Vol. 106, N 5-6. – P. 1039–1071.

68. Boltzmann L. Weitere Studien uber das Warmegleichgrewicht unter Gasmoleculen / Boltzmann L. // Wien: Akad. Sitzungsber. — 1872. – Bd. 66. — S. 275—370.

69. Borovchenkova M.S. On the non-Markovian Enskog Equation for Granular Gases / M.S. Borovchenkova, V.I. Gerasimenko // J. Phys. A, Math. Theor. – 2014. – Vol. 47, N 3. – P035001.

70. Cannone M. The Inverse Conjecture for the Revised Enskog Equation/ M. Cannone, C. Cercignani // J. Statist. Phys. – 1991. – Vol. 63, N 1-2. – P. 363–387.

71. Carleman T. On the theory of the integro-differential Boltzmann equation / T. Carleman // Acta Math. – 1933. – Vol. 60. – P. 91–146.

72. Cercignani C. On the H-Theorem for Polyatomic Gases / C. Cercignani, M. Lampis // J. Statist. Phys. – 1981. – Vol. 26, N 5-6. – P. 795–812.

73. Cercignani C. The Grad limit for a system of soft spheres / C. Cercignani // Commun. Pure Appl. Math. – 1983. – Vol. 36. – P. 479–494.

74. Deshpande S.M. The Boltzmann collision integrals for a combination of Maxwellians / S.M. Deshpande, R. Narasimha // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 36, N 3. – P. 545–554.

75. Di Perna R.J. On the Caushy Problem for Boltzmann Equation: Global Existence and Weak Stability / R.J. Di Perna, P.L. Lions // Ann. Math.– 1989. – Vol. 130, N 2. – P. 321–366.

76. Erd'os L. On quantum Boltzmann equation / L. Erd'os, M. Salmhofer, Yau H.–T. // J. Statist. Phys. – 2004. – Vol. 116 – P. 367–380.

77. Ernst M.H. Nonlinear Model-Boltzmann Equations and Exact Solutions / M.H. Ernst // Phys. Rep. – 1981. – Vol. 78, N 1. – P. 1–169.

78. Gapyak I.V. On Rigorous Derivation of the Enskog Kinetic Equation / I.V. Gapyak, V.I. Gerasimenko// Kinet. Relat. Mod. – 2012. – Vol. 5, N 3. – P. 459–484.

79. Garcia R.D.M. The Viscous-Slip, Diffusion-Slip, and Thermal-Creep Problems for a Binary Mixture of Rigid Spheres Described by the Linearized Boltzmann Equation / R.D.M. Garcia, C.E. Siewert // European Journal of Mechanics B/Fluids. – 2007. – Vol. 26. – P. 749–778.

80. Gerasimenko V.I. A description of the evolution of quantum states by means of the kinetic equation / V.I. Gerasimenko, Jh.A. Tsvir // J. Phys. A, Math. Theor. – 2010. – Vol. 43, N 48. – P485203.

81. Gerasimenko V.I. Approaches to derivation of quantum kinetic equations / V.I. Gerasimenko // Ukr. J. Phys. – 2009. – Vol. 54, N 8-9. – P. 834–846.

82. Gerasimenko V.I. Evolution of correlations of quantum many-particle systems / V.I. Gerasimenko, V.O. Shtyk // J. Stat. Mech. – 2008. – Vol. 3. – P03007.

83. Gerasimenko V.I. Generalized quantum kinetic equation for interacting particles with quantum statistics / V.I. Gerasimenko, Zh.A. Tsvir // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т. 7. – С. 351–367.

84. Gerasimenko V.I. Hard sphere dynamics and the Enskog equation / V.I. Gerasimenko, I.V. Gapyak // Kinet. Relat. Mod. – 2012. – Vol. 5, N 3. – P. 459–484.

85. Gerasimenko V.I. The generalized kinetic equation generated by the BBGKY hierarchy / V.I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina // Ukr. J. Phys.– 1998. – Vol. 43, N 6-7. – P. 697–702.

86. Gordevskyy V.D. Interaction between "Accelerating-Packing" Flows in a Low-Temperature Gas / V.D. Gordevskyy, N.V. Andriyasheva // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – Vol. 5, N 1. – P. 38–53.

87. Gordevskyy V. Interaction between the two "accelerating-packing" flows in a gas of hard spheres / V. Gordevskyy, N. Lemesheva // Analysis and mathematical physics: II international conference, June 16–20, 2014: book of abstracts. – Kharkiv, 2014. – P. 32.

88. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians / V.D. Gordevskyy // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – Vol. 27, N 2. – P. 231–247.

89. Gordevskyy V.D. Rotating Flows with Acceleration and Compacting in the Model of Hard Spheres / V.D. Gordevskyy // Theoretical and Mathematical Physics. – 2009. – Vol. 161, N 2. – P. 1558–1566.

90. Gordevskyy V.D. Some local approximate solutions of the Boltzmann equation / V.D. Gordevskyy, N.V. Andrijasheva // International conference on the occasion of the 150-th birthday of Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 24–30 June 2007: book of abstracts. – Kharkiv, 2007. – P. 53.

