Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
Физико-технический институт низких температур
имени Б. И. Веркина НАН Украины

На правах рукописи

Марченко Виталий Анатольевич

УДК 517.9

О спектральных базисных свойствах операторов эволюционных уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Скляр Григорий Михайлович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Харьков – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\dot{x}(t)$ – производная функции $x(t)$ по переменной t;

$\rho(A)$ – резольвентное множество оператора A;

$i\mathbb{R}$ – мнимая ось;

∇f – градиент функции f;

$\sigma(A)$ – спектр оператора A;

$\sigma_p(A)$ – точечный спектр оператора A;

X^* – сопряженное пространство к пространству X;

$\langle f, x\rangle$ – действие функционала $f \in X^*$ на элемент $x \in X$;

A^* – сопряженный оператор к оператору A;

$\overline{M}$ – замыкание множества M;

$\Re\lambda$ – действительная часть комплексного числа λ;

$\Im\lambda$ – мнимая часть комплексного числа λ;

C_n^k – биномиальный коэффициент;

$(\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ – формальный ряд;

δ_n^j – символ Кронекера;

$\det A$ – детерминант матрицы A;

$\ker S$ – ядро оператора S;

ImS – образ оператора S;

$\dim L$ – размерность линейного многообразия L;

$[X]$ – пространство линейных ограниченных операторов над X;

$\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел;

Π – множество всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$;

Γ – гамма-функция Эйлера;

ℓ_Φ – пространство последовательностей Орлича;

$LinM$ – линейная оболочка множества M.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Задачи Коши для абстрактных дифференциальных (эволюционных) уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

в пространствах Банаха описывают эволюционные процессы различной природы, возникающие в задачах теоретической и математической физики, теоретической и квантовой механики, биологии и других наук, см., к примеру, [27, 53, 66, 69, 96, 120, 122–130, 132, 137, 150, 152, 156–158]. Прежде всего, при исследовании уравнений (0.1) нас интересуют вопросы существования, единственности и поведения решений. Одним из эффективных и современных путей изучения этих вопросов является применение методов теории C_0-полугрупп линейных ограниченных операторов.

Оператор A генерирует C_0-полугруппу в банаховом пространстве X тогда и только тогда, когда задача (0.1) корректна (см. определение 1.4) и $\rho(A) \neq \emptyset$ [42, 117]. В частности, эти условия выполняются для системы дифференциальных уравнений электродинамики Максвелла в микроскопической форме [137], систем с запаздыванием [53, 122–129, 145, 146], регулярных систем Штурма-Лиувилля [59], для систем, описывающих процессы теплопроводности, диффузии, а также волновые процессы различной природы [27, 42, 53, 66, 68, 69, 96, 100, 120, 137, 139, 150, 152, 155, 156].

Порождение оператором A C_0-группы означает, дополнительно, что задача (0.1) корректна также и при $t \leq 0$. Этот феномен характеризует обратимые динамические процессы и наблюдается, например, в системах с запаздыванием (чисто) нейтрального типа [122–129, 145, 146] и волновых (колебательных) системах [27, 42, 53, 68, 69, 96, 120, 137, 139, 150, 152].

Отметим, что теория C_0-полугрупп имеет также самостоятельный интерес и разнообразные её аспекты активно изучаются в последнее время [1, 2,30,34,42,43,46,48,53,63–66,72,73,88–91,95,107,117,137,138,147,155,158].

Среди всего многообразия операторов A, соответствующих эволюционным уравнениям (0.1), операторы с точечным спектром занимают важное место. Наиболее исследованным является случай задачи (0.1) с оператором A, обладающим точечным спектром, в гильбертовом пространстве H [27,30,53,69,96,100,117,122–129,132,139,145–147,150,152,155,156, 158]. В этой ситуации важную роль играют понятия базиса Рисса и базиса Рисса из подпространств (см. определения 1.7, 1.8). Известно, что если A имеет простые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, а его собственные векторы $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис Рисса, то $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}}$, сам оператор A и его резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ представляются в виде ряда по $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, справедлив спектральный критерий порождения оператором C_0-полугруппы $\left(\sup\limits_n \Re(\lambda_n) < \infty\right)$ и доказано, что сама полугруппа $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ представляется в виде ряда по $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, а для логарифмического показателя ω_0 роста полугруппы установлено равенство: $\omega_0 = \sup\limits_n \Re(\lambda_n)$, см. монографию [53].

В более общей ситуации, если все фазовое пространство H распадается в прямую сумму A-инвариантных подпространств, которые в своей совокупности образуют базис Рисса H, то нам удобно судить о поведении траектории системы (0.1) во всем фазовом пространстве H по поведению проекций траектории в каждом из этих A-инвариантных подпространств, поскольку ряд из норм проекций суммируем с квадратом. Иными словами, в этой ситуации бесконечномерная система (0.1) распадается на счетное число подсистем, и возможно, предварительно изучив эти подсистемы независимо, делать выводы о свойствах всей системы в целом. Данный подход имеет важное применение в теории линейных управляемых систем при исследовании свойств устойчивости [27, 53, 59, 69, 126, 127, 150, 152, 156, 157], управляемости [96, 100, 123, 125, 128, 129, 145, 157], стабилизируемости [96, 124, 126, 127, 132, 157], наблюдаемости [96, 123, 125], а также реализуемости системы по заданным спектральным данным [145, 146]. Таким образом, сочетание методов спектрального анализа оператора A правой части системы (0.1) с техникой базисов Рисса и спектральных разложений оператора A по собственным векторам (A-инвариантным подпространствам) представляет собой мощный инструментарий анализа разнообразных свойств эволюционных уравнений вида (0.1) в гильбертовых пространствах [27, 53, 122–129, 156, 158].

Отправной точкой исследований, представленных в диссертации, является следующий результат (Г. К. Ксу, С. П. Юнг [155], 2005, Х. Зварт [158], 2010). Если оператор A эволюционного уравнения (0.1) генерирует C_0-группу в гильбертовом пространстве H, спектральные проекции оператора A образуют полную систему в H, а собственные числа A удовлетворяют некоторым условиям отделимости, то в H существует базис Рисса из A-инвариантных подпространств. При этом ряд вопросов остаются неисследоваными. А именно, что происходит в случае, когда собственные числа A не удовлетворяют этим условиям отделимости? В частности, может ли быть корректной задача Коши для линейного эволюционного уравнения вида (0.1) на оси $t \in \mathbb{R}$ в случае, который до сих пор не рассматривался – когда оператор A имеет собственные числа $\lambda_n = i\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$, где последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ неограничена, монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| = 0,$ и полное семейство собственных векторов, не образующее базис Шаудера?

В работе вводятся специальные классы гильбертовых $(H_k(\{e_n\}),\ k \in \mathbb{N})$ и банаховых $(\ell_{p,k}(\{e_n\}),\ p \geq 1,\ k \in \mathbb{N})$ пространств, и представлена конструкция класса генераторов A_k C_0-групп в этих пространствах со следующими свойствами: собственные числа A_k удовлетворяют условиям из предудущего абзаца, а собственные векторы образуют полную систему, но не образуют базис Шаудера. Тем самым доказана корректность соответствующих эволюционных уравнений (0.1). Вместе с тем установлено, что корректность уравнения в этом случае существенным образом зависит от характера поведения спектра A на бесконечности и найдены условия на спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, при выполнении которых задача Коши не является корректной в пространствах $H_1(\{e_n\})$ и $\ell_{p,1}(\{e_n\})$.

Понятие разложения Шаудера (базиса из подпространств) обобщает понятие базиса Шаудера и является важным объектом бесконечномерного анализа. Изучению различных свойств разложений Шаудера, а также их применению в различных исследованиях, посвящено большое количество работ, см., к примеру, [4–12, 16, 17, 21, 27, 32, 33, 37, 38, 47, 49, 52, 53, 56–58, 81–87, 92, 93, 96, 100, 102–104, 108, 122–129, 131–136, 139–141, 155, 156, 158].

Среди различных свойств разложений Шаудера интерес представляет свойство устойчивости, в связи с приложениями в теории возмущений линейных операторов, а также к спектральным методам исследования эволюционных уравнений (0.1). Данная тематика в той или иной мере затронута в работах [4–7, 9, 10, 17, 21, 30, 35–37, 50, 51, 60–62, 79, 81, 92, 93, 108, 116, 122–129, 133, 140, 141, 145–147]. Так, в 1967 году Т. Като доказал важную теорему о подобии последовательностей проекторов [92, 93] в пространствах Гильберта, которая служит фундаментом ряда исследований, см., например, [35,36,51,79,92,116]. Эти исследования посвящены получению достаточных условий существования базиса Рисса из A-инвариантных подпространств для различных классов операторов, в том числе дифференциальных операторов.

В банаховых пространствах, насколько нам известно, методы, подобные тем, которые связаны с базисами Рисса, развиты слабо. Поэтому актуальной является задача попытаться распространить аналогичные подходы на случай эволюционных уравнений (0.1) в некоторых классах банаховых пространств, учитывая геометрию самого пространства. В диссертации исследуются различные свойства разложений Шаудера и рассматривается задача распространения теоремы Т. Като на случай банаховых пространств.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и управления Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина в рамках государственной научно-исследовательской работы по теме «Аналитические методы решения качественных проблем теории управления и теории функционально-дифференциальных уравнений» (№ государственной регистрации 0111U010364), и в отделе теории функций Физико-технического института низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины, в рамках тематического плана «Новые методы теории функций и их приложения в спектральной теории, характеризационных задачах математической статистики, теории управления и эргодической теории» (№ государственной регистрации 0113U001130), а также при поддержке гранта НАН Украины для молодых ученых, проект «Линейные эволюционные уравнения в гильбертовом пространстве и уравнение Больцмана» (№ государственной регистрации 0115U003845).

Цель и задачи исследования. *Цель* диссертационной работы – исследование корректности и устойчивости линейных эволюционных уравнений (0.1) в банаховых пространствах в зависимости от спектральных и базисных свойств соответствующих операторов A, а также связанное с этим исследование свойств разложений Шаудера.

Основными *объектами исследований* являются линейные эволюционные уравнения и связанные с ними C_0-полугруппы линейных ограниченных операторов, инфинитезимальные генераторы C_0-полугрупп, собственные числа и собственные векторы операторов, разложения и базисы Шаудера, а также соответствующие разложениям проекторы.

Предметом исследований является связь корректности и устойчивости линейных эволюционных уравнений вида (0.1) со спектральными и базисными свойствами соответствующих операторов A, свойства разложений Шаудера и их применение к вопросам корректности и устойчивости уравнений (0.1) в некоторых банаховых пространствах.

Задачами исследований являются:

1) Построение класса операторов в гильбертовых пространствах, для которых задача Коши (0.1) будет корректна и которые удовлетворят следующим условиям: их собственные числа имеют вид $\lambda_n = i\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$, где последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ неограничена, монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| = 0$, а соответствующие собственные векторы образуют полную систему, но не образуют базис Шаудера. Изучение связи корректности уравнения с характером поведения спектра оператора на бесконечности. Изучение вопроса об асимптотическом поведении решений соответствующих корректных эволюционных уравнений (0.1).

2) Распространение результатов пункта 1 на операторы в некоторых банаховых пространствах.

3) Отыскание класса банаховых пространств и операторов в них со свойствами, подобными свойствам спектральных по Риссу операторов в гильбертовых пространствах. Установление корректности задач Коши (0.1) для таких операторов.

4) Установление свойств безусловных разложений Шаудера в банаховых пространствах с определенными геометрическими характеристиками. Исследование устойчивости базисов и разложений Шаудера в банаховых пространствах, распространение теоремы Т. Като на случай банаховых пространств. Применение полученных результатов к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений (0.1) в пространствах $\ell_p,\ 1 \le p < \infty,\ c_0$, и в гильбертовых пространствах.

Методы исследований включают в себя методы теории абстрактных дифференциальных уравнений и C_0-полугрупп, методы теории линейных операторов, теории разложений Шаудера, теории банаховых пространств, исчисление конечных разностей, дискретное неравенство Харди.

Научная новизна полученных результатов. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Введены и изучены классы гильбертовых пространств $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, и предложена конструкция класса операторов A_k в $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, которые порождают C_0-группу и обладают следующими свойствами: A_k имеет собственные числа $\lambda_n = i\mu_n, \ n \in \mathbb{N}$, где последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| = 0$, а соответствующие им собственные векторы образуют полную систему, но не образуют базис Шаудера. Конструкция существенно основывается на применении дискретного неравенства Харди. Получены условия корректности задач Коши в пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, и условия некорректности в $H_1(\{e_n\})$ для эволюционных уравнений (0.1) в терминах характера поведения спектра соответствующего оператора на бесконечности. Получен явный вид решений соответствующих корректных эволюционных уравнений и исследовано их асимптотическое поведение.

2. Введены и изучены классы банаховых пространств $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, для которых, в случае $p > 1$, получены результаты, аналогичные указанным в пункте 1.

3. Введено понятие симметрически-спектрального оператора, обобщающее понятие спектрального по Риссу оператора в гильбертовом пространстве, и исследованы его свойства в пространствах $\ell_p \ (1 \leq p < \infty)$ и c_0. Установлены условия корректности и некорректности задач Коши (0.1) с операторами из введенного класса в этих пространствах.

4. Получено развитие теоремы Т. Като на случай разложений Шаудера в пространствах Гильберта, пространствах последовательностей Орлича и в банаховых пространствах с разложениями Шаудера, которые обладают обобщенным свойством ортогональности (в работе они названы

ны разложениями Шаудера-Орлича). Установлены свойства безусловных разложений Шаудера в зависимости от геометрических характеристик банахова пространства. Получены результаты об устойчивости безусловных разложений Шаудера, безусловных и симметричных базисов в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, c_0, и в пространствах Гильберта. Результаты применены к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений (0.1) в этих пространствах.

Практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезными для дальнейшего развития спектральных методов исследования абстрактных дифференциальных уравнений, спектральной теории C_0-полугрупп, теории разложений и базисов Шаудера, геометрии пространств Банаха, а также в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. Возможными приложениями полученных результатов могут служить исследования устойчивости, стабилизации, управляемости и наблюдаемости линейных бесконечномерных систем в некоторых банаховых пространствах.

Личный вклад соискателя. Идея конструкции генератора C_0-группы с небазисным семейством собственных векторов [29], основанная на применении дискретного неравенства Харди, принадлежит научному руководителю. Автору принадлежит развитие этой конструкции на случай различных семейств операторов в пространствах Гильберта и некоторых пространствах Банаха. Все остальные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. IV Научная конференция для студентов и аспирантов «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 14-15 мая 2010г.;

2. Международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», посвященной 50-летию механико-математического факультета, Харьков, 17-22 апреля 2011г.;
3. IX Международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 25-26 апреля 2014г.;
4. II Международная конференция «Analysis and Mathematical Physics», Харьков, 16-20 июня 2014г.;
5. Научный семинар кафедры дифференциальных уравнений и управления ММФ ХНУ им. В. Н. Каразина (руководитель – д. ф.-м. н., проф. В. И. Коробов), Харьков, сентябрь 2014г.;
6. X Международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 24-25 апреля 2015г.;
7. Международная конференция молодых математиков, Киев, 3-6 июня 2015г.;
8. III Международная конференция «Analysis and Mathematical Physics», Харьков, 15-19 июня 2015г.;
9. Международная конференция «Dynamical Systems and Their Applications», Киев, 22-26 июня 2015г.;
10. Международная математическая конференция имени В. Я. Скоробогатько, Дрогобыч, 25-28 августа 2015г.;
11. Научный семинар отдела дифференциальных уравнений и геометрии ФТИНТ НАН Украины (руководитель – академик НАН Украины, д. ф.-м. н., проф. Е. Я. Хруслов), Харьков, сентябрь 2015г.;

12. Научный семинар по анализу кафедры фундаментальной математики ХНУ им. В. Н. Каразина, Харьков, октябрь 2015г.

Публикации. Основные результаты диссертации полностью опубликованы в 15 научных публикациях, в том числе в 5 статьях [22, 29, 109, 112, 113], в тезисах выступлений на 9 конференциях [23–26, 110, 111, 114, 142, 143], а также в одном препринте [144].

Структура диссертации. Диссертация состоит из титульной страницы, содержания, перечня условных обозначений, введения, четырех разделов, заключения и списка использованных источников, который содержит 158 наименований и занимает 18 страниц. Общий объем диссертации составляет 163 страницы. Основной текст диссертации занимает 141 страницу. Основные результаты, вынесенные на защиту, изложены в разделах 2, 3 и 4.

Автор искренне благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Скляру Григорию Михайловичу за постановку интересных задач, ценные советы, внимание и поддержку. Автор также признателен кандидатам физико-математических наук, доцентам Игнатович Светлане Юрьевне и Бархаеву Павлу Юрьевичу за внимание к тексту работы и полезные замечания.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ, ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе будет дан краткий обзор литературы по теме диссертации, приведены основные для работы понятия и определения, обоснован выбор направлений исследований, представленных в работе, сформулирована постановка задач и дан краткий обзор основных результатов.

1.1. Теория C_0-полугрупп, абстрактные дифференциальные уравнения и асимптотика их решений

В 1924 году Ж. Адамар впервые строго сформулировал философский принцип о том, что автономная детерминированная система описывается однопараметрической полугруппой преобразований [66, 74]. Важным для диссертации классом однопараметрических полугрупп являются C_0-полугруппы линейных ограниченных операторов. Первые результаты в теории C_0-полугрупп были получены М. Стоуном [13] в 30-х годах прошлого века, среди которых и результаты работы [149]. Эта теория получила дальнейшее существенное развитие в середине XX века благодаря работам Э. Хилле, Р. Филлипса, К. Иосиды, В. Феллера, Т. Като, И. Миядера. Теория C_0-полугрупп эффективно применяется не только в исследованиях, относящихся к теории уравнений в частных производных и теории случайных процессов, но и при изучении интегро-дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений, в квантовой механике и бесконечномерной теории управления [53, 66, 92, 120, 157].

Следующие определения и общеизвестные факты можно найти во многих монографиях по абстрактным дифференциальным уравнениям и теории операторов, к примеру, в [13, 66, 92, 117, 120].

Определение 1.1. [117] Однопараметрическое семейство $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X, называется C_0-полугруппой (сильно непрерывной полугруппой), если выполнены следующие условия:

1. $T(t)T(s) = T(t+s), \quad$ для любых $t, s \geq 0$;
2. $T(0) = I, \quad$ где I – единичный оператор в X;
3. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0, \quad$ для всех $x \in X$.

Определение 1.2. [117] Инфинитезимальным оператором, или генератором, C_0-полугруппы называется линейный оператор $A : X \supset D(A) \mapsto X$, с областью определения

$$D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \right\},$$

действующий по правилу

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A).$$

Генератор C_0-полугруппы является замкнутым и плотно определенным оператором.

Если существует расширение C_0-полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ до C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ (т.е. когда свойство 1 справедливо для любых $t, s \in \mathbb{R}$), то такое расширение единственно. Более того, в этом случае семейство $\{S(t) = T(-t)\}_{t\geq 0}$ также является C_0-полугруппой с генератором $-A$, причем $D(-A) = D(A)$. В таком случае мы будем называть оператор A генератором C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и говорить, что A генерирует (порождает) C_0-группу $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Определение 1.3. [117] Под классическим (сильным) решением задачи (0.1) понимают функцию $x \in C^1([0,\infty), X)$, такую, что для всякого $t \geq 0$ выполнено $x(t) \in D(A)$, и удовлетворяющую (0.1). Под слабым (обобщенным) решением задачи (0.1) понимают такую функцию

$x \in C([0,\infty), X)$, для которой существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, такая что для всякого $n \in \mathbb{N}$ задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_n, \end{cases}$$

имеет классическое решение $x(t, x_n)$, которое сходится к $x(t, x_0)$ локально равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Определение 1.4. [117] Скажем, что задача Коши (0.1) корректна (по ван Неервену [117]), если для всякого $x_0 \in D(A)$ существует единственное классическое решение $x(\cdot) = x(\cdot, x_0)$ задачи (0.1). Аналогичным образом понимается корректность задачи (0.1) на всей оси $t \in \mathbb{R}$.

Непосредственная связь C_0-полугрупп с абстрактными дифференциальными уравнениями дается следующей теоремой.

Теорема 1.1. [117] Пусть A – линейный оператор в X с областью определения $D(A)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- A является генератором C_0-полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$;
- Задача (0.1) является корректной и $\rho(A) \neq \emptyset$;
- Задача (0.1) является корректной, A – плотно определен, и для всякой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$, такой что $x_n \to x^* \in D(A)$, $n \to \infty$, соответствующие классические решения $x(\cdot, x_n)$ сходятся к $x(\cdot, x^*)$ локально равномерно на $[0, \infty)$.

Если A является генератором C_0-полугруппы, то классическое и слабое решения задаются одной и той же формулой, $x(\cdot, x_0) = T(\cdot)x_0$. При этом, если $x_0 \in D(A)$, то оно является классическим, а если $x_0 \in X$, то оно является слабым [117].

Разнообразым свойствам C_0-полугрупп, а также их многочисленным приложениям, посвящены монографии [13, 42, 53, 65, 66, 73, 88–92, 96, 117, 120, 137, 157].

Важным для приложений направлением исследований является теория устойчивости эволюционных уравнений (соответствующих C_0-полугрупп).

Определение 1.5. [66] C_0-полугруппа $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ в банаховом пространстве X называется асимптотически устойчивой (или сильно устойчивой), если $\lim\limits_{t\to\infty}\|T(t)x\| = 0$ для всякого $x \in X$.

В случае, когда оператор A генерирует асимптотически устойчивую C_0-полугруппу в X, соответствующая уравнение (0.1) называется асимптотически устойчивым в X. Первый результат об асимптотической устойчивости для абстрактных дифференциальных уравнений вида (0.1) в банаховом пространстве был получен в 1982 году Г. М. Скляром и В. Я. Ширманом в работе [31]. Результат был получен в предположении, что A – линейный ограниченный оператор в X:

Теорема 1.2. [31, 41, 105] Пусть $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ – ограниченная C_0-полугруппа с генератором A в банаховом пространстве X. Если $\sigma_p(A^*) \cap \; i\mathbb{R} = \emptyset$ и $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ – не более, чем счетное множество, то $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ – асимптотически устойчива.

В 1988 году Ю. И. Любич и Ву К. Фонг [105] использовали идею доказательства, предложенную Г. М. Скляром и В. Я. Ширманом в [31], и, путем добавления в нее некоторых новых нетривиальных элементов из изометрической теории полугрупп, получили доказательство этого результата в общем случае. Независимо, в 1988 году теорема 1.2 была получена В. Арендтом и Ч. Батти [41]. Однако, иногда проверка условий теоремы 1.2 представляется чрезвычайно трудной задачей. Поэтому, анализируя устойчивость конкретных моделей вида (0.1), воспользоваться теоремой 1.2 сразу удается довольно редко. Результаты по устойчивости разнообразных моделей вида (0.1) получены в работах [59, 69, 126, 127, 150, 152, 156].

Отметим, что необходимые и достаточные условия устойчивости C_0-

полугрупп в произвольных банаховых пространствах получены в недавно опубликованной работе [138]. Эти условия, однако, сформулированы не в терминах спектра генератора, а в терминах средних Чезаро и Абеля некоторых степеней нормы траектории.

В работе [27] А. И. Милославским, возможно впервые, была применена техника базисов Рисса для исследования свойств эволюционных уравнений вида (0.1), а именно, был проведен анализ устойчивости некоторого подкласса эволюционных уравнений (0.1) в случае, когда $\sigma(A)$ лежит в левой полуплоскости. Первая группа результатов формулируется в терминах базисности Рисса корневых векторов оператора A. Вторая адаптирована для уравнений, учитывающих силы трения. Полученные результаты применяются к исследованию устойчивости конкретных неконсервативных систем, например, к задаче об устойчивости консольного трубопровода, см. [27].

Тематика устойчивости C_0-полугрупп также отражена в монографиях [42, 53, 65, 66, 117, 120, 157]. Но, несмотря на значительное количество результатов, в ней все еще остаются открытые вопросы [42,65,66,117]. Одним из них является вопрос о том, для каких классов операторов A выполняются условия теоремы 1.2? В диссертационной работе предоставляется один из вариантов ответа на этот вопрос в случае, когда уравнение (0.1) рассматривается в $\ell_p,\ 1 \le p < \infty$, c_0, или в гильбертовом пространстве, а оператор A имеет простой точечный спектр.

С другой стороны, даже когда эволюционное уравнение неустойчиво, может представлять интерес асимптотическое поведение его решений. Вопрос о существовании максимальной асимптотики для абстрактного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, как наиболее быстро растущего его решения, был впервые сформулирован Г. М. Скляром в 2010 году. Исследованию этого вопроса посвящены работы [30, 147], в которых получены результаты, обобщающие теорему 1.2. Описаны ситуации, которые приводят как к положительным, так и к отрицательным ответам, приведены иллюстрирующие примеры. Вопросы существования максимальной асимптотики для систем нейтрального типа изучались в [148].

Близкой к этому кругу вопросов является тематика полиномиально ограниченных C_0-полугрупп (т.е. полугрупп $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, таких что $\|T(t)\| \leq C(1+t^d)$, где $C, d \geq 0$), как полугрупп с «простейшей», но, в то же время, не экспоненциальной, мерой неустойчивости. Такие полугруппы встречаются в реальных физических задачах. К примеру, C_0-группы, которые соответствуют абстрактным волновым уравнениям, могут иметь линейный порядок роста [68]. Частным случаем абстрактных волновых уравнений является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где Δ – лапласиан, в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ [68]. Сильно непрерывные полугруппы, соответствующие системам нейтрального типа, также могут обладать полиномиальным ростом, см. [148].

Класс неквазианалитических операторов, которые являются генераторами C_0-групп в том числе и полиномиального роста, был впервые введен в рассмотрение и изучен Ю. И. Любичем и В. И. Мацаевым в 1962 году в работе [19]. Различные спектральные свойства операторов из этого класса в дальнейшем исследовались в работах [18, 20]. Полиномиально ограниченные C_0-группы также изучались в [44,95,107], причем в [95] получены некоторые результаты, касающиеся C_0-групп с другим функциональным ростом. Характеризация полиномиально ограниченной C_0-полугруппы в терминах интегрируемости первой и второй степени резольвенты ее генератора вдоль вертикальных прямых, обобщающая результаты [95, 107], получена в работах [63,64]. В 2009 году, в работе [138] получен ряд необходимых и достаточных условий того, чтобы C_0-полугруппа обладала полиномиальным ростом. Отметим, что асимптотическая теория C_0-полугрупп находится в фокусе монографий [65, 117] и стремительно развивается последние 15 лет. В диссертации конструируется класс C_0-групп, которые также являются полиномиально ограниченными, см. раздел 3.

1.2. Спектральные по Риссу операторы и системы

В диссертации важную роль играют следующие определения.

Определение 1.6. Будем называть изоморфизмом оператор $S \in [X]$, такой, что $S^{-1} \in [X]$.