91. Gordevsky V.D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation / V.D. Gordevsky // Math. Meth. Appl. Sci. – 1998. – Vol. 21. – P. 1479–1494.

92. Gordevsky V.D. Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas / V.D. Gordevsky // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2001. – № 514. – С. 17–33.

93. Gordevskyy V.D. Transitional Regime Between Vortical States of a Gas/ V.D. Gordevskyy // Nonlinear Anal.-Theor. Meth. App. – 2003. – Vol. 53, N 3-4. – P. 481–494.

94. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases / H. Grad // Commun. Pure Appl. Math. – 1949. – Vol. 2, N 4. – P. 331–407.

95. Grad H. Principles of the Kinetic Theory of Gases / H. Grad // Handbuch der Physik. – 1958. – Vol. 12. – P. 205–294.

96. Grunbaum F.A. Linearization for the Boltzmann Equation / F.A. Grunbaum // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 165. – P. 425–449.

97. Hauge E.H. The Bobylev Approach to the Nonlinear Boltzmann Equation / E.H. Hauge, E. Praestgaard // J. Statist. Phys. – 1981. – Vol. 24. – P. 21–32.

98. Hauge E.H. The Krook - Wu conjecture and the Tion phenomenon / E.H. Hauge // Physics Letters A. – 1979. – Vol. 74, N 3-4 – P. 183–184.

99. Hosokawa I. Nonexistence of Any Exact Bimodal Solution for the Shock Wave Structure at M=infinity / I. Hosokawa, K. Yamamoto // J. Phys. Soc. Jpn. – 1988. – Vol. 57, N 6. – P. 1865–1867.

100. Krook M. Exact Solutions of the Boltzmann Equation / M. Krook, T.T. Wu // Phys. Fluids. – 1977. – Vol. 20. – P. 1589–1595.

101. Krook M. Exact Solutions of Boltzmann Equations for Multicomponent Systems / M. Krook, T.T. Wu // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 38, N 18. – P. 991–993.

102. Krook M. Formation of Maxwellian Tails / M. Krook, T.T. Wu // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 36, N 19. – P. 1107–1109.

103. Lebovitz J.L. Kinetic-Equation Approach to Time-Dependent Correlation Functions / J.L. Lebovitz, J.K. Percus, J. Sykes // Phys. Rev. X. – 1969. – Vol. 188, N 1. – P. 487–504.

104. Lemesheva N. Bimodal approximate solutions of the Boltzmann equation in the weighted spaces / N. Lemesheva // Analysis and mathematical physics: international conference, 24–28 June 2013: book of abstracts. – Kharkiv, 2013. – P. 29–30.

105. Lemesheva N.V. Bimodal Distributions in the Space of a Non-Uniform Weight / N.V. Lemesheva // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2015. – Vol. 11, N 3. – P. 267–278.

106. Lions P.L. On Boltzmann equation and its applications / P.L. Lions // Recent advances in Partial Diff. Eqs., Venice 1996, Proc. Sympos. Appl. Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 1998. – P. 211–236.

107. Maxwell J.C. On the final state of a system of molecules in motion subject to forces of any kind / J.C. Maxwell // Nature. – 1873. – Vol. 8. – P. 537–553.

108. Maxwell J.C. The kinetic theory of gases / J.C. Maxwell // Nature. – 1877. – Vol. 16. – P. 242–246.

109. Mott-Smith H.M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave / H.M. Mott-Smith // Phys. Rev. X. – 1951. – Vol. 82, N 6. – P. 885–892.

110. Narasimha R. Minimum error solution of the Boltzmann equation for shock structure / R. Narasimha, S.M. Deshpande // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 36, N 3. – P. 555–570.

111. Ohwada T. Structure of normal shock waves – Direct numerical analysis of the Boltzmann equation for hard–sphere molecules / T. Ohwada // Phys. Fluids. – 1993. – Vol. 5, N 1. – P. 217–234.

112. Petrina D.Ya. Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. I / D.Ya. Petrina, K.D. Petrina // Укр. мат. жур. – 1998. – Т. 50, N 2. – С. 195–210.

113. Petrina D.Ya. Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. II / D.Ya. Petrina, K.D. Petrina // Укр. мат. жур. – 1998. – Т. 50, N 3. – С. 372–387.

114. Petrina D.Ya. Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. III / D.Ya. Petrina, K.D. Petrina // Укр. мат. жур. – 1998. – Т. 50, N 4. – С. 552–569.

115. Sakurai A. A note on Mott-Smith's solution of the Boltzmann equation for a shock wave / A. Sakurai // J. Fluid Mech. – 1957. – Vol. 3, N 3. – P. 255–260.

116. Takata S. The velocity distribution function in an infinitely strong shock wave / S. Takata, K. Aoki, C. Cercignani // Phys. Fluids. – 2000. – Vol. 12. – P. 2116–2127.

117. Ukai S. The Euler Limit and Initial Layer of the nonlinear Boltzmann Equation/ S. Ukai, K. Asano // Hokkaido Math. J. – 1983. – Vol. 12, N 3. – P. 311–332.