Определение 1.7. [10] Последовательность элементов $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H называется базисом Рисса, если существует изоморфизм $S : H \mapsto H$, такой, что

$$\phi_n = Se_n,\ n \in \mathbb{N},$$

где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторый ортонормированный базис H.

Определение 1.8. [10] Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональный базис из подпространств в H, т.е. полная в H система попарно ортогональных подпространств, а $S : H \mapsto H$ – изоморфизм. Тогда последовательность подпространств

$$\mathfrak{N}_n = S\mathfrak{M}_n,\ n \in \mathbb{N},$$

называют базисом, эквивалентным ортогональному (или базисом Рисса из подпространств)

Отметим, что под подпространствами в работе понимаются только замкнутые подпространства, в противном случае они называются линейными многообразиями.

Понятие спектрального по Риссу оператора было впервые введено Р. Ф. Кертайн в работе [54] и оказалось эффективным при изучении различных свойств бесконечномерных систем (0.1) в гильбертовых пространствах.

Определение 1.9. [53] Пусть A – линейный, замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H. Оператор A называется спектральным по Риссу оператором, если выполнены следующие условия:

- A имеет простые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ и соответствующие им собственные векторы образуют базис Рисса пространства H;
- никакие две точки множества $\overline{\{\lambda_n\}_{n\geq 1}}$ не могут быть соединены кривой, целиком лежащей в $\overline{\{\lambda_n\}_{n\geq 1}}$.

Спектральными по Риссу системами называют системы вида (0.1), где A – спектральный по Риссу оператор.

Заметим, что в работе [70] определение 1.9 естественным образом обобщается на случай собственных значений конечной кратности. Системы с операторами такого типа для краткости будем называть обобщенно спектральными по Риссу.

Класс спектральных по Риссу систем включает в себя некоторые классы систем параболического и гиперболического типов [53, 139], подкласс систем с запаздыванием нейтрального типа [122], регулярные системы Штурма-Лиувилля [59], балку Эйлера-Бернулли с переменными коэффициентами [69].

В монографии [53] доказаны следующие свойства спектральных по Риссу операторов. Если A – спектральный по Риссу оператор, то $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_{n\geq 1}}$, сам оператор A и его резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$ представляются в виде ряда по собственным векторам A. Установлен спектральный критерий порождения оператором C_0-полугруппы $\left(\sup\limits_n \Re(\lambda_n) < \infty\right)$ и доказано, что сама полугруппа $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ представляется в виде ряда по собственным векторам A, а для логарифмического показателя ω_0 роста полугруппы установлено равенство: $\omega_0 = \sup\limits_n \Re(\lambda_n)$.

При работе с базисами Рисса (например в доказательстве теоремы 2.3.5 из [53]) существенно используется следующее характеристическое свойство базисов Рисса в гильбертовых пространствах.

Предложение 1.1. [10] Последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H является базисом Рисса H тогда и только тогда, когда $\overline{Lin}\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} = H$ и существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для всякого $N \in \mathbb{N}$ и любого $x = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n$,

$$m\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 \leq M\|x\|^2. \tag{1.1}$$

Свойство оператора A порождать базис Рисса из собственных векторов (A-инвариантных подпространств) является ценным, поскольку позволяет в значительной мере упростить исследование свойств систем (0.1) сложной природы [53, 69, 100, 122–129, 132, 145–147, 150, 152, 156].

Подчеркнем, что в определении базиса Рисса существенно используется понятие скалярного произведения. В банаховых пространствах существует целый ряд определений базисов, которые в некотором смысле похожи на базисы Рисса. В диссертационной работе параллельно рассматривается две задачи. Во-первых, мы хотим выявить класс банаховых пространств, на которые возможно распространить некоторые методы, связанные с базисами Рисса. И, во-вторых, мы хотим распространить некоторые результаты, касающиеся спектральных по Риссу операторов, на банаховы пространства из выявленного класса.

На пути решения этих задач мы рассматриваем базисы $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховых пространствах X, такие, что для всякого $N \in \mathbb{N}$ и любого $x = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \in X$,

$$m\|x\|^p \leq \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^p \leq M\|x\|^p,$$

где M и m – положительные константы, $p \geq 1$. В работе установлено, что класс таких базисов в точности совпадает с классом симметричных базисов в пространствах ℓ_p (см. предложение 2.3). В работе предлагается рассматривать операторы, собственные векторы которых образуют симметричный базис. Понятие симметричного базиса было впервые введено и изучено И. Зингером [15] в связи с одной задачей С. Банаха (является ли любое бесконечномерное банахово пространство изоморфным каждой своей замкнутой гиперплоскости?) и следующим вопросом Ч. Бессаги и А. Пельчинского из изоморфной теории банаховых пространств: является ли любое (рефлексивное) бесконечномерное банахово пространство с безусловным базисом изоморфным своему квадрату? В работе [15] И. Зингер установил, что для пространств, обладающих симметричным базисом, ответ на эти два вопроса является положительным.

Кратко перечислим основные результаты диссертации, полученные в этом направлении. В подразделе 2.1 мы вводим понятие симметрически-спектрального оператора, которое является естественным обобщением понятия спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом. В подразделе 2.2 исследованы свойства симметрически-спектральных операторов в пространствах $\ell_p,\ (1 \leq p < \infty),\ c_0$, и доказано (см. теорему 2.1 и замечание 2.8), что симметрически-спектральные операторы в этих пространствах обладают свойствами, аналогичными свойствам спектральных по Риссу операторов в гильбертовых пространствах, перечисленным на странице 22. На основании доказаных свойств получен спектральный критерий корректности задач Коши (0.1) в пространствах $\ell_p,\ (1 \leq p < \infty)$, и c_0, где A – симметрически-спектральный оператор, а также оценка сверху для нормы соответствующей C_0-полугруппы (теорема 2.2).

Кроме того, мы исследуем свойства сопряженных операторов к симметрически-спектральным операторам в пространствах $\ell_p,\ 1 < p < \infty$, и c_0, а также свойства соответствующих задач Коши (0.1) в сопряженных пространствах (следствия 2.2, 2.4).

1.3. Спектральная теория C_0-полугрупп, дифференциальные уравнения с запаздыванием

В 1963 году Ю. И. Любич в работе [20] установил некоторые условия полноты собственных векторов оператора A, порождающего ограниченную C_0-группу в банаховом пространстве, и показал, что для операторов A с этим свойством отсутствие предельных точек $\sigma(A)$ в $\mathbb{C}$ влечет полноту системы собственных векторов.

В 1963 году Ю. И. Любич в работе [18] изучал свойства спектральных разложений неквазианалитических операторов A в банаховых пространствах X. Оператор A называется неквазианалитическим, если iA порождает C_0-группу $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\|U(t)\|}{1+t^2}dt < \infty$. Если A – неквазианалитический оператор, то $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$. Ю. И. Любич показал [18], что спектральные разложения операторов A из этого класса со спектром $\sigma(A) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}[\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}]$, $\lambda_j\to\infty$, $\lambda_0\geq 0$, сходятся сильно (т.е. спектральные подпространства образуют базис), если

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2k-1}} > 1.$$

Также в [18] было установлено, что, если A – неквазианалитический оператор в X со спектром $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, норма соответствующей ему C_0-группы $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ограничена полиномом степени m и выполняется условие

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} > 1,$$

то каждая точка μ_k является собственным значением A, ей отвечает корневое подпространство $\mathfrak{L}_k$ ранга не выше $m+1$, и последовательность $\{\mathfrak{L}_k\}_{k\geq 0}$ образует базис из подпространств в X, см. определение 1.11.

В 1967 году В. Э. Кацнельсон доказал ряд теорем, содержащих условия, достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, для того, чтобы система корневых подпространств оператора в гильбертовом пространстве H образовывала базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки [16].

Для сжатий или диссипативных операторов эти условия выражаются в терминах спектра, и близость спектра к единичной окружности, соответственно, к мнимой оси, определяет близость базиса из корневых подпространств к ортогональному базису. В работе [16] В. Э. Кацнельсон также получил следующий результат. Пусть T – замкнутый оператор в H, L – положительный самосопряженный оператор в H с дискретным спектром, $D(L) \subset D(T)$, $A = L + T$ и пусть при некотором p, $0 < p \leq 1$, оператор $L^{\frac{p-1}{2}} T L^{\frac{p-1}{2}}$ ограничен и

$$\limsup_{n\to\infty} n\mu_n^{-p} < \infty,$$

где $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots$ – последовательность всех собственных чисел L. Тогда спектр A дискретен, и множество $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ всех собственных чисел A может быть разбито на такие конечные подмножества Λ_k, что система $\{\mathfrak{M}_k\}_{k=1}^{\infty}$ спектральных подпространств оператора A, отвечающих подмножествам Λ_k является базисом Рисса из подпространств H.

Отметим, что в 1985 году А. И. Милославский [27] доказал, что, если спектр $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ и состоит из собственных чисел, система соответствующих собственных векторов $\{e_n\}_{n\geq 1}$ оператора A полна в гильбертовом пространстве H и он генерирует ограниченную C_0-полугруппу, то $\{e_n\}_{n\geq 1}$ образует базис Рисса H. Спустя 4 года Ву К. Фонг совместно с И. Ю. Любичем установили [34] равенство

$$\sigma\left(T(t)\right) = \overline{e^{\sigma(A)t}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

иначе называемое теоремой об отображении спектров для полугрупп, в случае, когда A – неквазианалитический генератор группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в банаховом пространстве. На самом деле, как показано в [117], этот случай – наилучший из всех возможных в том смысле, что вне класса неквазианалитических операторов теорема об отображении спектров для полугрупп, вообще говоря, не имеет места.

В физике, механике, биологии и других науках возникают явления, когда поведение детерминированной системы существенным образом зависит от предистории ее эволюции, т.е. текущее состояние системы зависит не только от ее начального состояния, но и от множества ее состояний в прошлом. Такие явления эффективно описываются уравнениями с запаздыванием различного рода. В цикле работ Р. Рабаха, Г. М. Скляра, К. В. Скляр, А. В. Резуненко и П. Полака [122–124, 126, 128, 145–147] изучались различные свойства следующей системы нейтрального типа с распределенным запаздыванием,

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \int\limits_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta)d\theta + \int\limits_{-1}^{0} A_3(\theta)z(t+\theta)d\theta, \qquad (1.2)$$

где $A_{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det A_{-1} \neq 0$, $A_2, A_3 \in L_2\left([-1,0], \mathbb{C}^{n\times n}\right)$.

Заметим, что в работах Р. Рабаха, Г. М. Скляра и П. Ю. Бархаева [125, 127–129] исследовались качественные свойства смешанных запаздывающе-нейтральных систем, т.е. систем вида (1.2), где $A_{-1} \neq 0$, $\det A_{-1} = 0$.

Система (1.2) записывается в виде (0.1), если задать для нее некоторое начальное условие и выбрать в качестве фазового пространства состояний гильбертово пространство $M_2 = \mathbb{C}^n \times L_2\left([-1,0], \mathbb{C}^n\right)$ [126]. В этом случае состояние системы $x(t)$, линейный оператор A и его область определения $D(A)$ имеют следующий вид,

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z_t(\cdot) \end{pmatrix}, \quad z_t(\theta) = z(t+\theta), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & \frac{d}{d\theta} \end{pmatrix},$$

$$D(A) = \left\{ (y, z(\cdot))^T : \; z \in H^1\left([-1,0], \mathbb{C}^n\right), \; y = z(0) - A_{-1}z(-1) \right\} \subset M_2,$$

где $Lz_t(\theta) = \int\limits_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}_t(\theta)d\theta + \int\limits_{-1}^{0} A_3(\theta)z_t(\theta)d\theta$ [126]. Таким образом мы видим, что уравнение с запаздыванием (1.2) превращается в абстрактное дифференциальное уравнение (0.1) уже без запаздывания. Обозначим через $\overline{A}$ оператор A в случае, когда $A_2(\theta) = A_3(\theta) = 0$, т.е. когда $L = 0$.

Оператор A генерирует C_0-группу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ вида

$$T(t)\begin{pmatrix} y \\ z_0(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_t(0) - A_{-1}z_t(-1) \\ z_t(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) - A_{-1}z(t-1) \\ z(t+\cdot) \end{pmatrix},$$

и, если $x_0 = (y, z_0(\cdot))^T \in D(A)$, то формула выше определяет классическое решение системы (0.1) [126]. Для систем вида (1.2) справедливы следующие факты [122, 126]:

- Спектр $\overline{A}$ представляется в виде последовательности собственных чисел,
$$\sigma\left(\overline{A}\right) = \left\{\lambda_m^k = \ln|\mu_m| + i\left(\arg\mu_m + 2\pi k\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{0\},$$
где $\mu_m \in \sigma(A_{-1})$, $m = 1, \ldots, \ell$, $\mu_j \neq \mu_s$, если $j \neq s$, а $p_1, \ldots, p_\ell$ – размерности корневых подпространств, соответствующих $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ так, что $p_1 + \ldots + p_\ell = n$.

- Спектр A состоит только из собственных значений, которые являются нулями функции $\det\Delta(\lambda)$, где
$$\Delta(\lambda) = -\lambda I + \lambda e^{-\lambda}A_{-1} + \lambda\int\limits_{-1}^{0} e^{\lambda\theta}A_2(\theta)d\theta + \int\limits_{-1}^{0} e^{\lambda\theta}A_3(\theta)d\theta.$$
Им соответствуют собственные векторы $\varphi_\lambda = \begin{pmatrix} C - e^{-\lambda}A_{-1}C \\ e^{\lambda\theta}C \end{pmatrix}$, где $C \in \ker\Delta(\lambda)$.

- Существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что суммарная кратность нулей функции $\det\Delta(\lambda)$, которые лежат в круге L_m^k (с центром в λ_m^k, радиуса $r = \frac{1}{3}\min\limits_{(m,k)\neq(j,s)}\left|\lambda_m^k - \lambda_j^s\right|$), становится равна p_m, как только $|k| \geq N$.

- Хотя оператор A системы нейтрального типа (1.2), вообще говоря, и не порождает базис Рисса из корневых подпространств, тем не менее существуют спектральные проекторы $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A такие, что $\{P_nM_2\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса из A-инвариантных подпространств в M_2, причем $\max\limits_n \dim P_nM_2 = \max\limits_m p_m$.

Полученные результаты о спектральных свойствах систем нейтрального типа легли в основу исследований устойчивости [126, 148], стабилизируемости [124, 126], управляемости [123, 125, 128], наблюдаемости [123, 125], существованию максимальной асимптотики [147, 148] и реализуемости [145, 146] систем нейтрального типа. Так, проведенный спектральный анализ позволил авторам работы [128] применить метод моментов и результаты в теории базисов из экспонент для установления критерия точной нуль-управляемости систем нейтрального типа.

В последнее десятилетие спектральная теория C_0-полугрупп обогатилась глубокими результатами, полученными Г. К. Ксу совместно с С. П. Юнгом [155] в 2005 году, и Х. Звартом [158] в 2010 году. Главный результат этих работ в случае простого спектра оператора A формулируется следующим образом.

Теорема 1.3. [155, 158] Предположим, что оператор A генерирует C_0-группу в гильбертовом пространстве H и имеет простые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, которым соответствуют нормированные собственные векторы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если выполняются следующие условия:

1. $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = H$,
2. спектр удовлетворяет

$$\inf_{n\neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0, \tag{1.3}$$

то $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса пространства H, а значит, A – спектральный по Риссу оператор.

Теорема 1.3 впервые была сформулирована в рамках более общего результата работы [155], однако следует отметить, что доказательство этого результата в [155] содержало существенный пробел. Х. Зварт в [158] использовал совершенно иной подход к ее доказательству. Фундаментом доказательства теоремы 1.3 в работе [158] является интерполяционная теорема Л. Карлесона [67], а также глубокий результат о том, что любой генератор C_0-группы в гильбертовом пространстве H имеет ограниченное $\mathcal{H}^\infty$-функциональное исчисление в полосе [48, 72, 73]. Подробнее об $\mathcal{H}^\infty$-функциональном исчислении см., к примеру, [46, 48, 72, 73, 158]. Вопросы существования ограниченного $\mathcal{H}^\infty$-функционального исчисления для генераторов C_0-полугрупп, теснейшим образом связанные с вопросами спектральной теории, также рассматривались в работах [46, 48, 72].

Если мы откажемся от условия (1.3), то будет верно обратное, в некотором смысле, утверждение к теореме 1.3. Более подробно, пусть $f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ – любая функция, такая, что $\{if(n)\}_{n=1}^\infty$ не удовлетворяет (1.3). Если мы определим $A : H \supset D(A) \mapsto H$ как $A \sum\limits_{n=1}^\infty \alpha_n e_n = \sum\limits_{n=1}^\infty if(n) \cdot \alpha_n e_n,$ где $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – базис Рисса в H, с областью определения $D(A) = \left\{ x = \sum\limits_{n=1}^\infty \alpha_n e_n \in H : \{f(n) \cdot \alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_2 \right\}$, то можно показать, что A порождает ограниченную C_0-группу в H, см. также [53].

В 2010 году Х. Звартом в работе [158] было получено обобщение теоремы 1.3 на случай семейств A-инвариантных подпространств конечной размерности.

Теорема 1.4. [158] Пусть A – генератор C_0-группы в H и его собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ (с учетом кратности) представляются в виде,

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty = \bigcup_{j=1}^K \{\lambda_{n,j}\}_{n=1}^\infty, \text{ где } \inf_{n \neq m} |\lambda_{n,j} - \lambda_{m,j}| > 0, \ j = 1, \dots, K. \quad (1.4)$$

Если линейная оболочка корневых векторов плотна в H, то существует последовательность спектральных проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ оператора A со следующими свойствами:

- $\{P_n H\}_{n=1}^\infty$ образует базис Рисса из подпространств пространства H;
- $\max\limits_n \dim P_n H \le K.$

Эти результаты имеют ценность для приложений, поскольку облегчают задачу проверки, является ли та или иная система вида (0.1) (обобщенно) спектральной по Риссу.

Замечание 1.1. 1. Из условий теоремы 1.3 следует, что резольвента оператора A компактна, т.е. A – дискретный оператор [158].

2. В случае, когда $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, система $\{e_n\}_{n\geq 1}$ полна в H и оператор A генерирует ограниченную C_0-полугруппу, утверждение теоремы 1.3 следует из работы [27].

3. Если A генерирует квазисжимающую C_0-группу, то утверждение теоремы 1.3, в силу теоремы Люмера-Филлипса [66], следует из [16].

4. Если оператор A генерирует ограниченную C_0-группу и выполняется условие (1.3), то от условия 1 в теореме 1.3 можно отказаться, т.к. оно будет выполняться автоматически в силу результатов работы [20].

5. Поскольку A генерирует группу, то он имеет представление $A = A_0 + B$, где A_0 – генератор ограниченной группы, а $B \in [H]$ [72]. Если A_0 имеет чисто точечный спектр, удовлетворяющий (1.3), то, в силу теоремы XIX.5.7 из [14], условие 1 имеет место [158].

Замечание 1.2. Нетрудно видеть, что условие (1.4) для модели нейтрального типа выполняется с константой $K < \infty$. Таким образом, принимая во внимание теорему 1.4, мы видим, что сложная задача о доказательстве того факта, что образы спектральных проекторов $\{P_n M_2\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис Рисса из (A-инвариантных) подпространств пространства M_2, сводится к более простой задаче о полноте системы подпространств $\{P_n M_2\}_{n=1}^{\infty}$ в M_2. В частности, для проверки условия полноты инвариантныых подпространств, могут быть использованы результаты из [155], [14], и [18, 20]. К примеру, если $\overline{A}$ генерирует ограниченную C_0-группу в M_2, то, в силу того, что $A = \overline{A} + \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и второй оператор этой суммы ограничен, учитывая пункт 5 замечания 1.1, получаем, что условие полноты выполняется.

При этом ряд вопросов остаются неисследоваными. А именно, что происходит в случае, когда собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A не удовлетворяют условию (1.4)? В частности, интерес представляет вопрос о конструировании генератора C_0-группы с собственными числами $\lambda_n = i\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$, где последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ неограничена, монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| = 0$, и соответствующим полным, но небазисным семейством собственных векторов. Иными словами, будет ли корректной задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

где оператор A имеет вышеуказанный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, а его собственные векторы образуют полную систему, но не образуют базис Шаудера? Очевидно, в этом случае $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ не представляется в виде объединения $K < \infty$ множеств, каждое из которых удовлетворяет условию (1.3).

Как оказалось, задача Коши (1.5) будет корректной не всегда и ее корректность существенно зависит от характера поведения спектра оператора A на бесконечности. В работе представлена конструкция генератора C_0-группы с собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющими указанным выше условиям, и полным, минимальным, но не равномерно минимальным (а значит, и небазисным) семейством собственных векторов (теорема 3.1).

Далее, мы обобщаем эту конструкцию и представляем класс генераторов C_0-групп с собственными числами $\{\lambda_n = if(n)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая вещественная последовательность, и полным, минимальным, но не равномерно минимальным семейством собственных векторов (теорема 3.3). Тем самым, в силу теоремы 1.1, мы устанавливаем корректность соответствующих задач Коши и находим явный вид их решений (следствие 3.4). Для этих целей, предварительно, мы:

- Вводим и изучаем класс гильбертовых пространств $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, построенных по исходному сепарабельному пространству Гильберта H и выбранному базису Рисса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нем.

- Устанавливаем, что последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной, минимальной, но не образует базис Шаудера пространства $H_k(\{e_n\})$.

- Вводим в рассмотрение классы $\mathcal{S}_k$, $k \in \mathbb{N}$, возрастающих последовательностей $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, таких, что
$$\left\{n^j \Delta^j f(n)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$$
при $1 \le j \le k$.

Самым главным моментом доказательства основных результатов, полученных в этом направлении, является многократное применение дискретного неравенства Харди [75] для $p = 2$.

Теорема 1.5. [75, 76] Пусть $p > 1$ и $a_n \ge 0$. Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{1.6}$$
кроме того случая, когда все a_n равны 0. Константа $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ – наилучшая.

Иными словами, теорема 1.5 гласит, что оператор Чезаро
$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
ограничен в пространстве ℓ_p, где $1 < p < \infty$.

Заметим, что сам Г. Х. Харди пришел к открытию неравенства (1.6), когда пытался получить элементарное доказательство слабой формы неравенства Гильберта [76, 98]. Открытие последнего неравенства связано с изучением Д. Гильбертом решений некоторых интегральных уравнений, см. [78], и его слабая форма гласит, что двойной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}$ сходится, если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$. Вместе с тем, необходимо подчеркнуть и значительный вклад таких математиков, как М. Рисс, Е. Ландау и И. Шур, в развитие неравенства (1.6), см. [98]. Более подробно об истории возникновения неравенства Харди, а также о многочисленных его приложениях в анализе, дифференциальных уравнениях, математической физике, дифференциальной геометрии и других областях математики, см. [98, 99, 118].

Вопрос о порождении оператором C_0-группы (эквивалентный вопрос о корректности соответсвующей этому оператору задачи Коши) оказывается довольно тонким и зависит от асимптотического поведения собственных значений. А именно, если последовательность $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ покидает класс $\mathcal{S}_1$, то мы уже не можем более гарантировать корректность соответствующих задач Коши в пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$. Более того, в работе доказано, что при выполнении условий

$$\lim_{n\to\infty} if(n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} |f(n+1) - f(n)| = 0,$$

если существует $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$: $\liminf\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}|f(n)-f(n-1)| > 0$, то соответствующая задача Коши для оператора A в пространстве $H_1(\{e_n\})$ оказывается некорректной (следствие 3.3).

Кроме того, в работе также предлагается дальнейшее развитие данного подхода. А именно, используется та же самая идея для конструирования генераторов C_0-групп, действующих в специальных пространствах Банаха, с полным, минимальным, но небазисным семейством собственных векторов (теорема 3.6). С этой целью мы вводим класс банаховых пространств $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, построенных по исходному пространству ℓ_p и выбранному симметричному базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нем, используем классы последовательностей $\mathcal{S}_k$, $k \in \mathbb{N}$, и устанавливаем, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной и минимальной последовательностью, но не образует базис Шаудера пространства $\ell_{p,k}(\{e_n\})$. Таким образом, мы доказываем корректность соответствующих задач Коши в пространствах $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$, и устанавливаем явный вид их решений (следствие 3.7). Отметим, что для доказательства соответствующих результатов в этом направлении существенно используется неравенство Харди (1.6) для $p > 1$. При этом установлено, что при выполнении условий

$$\lim_{n\to\infty} if(n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} |f(n+1) - f(n)| = 0,$$

если существует $\alpha \in \left(0, \frac{1}{p}\right]$: $\liminf_{n\to\infty} n^{\alpha}|f(n) - f(n-1)| > 0$, то соответствующая задача Коши для оператора A в пространстве $\ell_{p,1}(\{e_n\})$ оказывается некорректной (следствие 3.8).

1.4. Устойчивость разложений Шаудера и C_0-полугруппы

В диссертации важную роль играет понятие базиса Шаудера.

Определение 1.10. [140] Последовательность элементов $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется базисом Шаудера X (или просто базисом), если всякий элемент $x \in X$ имеет единственное представление $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$.

Тривиальным примером базиса Шаудера является ортонормированный базис в гильбертовом пространстве. Базис Рисса в гильбертовом пространстве H также является базисом Шаудера. В силу предложения 1.1 верно следующее.

Замечание 1.3. Если $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса в H, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$ будет сходиться к какому-то элементу $x \in H$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, то есть ℓ_2 является в этом случае пространством коэффициентов разложения по базису $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Говоря о базисе Шаудера $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве, необходимо подчеркнуть, что пространство коэффициентов разложения по базису $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, вообще говоря, неизвестно.

Отметим, что первая абстрактная теорема об устойчивости произвольных базисов в любом банаховом пространстве была получена в работе [17]. Эта теорема устойчивости (известная как теорема Крейна-Мильмана-Рутмана) имеет следующее важное следствие: в банаховом пространстве, обладающем базисом, базис можно выбрать из конечных линейных комбинаций элементов произвольного всюду плотного множества. Этот факт также был впервые обнаружен в [17]. В 1951 году Н. К. Бари [4] открыла тематику устойчивости базисов, ввела термин и установила свойства базиса Рисса, а также доказала, среди прочего, что всякая минимальная система, квадратично близкая к базису Рисса, сама является базисом Рисса. В 2012 году, П. Дьяков и Б. Митягин [62] использовали некие факты из геометрии базисов, извлеченных из двумерных подпространств гильбертовых и банаховых пространств, для получения условий существования базисов Рисса из корневых векторов оператора Хилла и одномерного оператора Дирака.

Понятие разложения Шаудера банахова пространства является обобщением понятия базиса Шаудера и было впервые введено М. М. Гринблюмом [11] и М. К. Фаге [32, 33] в 1950 году.

Определение 1.11. [141] Последовательность ненулевых подпространств $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется разложением Шаудера X (или базисом из подпространств), если всякий элемент $x \in X$ имеет единственное представление $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n,$ где $x_n \in \mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

С разложением Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ассоциируют последовательность (непрерывных) проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую, что $P_iP_j = \delta_i^j P_j,\ \ i,j \in \mathbb{N}$, и $P_n x = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, [141]. В 1960-х разложения Шаудера и их свойства изучали А. С. Маркус [21], В. Н. Визитей [6, 7], Т. Като [93] (в гильбертовом пространстве), Дж. Р. Резерфорд [133, 134], Б. Л. Сандерс [135, 136], В. Дж. Дэвис [56] и другие. В. Б. Джонсон в работе [84] исследовал вопросы существования конечномерных ($\dim \mathfrak{M}_n < \infty,\ n \in \mathbb{N}$) разложений Шаудера, для чего было введено понятие пространства π_λ и дуального к нему. Сепарабельное пространство обладает конечномерным разложением тогда и только тогда, когда оно является дуальным к π_λ пространством [84].

Определение 1.12. [141] Разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется безусловным, если представления $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \ \ x_n \in \mathfrak{M}_n$, сходятся безусловно для всякого $x \in X$.

Тривиальным примером безусловного разложения Шаудера является ортогональное разложение в пространстве Гильберта. Класс безусловных разложений Шаудера в гильбертовом пространстве H совпадает с классом базисов Рисса из подпространств, см. теорему 4.2. Заметим, что пространства $C[0,1]$ и $L_1[0,1]$ имеют безусловные разложения Шаудера, хотя и не обладают безусловным базисом [140].

Если оператор A является самосопряженным и имеет компактную резольвенту, то он имеет ортонормированный базис из собственных векторов [158]. Однако, даже незначительное возмущение оператора A может нарушить свойство самосопряженности, а значит, и свойство ортонормированности его собственных векторов. При этом зачастую слабое возмущение самосопряженного оператора порождает базис Рисса из собственных векторов. Таким образом мы приходим к задаче определения условий, при выполнении которых спектральные проекции (слегка) несамосопряженного и неограниченного оператора в H будут формировать безусловное разложение Шаудера (базис Рисса из подпространств).

Эта задача служила одним из основных мотивов развития тематики устойчивости разложений Шаудера в гильбертовых пространствах. Так, А. С. Маркус, В. Н. Визитей [6, 21] и Т. Като [93] изучали изоморфные разложения Шаудера (см. определение 4.1) в гильбертовых пространствах H в связи с этой задачей. В 1960-ом году Маркус [21], обобщая результаты Бари [4], получил некоторые теоремы об изоморфных разложениях Шаудера в H. В качестве приложения, были получены условия, обеспечивающие безусловную базисность (и базисность Бари) как корневых подпространств диссипативного оператора, так и объединения ортонормированных систем, взятых в этих подпространствах [10, 21]. Другой результат, касающийся изоморфных разложений Шаудера в H, был получен в 1965 году и применен к исследованию разложений по корневым векторам слабо возмущенного нормального оператора, а также сходимости кратных разложений по системе собственных и корневых векторов операторного пучка [6].

Далее, Дьяков и Митягин применили теорему устойчивости разложений Шаудера из [21] для доказательства безусловной сходимости спектральных разложений, соответствующих операторам Хилла с сингулярными потенциалами [61] (2009 год), а также спектральных разложений, соответствующих одномерным периодическим операторам Дирака [60] (2010 год). Это означает, что существуют безусловные разложения Шаудера из инвариантных, относительно соответствующих операторов, подпространств. В 2010 году, К. Висс [154] применил модификацию одной леммы из [108] об изоморфных разложениях Шаудера в H к исследованию собственных проекций p-подчиненных возмущений нормальных операторов.

Разложения Шаудера являются эффективными инструментами современного функционального анализа [47, 52, 58, 82, 83] и теории линейных эволюционных уравнений [53,122–129,155,156,158]. В 2012 году авторами работы [57] были обнаружены взаимосвязи таких феноменов, как учащенной гиперцикличности и хаоса, с безусловными разложениями Шаудера в банаховых пространствах. А именно, доказано, что, если X – комплексное сепарабельное бесконечномерное банахово пространство с безусловным разложением Шаудера, то в X существует оператор T, который является хаотичным и учащенно гиперцикличным. Ограниченный оператор T называется гиперцикличным, если $\exists x \in X,$ такой, что множество

$$\{T^n x;\ n \geq 0\}$$

плотно в X. Хаотичным оператором называется гиперцикличный оператор, такой что множество периодических точек

$$\left\{x : \exists N \geq 1 : T^N x = x\right\}$$

плотно в X. Оператор T называется учащенно гиперцикличным, если $\exists x \in X,$ такой, что для любого непустого окрытого множества $U \subset X,$ множество $\{n \geq 0 : T^n x \in U\}$ возвращений имеет положительную нижнюю плотность,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left|\{n \leq N : T^n x \in U\}\right| > 0.$$

Также в [57] показано, что существуют действительные пространства Банаха с безусловным базисом, не обладающие хаотичными операторами.

Заметим, что ℓ_∞ не обладает разложением Шаудера [141]. Хотя все пространства с базисом с необходимостью являются сепарабельными, существуют несепарабельные банаховы пространства с разложениями Шаудера [49, 136] и сепарабельное банахово пространство без разложения [38]. Больше информации о разложениях Шаудера (базисах из подпространств) содержится в [5, 10, 85, 102, 103, 141].

В 1967 году Т. Като получил следующее достаточное условие подобия проекторов в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.6. [93] Пусть $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых самосопряженных проекторов в гильбертовом пространстве H, такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = I$, $P_n P_m = \delta_n^m P_n$ для $n, m \in \mathbb{Z}_+$, и пусть $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в H, удовлетворяющая $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что

$$\dim P_0 = \dim J_0 = m < \infty, \tag{1.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^2 \leq c^2 \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in H, \tag{1.8}$$

где c – константа, такая, что $0 \leq c < 1$. Тогда $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ подобна $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. существует изоморфизм S, такой, что $J_n = S P_n S^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Эта теорема также может быть переформулирована на языке разложений Шаудера. Теоремы такого рода называют теоремами об устойчивости разложений Шаудера (базисов из подпространств).

Результат Т. Като применялся к исследованиям в спектральной теории и теории возмущений. В 1968 году К. Кларк [51] применил теорему 1.6 к исследованию спектральных свойств относительно ограниченных возмущений обыкновенных дифференциальных операторов. В 1972 году Е. Хьюз [79] применил теорему 1.6 к доказательству некоторых теорем о возмущении для некоторых спектральных задач. Сам Т. Като рассматривал задачу о полноте спектральных проекций несамосопряженного оператора [92] как задачу о возмущении для самосопряженного оператора и получил ее решение при помощи теоремы 1.6. В 2012 году Дж. Аддучи и Б. Митягин задействовали теорему 1.6 к исследованию разложений по собственным функциям возмущенного гармонического осциллятора $L = -\frac{d^2}{dx^2}+x^2+B$, $B = b(x)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [35]. Та же идея легла в основу спектрального анализа возмущения $A = T+B$ самосопряженного оператора T с дискретным спектром, представленного в работе [36]. В 2016 году была опубликована работа Б. Митягина и П. Сигла [116], касающаяся свойств системы корневых векторов сингулярных возмущений операторов типа гармонического осциллятора, результаты которой также базируются на теореме 1.6.

Замечание 1.4. Теорема 1.6 может быть полезной в спектральной теории C_0-полугрупп. А именно, при получении достаточных условий того, что система (0.1) является (обобщенно) спектральной по Риссу. Ее главное отличие от результатов работ [155,158] и, в частности, теоремы 1.4, заключается в том, что она охватывает случай не только генераторов C_0-групп, но и полугрупп.

Однако, насколько нам известно, до настоящего времени теорема 1.6 не имела обобщения или формулировки для случая банаховых пространств. Поэтому, в связи с результатами, полученными в разделе 2 (см. подраздел 1.2), а также с приложениями к вопросу об устойчивости уравнений (0.1) в банаховых пространствах, возникает задача распространения теоремы 1.6

на широкий класс пространств Банаха.

Основными результатами, полученными автором в этом направлении, являются распространение теоремы 1.6 в разделе 4 на случай пространств Орлича ℓ_Φ (теорема 4.5) и пространств с разложениями Шаудера-Орлича (теорема 4.6), которые вводятся в данной работе. В частности, получены конструктивные результаты об устойчивости безусловных разложений и базисов Шаудера, а также симметричных базисов в пространствах ℓ_p, $p \in [1, \infty)$ (теорема 4.7, предложения 4.4, 4.5 и следствия 4.6, 4.11). Получены частичные ответы на важный вопрос: при каких условиях некоторая минимальная последовательность будет симметричным базисом в пространстве $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty,\ c_0$, либо в гильбертовом пространстве? Полученные в данном направлении результаты могут быть применены в спектральной теории C_0-полугрупп в некоторых банаховых пространствах. В заключительной части раздела 4 рассматриваются приложения полученных результатов, вместе с результатами раздела 2 (см. подраздел 1.2), к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений в $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty,\ c_0$, а также в гильбертовых пространствах (см. предложение 4.10 и замечания после него).

Отметим, что исследование устойчивости разложений Шаудера в банаховых пространствах представляет из себя значительно более сложную проблему, чем в гильбертовых пространствах. Известных результатов по тематике устойчивости разложений Шаудера в банаховых пространствах на данный момент не много. Эквивалентность последовательностей подпространств в банаховых пространствах и в сопряженных пространствах изучалась в [37, 81]. Некоторые результаты, касающиеся базисных последовательностей подпространств, безусловных базисных последовательностей подпространств и теорем устойчивости Пэли-Винера были получены в работе [133]. Другие результаты по тематике устойчивости разложений Шаудера могут быть найдены в монографиях [5, 10, 108, 141]. Среди них мы отметим результат В. Н. Визитея, полученный в 1965 году [7], который формулируется следующим образом.

Теорема 1.7. $[7, 141]$ Пусть $1 \le q \le \infty$ и пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – q-бесселево разложение Шаудера пространства X с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда справедливы следующие предложения.

I. Существует константа $\lambda \in (0,1)$, такая, что всякая последовательность подпространств $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в X, удовлетворяющая
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta\left(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \lambda,$$
где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (если $q = \infty$, то $p = 1$) и $\theta\left(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\right) = \max\left\{\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}, \|x\|=1} \rho(x, \mathfrak{N}), \sup\limits_{y\in\mathfrak{N}, \|y\|=1} \rho(y, \mathfrak{M})\right\}$ – раствор подпространств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, является разложением Шаудера пространства X, изоморфным $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Более того, константа λ может быть выбрана следующим образом, $\lambda = \left(4 \sup\limits_{0\le n<\infty} \left\|\sum\limits_{j=0}^{n} P_j\right\| \left(1 + \sup\limits_{0\le n<\infty} \|P_n\|\right)^2\right)^{-1}$.

II. Всякая последовательность подпространств $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в X, такая, что
$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta\left(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n\right)^p < \infty, \tag{1.9}$$
где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ($p = 1$, если $q = \infty$), и допускающая последовательность $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$, такую, что $(\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}, \{J_n\}_{n=0}^{\infty})$ – X-полная обобщенная биортогональная система, является q-бесселевым разложением Шаудера в X. Если, кроме того, $\dim \mathfrak{M}_n < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то такой же вывод справедлив для всякой ω-линейно независимой последовательности подпространств $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.9).

В формулировке теоремы 1.7 используется терминология из [141, § 15]. В разделе 4 из теоремы 1.7 мы получаем результат об устойчивости произвольных безусловных разложений Шаудера, см. следствие 4.3.

1.5. Работы автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти научных статьях [22, 29, 109, 112, 113], а также отражены в тезисах девяти конференций [23–26, 110, 111, 114, 142, 143] и препринте [144].

1.6. Выводы к разделу

В данном разделе представлен обзор литературы по теме диссертации, приведены основные для работы понятия и определения, обоснован выбор направлений исследований, сформулирована постановка задач и представлен краткий обзор основных результатов.

В виду того, что системы (0.1) моделируют широкий спектр процессов, возникающих в разных науках, теория эволюционных уравнений и C_0-полугрупп активно развивается в последнее время. В диссертации представлены конструктивные ответы на ряд вопросов, связанных с корректностью и устойчивостью эволюционных уравнений (0.1), в зависимости от спектральных и базисных свойств соответствующих операторов A.

С целью развития спектральной теории эволюционных уравнений и C_0-полугрупп в банаховых пространствах возникает необходимость исследовать свойства разложений Шаудера в банаховых пространствах, изучать вопросы внутренней геометрии банаховых пространств и использовать методы теории возмущений. В связи с этой проблематикой, в работе уделяется внимание исследованию свойств устойчивости разложений Шаудера, в частности безусловных разложений Шаудера.

РАЗДЕЛ 2

СИММЕТРИЧЕСКИ-СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом разделе предложен класс пространств и операторов, для которых справедлива теорема о корректности задачи Коши (0.1), аналогичная теореме Р. Кертайн (см. теорему 2.3.5 из монографии [53]). Рассматриваются операторы в пространствах ℓ_p, собственные векторы которых $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют полную систему и удовлетворяют следующему условию: существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для всякого $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in \ell_p$,

$$m\|x\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \leq M\|x\|^p. \tag{2.1}$$

Заметим, что эти требования при $p = 2$ совпадают с определением базиса Рисса в ℓ_2. Показано, что условие (2.1) является характеристическим для симметричных базисов в ℓ_p. Это следует из известного факта о том, что пространства ℓ_p обладают единственным, с точностью до эквивалентности, симметричным базисом, см. [102, с. 129]. Аналогичный результат справедлив для симметричных базисов в пространстве c_0. В подразделе 2.1 будет введено понятие симметрически-спектрального оператора, обобщающее понятие спектрального по Риссу оператора в гильбертовом пространстве на случай пространств Банаха. Подраздел 2.2 посвящен исследованию свойств симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ и c_0, а также исследованию корректности задач Коши (0.1) в этих пространствах. Основными результатами раздела 2 являются теоремы 2.1, 2.2, а также следствия 2.2 и 2.4

Всюду в этом разделе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет обозначать канонический базис пространства ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, т.е. состоящий из ортов $e_n = (\delta_i^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1. Симметричные базисы и симметрически-спектральные операторы

В диссертационной работе существенную роль играют следующие определения.

Определение 2.1. [140] Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется ограниченным, если

$$0 < \inf_n \|\phi_n\| \leq \sup_n \|\phi_n\| < \infty.$$

Определение 2.2. [102] Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется безусловным, если для всякого $x \in X$, его разложение в ряд по базису $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$, сходится безусловно, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \phi_{\sigma(n)}$ сходится для всякой перестановки $\sigma \in \Pi$.

Замечание 2.1. Отметим, что безусловная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$ в банаховом пространстве эквивалентна тому, что для любого выбора $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \phi_{n_k}$ сходится (см. [87, с. 10], [102, с. 15]).

Определение 2.3. [140] Последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X будем называть полной, если $\overline{Lin}\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} = X$.

Определение 2.4. Будем говорить, что последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ биортогональна к $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, если $\langle \psi_n, \phi_j \rangle = \delta_j^n$.

Определение 2.5. [102] Пусть X – банахово пространство. Пара последовательностей $(\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty})$, где $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$, $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X^*$, называется биортогональной системой, если $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ биортогональна к $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Определение 2.6. [140] Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется натягивающим, если биортогональная к нему последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ полна в X^*.

Определение 2.7. [102] Говорят, что базисы $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X изоморфны (или эквивалентны), если существует изоморфизм $S : X \mapsto X$, такой что

$$\phi_n = S\chi_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.8. [140, с. 574] Базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется симметричным, если для всякого $x \in X$,

$$\sup_{\sigma \in \Pi} \sup_{|\beta_i| \le 1, \, 1 \le k < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} \beta_i \langle \psi_i, x \rangle \phi_{\sigma(i)} \right\| < \infty,$$

где $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ – соответствующая базису биортогональная последовательность.

Все симметричные базисы имеют следующую характеризацию.

Предложение 2.1. [140, теорема 22.1] Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис пространства X, а $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – соответствующая ему биортогональная последовательность. Следующие утверждения эквивалентны.

1) $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис пространства X.

2) Для всякого $x \in X$ и любой перестановки $\rho \in \Pi$ имеем

$$\sup_{1 \le k < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} \langle \psi_{\rho(i)}, x \rangle \phi_i \right\| < \infty.$$

3) Всякая перестановка $\{\phi_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ базиса $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сама является базисом X, изоморфным $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример 2.1. Канонический базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространств $\ell_p, \ 1 \le p < \infty$, и c_0 является симметричным. В самом деле, пусть $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ – биортогональная последовательность к базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства ℓ_p, $\langle e_n^*, e_m \rangle =$

δ_n^m. Тогда, для всякого $x \in \ell_p$ и любой перестановки $\rho \in \Pi$ имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \langle e^*_{\rho(i)}, x\rangle e_i \right\|^p = \left\| \begin{pmatrix} \langle e^*_{\rho(1)}, x\rangle \\ \langle e^*_{\rho(2)}, x\rangle \\ \dots \\ \langle e^*_{\rho(k)}, x\rangle \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \right\|^p = \sum_{i=1}^{k} |\langle e^*_{\rho(i)}, x\rangle|^p$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно

$$\sup_{1 \le k < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} \langle e^*_{\rho(i)}, x\rangle e_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle e^*_{\rho(i)}, x\rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle e^*_{i}, x\rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|$$

для любого $x \in \ell_p$ и любой перестановки ρ. В силу пункта 2 предложения 2.1 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис. Аналогичным образом можно показать, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис c_0.

Замечание 2.2. Далеко не всякое банахово пространство обладает симметричным базисом. К примеру, в пространстве $L_p[0,1]$, $p \ne 2$, симметричных базисов не существует [140, теорема 21.1, утверждение 22.2].

Замечание 2.3. Привлекая равенство Парсеваля, тем же способом, что и в примере 2.1, можно показать, что всякий ортонормированный базис в гильбертовом пространстве является симметричным.

Замечание 2.4. Из пункта 3 предложения 2.1 следует, что базис, изоморфный симметричному, сам является симметричным. Действительно, если $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис пространства X, то для всякой перестановки $\sigma \in \Pi$ существует изоморфизм $S(\sigma)$, такой что $\phi_{\sigma(n)} = S(\sigma)\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис, изоморфный $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то найдется изоморфизм S, такой что $\psi_n = S\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi_{\sigma(n)} = S\phi_{\sigma(n)} = SS(\sigma)\phi_n = SS(\sigma)S^{-1}\psi_n$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – также симметричный базис X.

Напомним, что базисом Рисса гильбертова пространства H называется последовательность $\phi_n = S\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, где S – изоморфизм, а $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

– некоторый ортонормированный базис H. Из замечаний 2.3 и 2.4 сразу следует, что всякий базис Рисса гильбертова пространства является симметричным. Обратное утверждение также верно.

Предложение 2.2. Класс базисов Рисса гильбертова пространства совпадает с классом симметричных базисов.

Поясним вкратце, почему всякий симметричный базис H будет базисом Рисса. Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис $H.$ Из пункта 3 предложения 2.1 следует, что $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – безусловный базис $H.$ Далее, всякий симметричный базис – ограничен (см. [140, с. 569, предложение 21.4]). Теорема Лорча гласит, что базис $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства H является базисом Рисса тогда и только тогда, когда он безусловный и ограничен (см. [10, с. 381, теорема 2.2], см. также [104]). В силу теоремы Лорча заключаем, что $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса пространства $H.$

Из пункта 3 предложения 2.1 следует, что всякий симметричный базис является безусловным. Обратное, как проиллюстрировано в следующем примере, вообще говоря, неверно.

Пример 2.2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса гильбертового пространства $H.$ Рассмотрим последовательность $\phi_n = \alpha_n \varphi_n,\ \alpha_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$

- Если $0 < \inf\limits_n |\alpha_n| \le \sup\limits_n |\alpha_n| < \infty,$ то $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно, также будет образовывать базис Рисса пространства $H.$
- Если $\inf\limits_n |\alpha_n| = 0$ или $\sup\limits_n |\alpha_n| = \infty,$ то, легко видеть, что $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ останется безусловным базисом, однако перестанет быть базисом Рисса, а значит, в силу предложения 2.2, и симметричным базисом.

Заметим, что существуют примеры банаховых пространств с несчетным множеством взаимно неизоморфных симметричных базисов [102]. Особый случай банахова пространства с двумя, с точностью до эквивалентности, симметричными базисами, впервые обнаружен и рассмотрен в [131].

Замечание 2.5. В силу предложения 2.2, в сепарабельных гильбертовых пространствах существует единственный, с точностью до изоморфизма, симметричный базис. Оказывается, эта ситуация распространяется также и на некоторые пространства Банаха. А именно, в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ и c_0 все симметричные базисы эквивалентны между собой [102, с. 129]. Иными словами, в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ и c_0 существует только один, с точностью до эквивалентности, симметричный базис, и он эквивалентен каноническому базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Предложение 2.3. Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Тогда $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует симметричный базис пространства ℓ_p в том и только том случае, если существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для всякого $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in \ell_p$,

$$m\|x\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \leq M\|x\|^p. \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис пространства ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, в силу замечания 2.5 найдется изоморфизм F, такой, что $\phi_n = Fe_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in \ell_p$, то, с одной стороны,

$$\begin{aligned}\|x\|^p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n\right\|^p = \left\|F\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right\|^p \leq \|F\|^p \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right\|^p \\ = \|F\|^p \left\|\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots\end{pmatrix}\right\|^p = \|F\|^p \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p = \left\|\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots\end{pmatrix}\right\|^p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right\|^p = \left\|F^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n\right\|^p \leq \|F^{-1}\|^p \|x\|^p.$$

Достаточность. Рассмотрим линейное отображение $S : e_n \mapsto \phi_n$,

$n \in \mathbb{N}$. Из двойного неравенства (2.2) следует, что S – изоморфизм. Поэтому $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис, эквивалентный каноническому, а значит, в силу замечания 2.5, $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис. □

Предложение 2.4. Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис c_0. Тогда $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис c_0 в том и только том случае, если существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для всякого $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in c_0$,

$$m\|x\| \leq \sup_{n\geq 1} |\alpha_n| \leq M\|x\|.$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству предыдущего.

По аналогии с понятием спектрального по Риссу оператора, действующего в гильбертовом пространстве [53], введем понятие симметрически-спектрального оператора.

Определение 2.9. Предположим, что A является замкнутым линейным оператором, действующим в банаховом пространстве X с симметричным базисом. Если A имеет простые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ и соответствующие им собственные векторы $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ образуют симметричный базис X, то мы назовем A симметрически-спектральным оператором.

Замечание 2.6. В определении спектрального по Риссу оператора (см. определение 1.9) присутствует дополнительное условие 2. Это условие носит технический характер и приобретает важность лишь в бесконечномерной теории управления. Поскольку в диссертации задачи теории управления не рассматриваются, в определении 2.9 это условие было отброшено.

В дальнейшем в диссертационной работе будут рассматриваться только симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p или c_0.

Замечание 2.7. Понятие симметрически-спектрального оператора является обобщением понятия спектрального по Риссу оператора на случай банаховых пространств с симметричным базисом. С другой стороны, симметрически-спектральные операторы образуют подкласс во множестве спектральных операторов в смысле Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [14].

2.2. Симметрически-спектральные операторы и корректность задач Коши в пространствах ℓ_p и c_0

В дальнейшем мы будем использовать следующее определение.

Определение 2.10. [53,66,117] Пусть $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ – C_0-полугруппа. Тогда $\omega_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln\|T(t)\|}{t}$ называют логарифмическим показателем роста полугруппы.

Можно показать, что для всякой C_0-полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\|T(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln\|T(t)\|}{t}.$$

В этом подразделе будет доказано, что свойства симметрически-спектральных операторов в пространствах ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ и c_0 подобны свойствам спектральных по Риссу операторов в гильбертовых пространствах.

Теорема 2.1. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty,$ с простыми собственными числами $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\{\psi_n\}_1^\infty \subset (\ell_p)^*$ – биортогональная к $\{\phi_n\}_1^\infty$ последовательность. Тогда оператор A обладает следующими свойствами.

(i) $\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0\right\}, \quad \sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty},$

$$(A - \lambda I)^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle\psi_n, x\rangle\phi_n \quad (\lambda \in \rho(A),\ x \in \ell_p). \tag{2.3}$$

(ii) Для всякого $x \in D(A)$ оператор A имеет спектральное представление

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\psi_n, x\rangle\phi_n, \text{ причем} \tag{2.4}$$

$$D(A) = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p < \infty \right\}.$$

(iii) Оператор A генерирует C_0 -полугруппу тогда и только тогда, когда

$\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty;$ при этом действие полугруппы задается формулой

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \quad (t \geq 0, \ x \in \ell_p). \tag{2.5}$$

(iv) Логарифмический показатель роста полугруппы совпадает с

$$\omega_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n). \tag{2.6}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы в целом аналогично доказательству теоремы 2.3.5 из монографии [53].

Прежде всего отметим, что, так как $\{\psi_n\}_1^{\infty} \subset (\ell_p)^*$ – биортогональная к $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ последовательность, всякий элемент $x \in \ell_p$ раскладывается по базису $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ следующим образом,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n.$$

(i) Возьмем точку $\lambda \in \mathbb{C},$ такую, что $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| \geq a > 0.$ Установим, что оператор

$$A_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$$

является резольвентой оператора A. Применив предложение 2.3 дважды, находим, что для всякого $x \in \ell_p,$

$$\|A_\lambda x\|^p \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^p} |\langle \psi_n, x \rangle|^p \leq \frac{1}{ma^p} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n, x \rangle|^p \leq \frac{M}{ma^p} \|x\|^p,$$

т.е. A_λ – ограничен. Зафиксируем $x \in \ell_p$ и рассмотрим последовательность

$$z_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n.$$

Тогда

$$(A - \lambda I)\, z_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, x \rangle (\lambda_n \phi_n - \lambda \phi_n) = \sum_{n=1}^{N} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$$

и $z_N \to A_\lambda x,$ если $N \to \infty.$ Но $(A - \lambda I)\, z_N \to x$ при $N \to \infty,$ и в силу замкнутости оператора A отсюда следует, что $A_\lambda x \in D(A)$ и для всякого $x \in \ell_p,$

$$(A - \lambda I)\, A_\lambda x = x. \tag{2.7}$$

Возьмем теперь $y \in D(A)$ и рассмотрим $x = (A - \lambda I)\, y.$ Тогда, в силу (2.7), $x = (A - \lambda I)\, A_\lambda x = (A - \lambda I)\, A_\lambda\, (A - \lambda I)\, y.$ Следовательно,

$$(A - \lambda I)\, (y - A_\lambda\, (A - \lambda I)\, y) = x - x = 0.$$

Так как λ не является собственным значением $A,$ то для всякого $y \in D(A),$

$$y = A_\lambda\, (A - \lambda I)\, y.$$

Комбинируя это равенство с (2.7), получаем, что $\lambda \in \rho(A)$ и $A_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$ Таким образом, попутно, установлено, что

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\} \subset \rho(A).$$

Для завершения доказательства пункта (i) остается заметить, что, поскольку $\lambda_n \in \sigma(A)$ и спектр замкнутого оператора замкнут, мы имеем, что $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_1^\infty}$ и

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0 \right\}.$$

(ii) Прежде всего докажем, что

$$B = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p < \infty \right\} \subset D(A)$$

и что для всех $x \in B$ справедливо спектральное представление (2.4). Для $x \in B$ рассмотрим элемент $x_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n.$ Тогда, согласно предложению 2.3, $\{x_N\}_{N=1}^\infty$ и $\{Ax_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n\}_{N=1}^\infty$ сходятся при $N \to \infty$

к x и к $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$ соответственно. В силу замкнутости оператора A мы заключаем, что $x \in D(A)$ и $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$.

Значит, $B \subset D(A)$ и нам остается увидеть, что $D(A) \subset B$. Предположим, что $x \in D(A)$ и рассмотрим элемент $y = (A - \lambda I)\, x$, если $\lambda \in \rho(A)$. На основании доказанного свойства (i) мы имеем, что

$$x = (A - \lambda I)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, y \rangle \phi_n$$

и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, x \rangle \phi_n$. В силу того, что $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ – базис, мы имеем

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n, y \rangle = \langle \psi_n, x \rangle,\ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $x \in B$, так как для всякого $\lambda \in \rho(A)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x \rangle|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \right|^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} + 1 \right|^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \right| + |1| \right)^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right)^p |\langle \psi_n, y \rangle|^p \leq$$

$$M \left(\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right)^p \|y\|^p,$$

где $\mu = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda|$.

(iii) Если оператор A генерирует C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, то

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} < \infty$$

и множество $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \Re(\lambda) > \omega_0\} \subset \rho(A)$ (см. теорему 11 из монографии [13, с. 662]). Следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty. \tag{2.8}$$

Покажем, что условие (2.8) является достаточным для порождения оператором A полугруппы. Как было показано в (i), для всякого λ, такого, что $\Re(\lambda) > \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) = \omega,$ резольвента оператора A имеет представление

$$(A-\lambda I)^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda}\langle\psi_n, x\rangle\phi_n,\ x \in \ell_p, \text{ откуда}$$

$$(A-\lambda I)^{-k}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n - \lambda)^k}\langle\psi_n, x\rangle\phi_n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Применив предложение 2.3, получаем, что

$$\left\|(A-\lambda I)^{-k}x\right\|^p \le \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|^{pk}}|\langle\psi_n, x\rangle|^p \le \frac{M\|x\|^p}{m\left(\Re(\lambda)-\omega\right)^{pk}}.$$

Из этого неравенства, применяя теорему Хилле - Иосиды - Филлипса [13, с. 665], мы заключаем, что оператор A порождает C_0-полугруппу $T(t)$, причем

$$\|T(t)\| \le \sqrt[p]{\frac{M}{m}}e^{\omega t}, \quad t \ge 0. \tag{2.9}$$

Осталось установить (2.5). Определим оператор e^{At} для всякого $x \in \ell_p$ следующим образом,

$$e^{At}x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle\psi_n, x\rangle\phi_n.$$

Этот оператор ограничен для всякого $t \ge 0$ в силу предложения 2.3 и условия (2.8). Рассмотрим $\lambda:\ \Re(\lambda) > \omega$. На основании (i) и представления резольвенты C_0-полугруппы [13, с. 662], имеем

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}e^{At}x dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle\psi_n, x\rangle\phi_n dt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}e^{\lambda_n t}\langle\psi_n, x\rangle\phi_n dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle\psi_n, x\rangle\phi_n = -\left(A-\lambda I\right)^{-1}x =$$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)x dt,\ x \in \ell_p.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\left(e^{At}x - T(t)x\right)dt = 0.$$

Применяя лемму 15 из монографии [13, с. 667], получаем, что $e^{At} = T(t)$.

(iv) Из (iii) и неравенства (2.9) имеем, что $T(t)\phi_n = e^{\lambda_n t}\phi_n,\ t \geq 0,$ и

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \leq \omega = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n).$$

Следовательно, для всех натуральных n, $\omega_0 = \inf\limits_{t>0} \frac{\ln\|T(t)\|}{t} \geq \Re(\lambda_n)$. Поэтому $\omega_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n)$. □

Замечание 2.8. Теорема 2.1 справедлива также для симметрически-спектральных операторов в c_0. А именно, если A – симметрически-спектральный оператор в пространстве c_0 с простыми собственными числами $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\ell_1 \supset \{\psi_n\}_1^\infty$ – биортогональная к $\{\phi_n\}_1^\infty$ последовательность, то справедливы пункты (i), (iii) и (iv) теоремы 2.1, а также пункт (ii), с тем изменением, что

$$D(A) = \left\{ x \in c_0 :\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n||\langle\psi_n, x\rangle| < \infty \right\}.$$

Напомним, что задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

называется корректной, если для всякого $x_0 \in D(A)$ существует единственное классическое решение $x(\cdot) = x(\cdot, x_0)$ задачи (2.10), см. Определение 1.4. Главным результатом данного раздела является следующая теорема о корректности задач Коши в пространствах ℓ_p и c_0.

Теорема 2.2. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, или c_0, с собственными числами $\{\lambda_n\}_1^\infty$. Тогда верны следующие утверждения:

1) Задача Коши (2.10) является корректной в том и только том случае, если $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$.

2) Если $\omega = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$, то найдется константа $C > 0$, такая, что для любого решения задачи (2.10), $x(t) = T(t)x_0$, $t \geq 0$, верна следующая оценка,

$$\|T(t)x_0\| \leq Ce^{\omega t}\|x_0\|, \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

Доказательство. 1) Пусть задача Коши (2.10) корректна. Так как $\rho(A) \neq \emptyset$, то по теореме 1.1 оператор A генерирует C_0-полугруппу. На основании пункта (iii) теоремы 2.1 и замечания 2.8, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$.

Обратно, пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$. Поскольку A – симметрически-спектральный оператор в ℓ_p или c_0, в силу пункта (iii) теоремы 2.1 и замечания 2.8 оператор A генерирует C_0-полугруппу. Применяя теорему 1.1, получаем, что задача Коши (2.10) корректна.

2) Поскольку $\omega = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) < \infty$, то, в силу пункта (iii) теоремы 2.1 и замечания 2.8 оператор A генерирует C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Следовательно, по теореме 1.1, задача Коши (2.10) корректна. На основании пункта (iii) теоремы 2.1 и предложения 2.3 будем иметь, что для всякого $t \geq 0$ и каждого $x_0 \in \ell_p$,

$$\begin{aligned}\|T(t)x_0\|^p &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle \psi_n^*, x_0\rangle \psi_n\right\|^p \leq \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty} \left|e^{\lambda_n t}\right|^p |\langle \psi_n^*, x_0\rangle|^p \\ &= \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\Re(\lambda_n)pt} |\langle \psi_n^*, x_0\rangle|^p \leq \frac{M}{m} e^{\omega p t}\|x_0\|^p.\end{aligned}$$

Аналогично, комбинируя пункт (iii) замечания 2.8 с предложением 2.4, получим, что для всякого $t \geq 0$ и любого $x_0 \in c_0$,

$$\|T(t)x_0\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}\langle \psi_n^*, x_0\rangle \psi_n\right\| \leq \frac{1}{m}\sup_{n\in\mathbb{N}} e^{\Re(\lambda_n)t} |\langle \psi_n^*, x_0\rangle| \leq \frac{M}{m} e^{\omega t}\|x_0\|.$$

Теорема доказана. □

Далее мы вычислим сопряженный к симметрически-спектральному оператор в пространствах ℓ_p, $p > 1$.

Предложение 2.5. Пусть A - симметрически-спектральный оператор в пространстве $\ell_p,\ 1 < p < \infty,$ с простыми собственными числами $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $\{\psi_n\}_1^\infty \subset (\ell_p)^*$ – биортогональная к $\{\phi_n\}_1^\infty$ последовательность. Тогда сопряженный оператор $A^* : \ell_q \supset D(A^*) \mapsto \ell_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ имеет следующий вид,

$$A^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n,\ y \in D(A^*),\ \text{причем}$$

$$D(A^*) = \left\{ y \in \ell_q :\ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |\langle \phi_n, y \rangle|^q < \infty \right\}.$$

Доказательство. Для начала заметим, что $\overline{D(A)} = \ell_p$ и сопряженный оператор A^* существует. Поскольку $\{\phi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис ℓ_p, биортогональная последовательность $\{\psi_n\}_1^\infty$ является симметричным базисом $\overline{Lin}\{\psi_n\}_1^\infty \subseteq \ell_q$ (см. [140], предложение 22.5). Но, в силу того, что всякий базис в рефлексивном пространстве – натягивающий (см., например, [140], с. 278, пример 4.3), $\overline{Lin}\{\psi_n\}_1^\infty = \ell_q$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис ℓ_q.

Далее возьмем $x \in D(A)$, $y \in \ell_q$ и зафиксируем. Так как $\{\psi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис ℓ_q, справедливо разложение

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n.$$

Принимая во внимание, что $\langle \psi_n, \phi_m \rangle = \delta_n^m$, имеем, что для всякого N,

$$\begin{aligned}\left\langle y, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \psi_n, x \rangle \phi_n \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n, \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \langle \psi_m, x \rangle \phi_m \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{N} \overline{\lambda_n} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n, x \right\rangle.\end{aligned}$$

Теперь, если $y \in Q = \left\{ y \in \ell_q :\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |\langle \phi_n, y \rangle|^q < \infty \right\}$, то предельным переходом по N получим, что $y \in D(A^*)$ и $A^* y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n$.

Обратно, если $y \in D(A^*)$, то существует $z \in \ell_q$:

$$\langle y, A\phi_n \rangle = \langle z, \phi_n \rangle = \langle y, \lambda_n \phi_n \rangle = \lambda_n \langle y, \phi_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\langle \phi_n, z \rangle = \overline{\lambda_n} \langle \phi_n, y \rangle$, а значит

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, z \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n = A^* y.$$

Отсюда, применяя предложение 2.3, получаем, что $y \in Q$. □

Найдем сопряженный оператор к симметрически-спектральному оператору в пространстве c_0.

Предложение 2.6. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве c_0 с простыми собственными числами $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и соответствующими собственными векторами $\{\phi_n\}_1^\infty$, а $(c_0)^* \supset \{\psi_n\}_1^\infty$ – биортогональная к $\{\phi_n\}_1^\infty$ последовательность. Тогда сопряженный оператор $A^* : \ell_1 \supset D(A^*) \mapsto \ell_1$ имеет следующий вид,

$$A^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle \phi_n, y \rangle \psi_n, \ y \in D(A^*), \text{ причем}$$

$$D(A^*) = \left\{ y \in \ell_1 : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |\langle \phi_n, y \rangle| < \infty \right\}.$$

Доказательство. Заметим, что $\overline{D(A)} = c_0$ и сопряженный оператор A^* существует. Далее, так как $\{\phi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис c_0 и $(c_0)^* = \ell_1$, биортогональная последовательность $\{\psi_n\}_1^\infty$ является симметричным базисом $\overline{Lin}\{\psi_n\}_1^\infty \subseteq \ell_1$ (см. [140], предложение 22.5). Более того, пространство c_0 имеет безусловный базис $(\{e_n\}_1^\infty)$ и $(c_0)^* = \ell_1$ – сепарабельное пространство. Следовательно (см. [85], с. 278), любой безусловный базис пространства c_0 – натягивающий. Таким образом и симметричный базис $\{\phi_n\}_1^\infty$ – натягивающий, а это значит, что $\overline{Lin}\{\psi_n\}_1^\infty = \ell_1$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис всего ℓ_1.

Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения из доказательства предложения 2.5. □

Учитывая тот факт, что $(\ell_1)^* = \ell_\infty$ и пространство ℓ_∞ не обладает базисом, можно сказать, что сопряженный оператор к симметрически-спектральному оператору в пространстве ℓ_1 уже не будет симметрически-спектральным оператором.

Заметим, что пункт (i) теорем 2.1 и 2.8 также означает, что, если A – симметрически-спектральный оператор в ℓ_p или c_0, имеющий собственные значения $\{\lambda_n\}_1^\infty$, которые или вообще не сгущаются, или сгущаются только на бесконечности, то $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_1^\infty$. Иными словами, в этом случае оператор A имеет чисто точечный спектр.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 2.7. Предположим, что линейный оператор A имеет представление (2.4) и $D(A) = \left\{x \in \ell_p : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |\langle \psi_n, x\rangle|^p < \infty\right\}$, где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – различные комплексные числа, $\{\phi_n\}_1^\infty$ – базис ℓ_p, $p > 1$, и $\langle \psi_m, \phi_n\rangle = \delta_n^m$. Если существует $C > 0 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n, x\rangle|^p \leq C\|x\|^p$ для всякого $x \in \ell_p$, то A – замкнутый оператор.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\overline{D(A)} = \ell_p$ и оператор A^* существует. Далее, так как для всякого $j \in \mathbb{N}$, $\phi_j \in D(A)$ и

$$A\phi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \psi_n, \phi_j\rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_n^j \phi_n = \lambda_j \phi_j,$$

то $\{\phi_n\}_1^\infty$ – (все) собственные вектора A и они соответствуют собственным числам $\{\lambda_n\}_1^\infty$. Так как любой базис в рефлексивном пространстве – натягивающий, см. [140, с. 278], то $\{\psi_n\}_1^\infty$ – базис ℓ_q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Поскольку для любых $n, j \in \mathbb{N}$,

$$\langle \psi_n, A\phi_j\rangle = \langle A^*\psi_n, \phi_j\rangle = \langle \psi_n, \lambda_j\phi_j\rangle = \lambda_j\langle \psi_n, \phi_j\rangle = \lambda_j \delta_n^j,$$

то для всякого натурального n

$$A^*\psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_j, A^*\psi_n\rangle \psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda_j} \delta_n^j \psi_j = \overline{\lambda_n}\psi_n.$$

Для доказательства замкнутости A рассмотрим последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset D(A)$, такую, что $x_k \to x^*$ и $Ax_k \to y^*$ при $k \to \infty$. Так как последовательность $\{Ax_k\}_1^\infty$ – ограничена и $A^*\psi_n = \overline{\lambda_n}\psi_n,\ n \in \mathbb{N}$, мы видим, что для любых $k, N \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{n=1}^{N} |\lambda_n\langle\psi_n, x_k\rangle|^p \le C\|Ax_k\|^p \le MC.$ Отсюда, предельным переходом по k, имеем $\sum\limits_{n=1}^{N} |\lambda_n\langle\psi_n, x^*\rangle|^p \le MC,\ N \in \mathbb{N}.$ Следовательно, $\exists \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} |\lambda_n\langle\psi_n, x^*\rangle|^p = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\langle\psi_n, x^*\rangle|^p \le MC,$ а значит $x^* \in D(A).$

Поскольку $x^* \in D(A)$, то $Ax^* \in \ell_p.$ В виду того, что $\{\phi_n\}_1^\infty$ – базис ℓ_p и $\langle\psi_m, \phi_n\rangle = \delta_n^m$,

$$Ax^* = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\psi_n, Ax^*\rangle\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle A^*\psi_n, x^*\rangle\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle\psi_n, x^*\rangle\phi_n.$$

С другой стороны, $y^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle\psi_n, y^*\rangle\phi_n.$ Теперь из равенств

$$\langle\psi_n, Ax_k\rangle = \lambda_n\langle\psi_n, x_k\rangle, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

предельным переходом по $k \to \infty$ получаем равенства

$$\langle\psi_n, y^*\rangle = \lambda_n\langle\psi_n, x^*\rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно $y^* = Ax^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle\psi_n, x^*\rangle\phi_n$ и A – замкнутый оператор. □

Предложение 2.8. Предположим, что линейный оператор A имеет представление (2.4) и $D(A) = \left\{x \in c_0 : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n||\langle\psi_n, x\rangle| < \infty\right\}$, где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – различные комплексные числа, $\{\phi_n\}_1^\infty$ – безусловный базис c_0 и $\langle\psi_m, \phi_n\rangle = \delta_n^m$. Если существует $C > 0 : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle\psi_n, x\rangle| \le C\|x\|$ для всякого $x \in c_0$, то A – замкнутый оператор.

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству предложения 2.7.

В некотором смысле можно сказать, что пункт (ii) теоремы 2.1 и замечания 2.8 допускает обращение. А именно, комбинируя предложения 2.3, 2.4 с предложениями 2.7, 2.8, получаем следующее.

Предложение 2.9. Предположим, что линейный оператор A имеет представление (2.4) и $D(A)$ задается, как в предложениях 2.7 или 2.8, где $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – различные комплексные числа, $\{\phi_n\}_1^\infty$ – симметричный базис ℓ_p или c_0, соответственно, и $\langle\psi_m, \phi_n\rangle = \delta_n^m$. Тогда A – симметрически-спектральный оператор.

Из теорем 2.1, 2.2 и замечания 2.8, на основании предложения 2.9, выводятся следствия о свойствах сопряженных операторов к симметрически-спектральным операторам в ℓ_p и c_0, а также о корректности задач Коши (0.1) для соответствующих операторов.

Следствие 2.1. Если A – симметрически-спектральный оператор в пространстве $\ell_p,\ 1 < p < \infty,$ то A^* – симметрически-спектральный оператор в ℓ_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Следствие 2.2. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве $\ell_p,\ 1 < p < \infty.$ Тогда, задача Коши (2.10) для оператора A – корректна тогда и только тогда, когда корректна задача Коши

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A^*y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

в пространстве ℓ_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Следствие 2.3. Если A – симметрически-спектральный оператор в пространстве $c_0,$ то A^* – симметрически-спектральный оператор в ℓ_1.

Следствие 2.4. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве c_0 и задача Коши (2.10) для оператора A – корректна. Тогда и задача Коши (2.12) в пространстве ℓ_1 также корректна.

2.3. Выводы к разделу

В разделе 2 было введено понятие симметрически-спектрального оператора, обобщающее понятие спектрального по Риссу оператора в гильбертовых пространствах на случай банаховых пространств. Исследованы некоторые свойства симметрически-спектральных операторов в пространствах $\ell_p,\ 1 \le p < \infty,$ и c_0. Получен критерий корректности задачи Коши (2.10) в этих банаховых пространствах с симметрически-спектральным оператором A в правой части дифференциального уравнения. Эти результаты обобщают результаты Р. Кертайн на случай пространств $\ell_p,\ 1 \le p < \infty,$ и c_0. Изучены свойства сопряженных операторов к симметрически-спектральным операторам в пространствах $\ell_p,\ 1 < p < \infty,$ и c_0, а также связь корректности задачи Коши (2.10) с корректностью задачи Коши (2.12). Результаты будут в дальнейшем использованы в разделе 4.

РАЗДЕЛ 3

КЛАСС ГЕНЕРАТОРОВ C_0-ГРУПП С ПОЛНЫМ, НО НЕБАЗИСНЫМ СЕМЕЙСТВОМ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

В этом разделе будет представлен класс генераторов C_0-групп с собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, удовлетворяющими условиям

$$\lim_{n\to\infty} i\lambda_n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0, \tag{3.1}$$

и полным, минимальным, но не равномерно минимальным, а значит и небазисным семейством соответствующих собственных векторов. Класс будет представлен не только в специальных гильбертовых пространствах, но и в банаховых пространствах особой структуры. Основные результаты раздела 3 – это теоремы 3.1, 3.3, 3.4, 3.6, 3.7, предложения 3.7, 3.8, а также следствия 3.3, 3.4, 3.7 и 3.8.

3.1. Пространства $H_k(\{e_n\})$ и $\ell_{p,k}(\{e_n\})$

В этом подразделе будут представлены гильбертовы ($H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$) и банаховы ($\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$) пространства специальной структуры, а также доказаны предварительные результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение 3.1. Пусть X – банахово пространство с базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Назовем оператор T, определенный в X формулой

$$Te_n = e_{n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

оператором правого сдвига, ассоциированным с базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В частности, если $X = \ell_p$, а $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает канонический базис ℓ_p, то оператор правого сдвига, ассоциированный с базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, будет классическим оператором правого сдвига в ℓ_p.

Рассмотрим некоторый базис Рисса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H и оператор правого сдвига T, ассоциированный с $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Заметим, что, используя характеристическое свойство базиса Рисса (см. предложение 1.1), пространство H есть ни что иное, как

$$H = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n : \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \right\}.$$

Введем на множестве всех $x \in H$ новую норму следующим равенством,

$$\|x\|_k = \left\| (I-T)^k x \right\|, \; k \in \mathbb{N},$$

и обозначим множество $x \in H$ с этой нормой символом $H_k^0(\{e_n\})$.

Отметим, что, так как $0 \in \sigma\left((I-T)^k\right)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то пространство $H_k^0(\{e_n\})$ является линейным нормированным пространством, однако неполным. Если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H$, то

$$\begin{aligned}\|x\|_k &= \left\| (I-T)^k \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e_n - C_k^1 e_{n+1} + \cdots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} e_{n+k-1} + (-1)^k e_{n+k} \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - C_k^1 c_{n-1} + \cdots + (-1)^{k+1} C_k^{k-1} c_{n-k+1} + (-1)^k c_{n-k} \right) e_n \right\|.\end{aligned}$$

Здесь для $j \in \mathbb{N}$ мы положим $c_{1-j} = 0$.

Распространим оператор сдвига T на множество формальных рядов $(\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ следующим образом:

$$T(\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{n+1}.$$

Далее, для всякого $k \in \mathbb{N}$ введем линейное пространство $H_k(\{e_n\})$, состоящее из всевозможных формальных рядов $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ (которые можно представлять себе как последовательности $(c_1, c_2, c_3, \dots)$), таких, что

$$\left\{ c_n - C_k^1 c_{n-1} + \cdots + (-1)^{k+1} C_k^{k-1} c_{n-k+1} + (-1)^k c_{n-k} \right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

с нормой $\|x\|_k = \left\|(\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|_k =$

$$\left\|(I-T)^k\,(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - C_k^1 c_{n-1} + \dots + (-1)^k c_{n-k}\right) e_n\right\|, \quad (3.2)$$

$x \in H_k(\{e_n\})$. Далее будет показано, что пространство $H_k(\{e_n\})$ – пополнение пространства $H_k^0(\{e_n\})$ по норме $\|\cdot\|_k$.

Пример 3.1. Пусть $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса в H. Тогда $(\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e_n \in H_1(\{e_n\})$.

В самом деле, для $\alpha = 0$ этот факт – очевиден. Если же $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, то

$$n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha} \sim c_{\alpha} n^{\alpha-1},\ n \to \infty,$$

где c_{α} – константа, зависящая от α. Следовательно, $\{n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ и поэтому $(\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e_n \in H_1(\{e_n\})$.

В частном случае, когда $H = \ell_2$, а $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – канонический базис ℓ_2, $H_k(\{e_n\}) = \ell_2(\Delta^k)$ [40, 80]. Пространство последовательностей $\ell_2(\Delta^k)$ – это пространство, состоящее из всех последовательностей с 2-абсолютно суммируемыми разностями k-того порядка. Норма в этом пространстве задается так, $\|x\|_{\ell_2(\Delta^k)} = \|\Delta^k x\|_{\ell_2}$, где Δ – разностный оператор,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

см. [40, 80], а также более раннюю работу [45] (2003 г.), в которой был рассмотрен только случай $k = 1$. Иными словами, $\ell_2(\Delta^k) = \left\{x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} :\ \Delta^k x \in \ell_2\right\}$. Заметим, что $\Delta = I - T$ где T – классический оператор правого сдвига в ℓ_2.

Таким образом, в общем случае пространство $H_k(\{e_n\})$ представляется в следующем виде,

$$H_k(\{e_n\}) = \left\{ x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n : \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta^k) \right\},\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Следовательно, наш класс пространств $H_k(\{e_n\})$ по сути такой же, как и класс пространств $\ell_2(\Delta^k)$, $k \in \mathbb{N}$, изучавшийся ранее в работах Б. Алтая, Ф. Башара, М. Иманинежада и М. Мири [40, 45, 80]. Отметим, что в монографии [13] пространство $\ell_1(\Delta)$ обозначается bv.

Замечание 3.1. Линейное пространство всех последовательностей $(c_1, c_2, c_3, \dots)^T$, таких, что норма

$$\left\|(c_1, c_2, c_3, \dots)^T\right\| = \left(|c_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |c_n - c_{n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

конечна, независимо появилось в совместной с моим научным руководителем работе. Однако, позже выяснилось, что такие пространства уже рассматривались и изучались ранее в работах [40, 45, 80].

Предложение 3.1. Пространство $H_k(\{e_n\})$ – пространство Гильберта, изоморфное ℓ_2.

Доказательство. Зафиксируем $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_k(\{e_n\})$ и обозначим $(\Delta^k c)_n = c_n - C_k^1 c_{n-1} + \dots + (-1)^k c_{n-k}$. Комбинируя (3.2) со свойством базиса Рисса в H (см. предложение 1.1), мы получим следующее неравенство

$$m\sum_{n=1}^{\infty} \left|(\Delta^k c)_n\right|^2 \le \|x\|_k^2 \le M\sum_{n=1}^{\infty} \left|(\Delta^k c)_n\right|^2. \tag{3.4}$$

Рассмотрим линейное отображение

$$S : H_k(\{e_n\}) \ni x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \mapsto (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n \epsilon_n = (c_1, c_2, c_3, \dots)^T \in \ell_2(\Delta^k),$$

где $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – канонический базис ℓ_2. Из двойного неравенства (3.4) следует, что S осуществляет изоморфизм между $H_k(\{e_n\})$ и $\ell_2(\Delta^k)$. Далее, поскольку $\ell_2(\Delta^k)$ изометрично изоморфно ℓ_2, см. [80], то $H_k(\{e_n\})$ изоморфно ℓ_2. Следовательно, $H_k(\{e_n\})$ – сепарабельное пространство Гильберта со скалярным произведением, которое определяется следующим образом,

$$\langle x, y\rangle_k = \left\langle (I-T)^k x, (I-T)^k y \right\rangle, \; x, y \in H_k(\{e_n\}).$$

□

В частном случае, когда $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H, $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, а $y = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n e_n \in H_k(\{e_n\})$, мы будем иметь

$$\langle x, y\rangle_k = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - C_k^1 c_{n-1} + \dots + (-1)^k c_{n-k})(\overline{d}_n - C_k^1 \overline{d}_{n-1} + \dots + (-1)^k \overline{d}_{n-k}).$$

В дальнейшем будут существенно использоваться следующие свойства последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$.

Предложение 3.2. Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, обладает следующими свойствами.

1. $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = H_k(\{e_n\})$.
2. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом $H_k(\{e_n\})$.

Доказательство. Докажем это утверждение в случае, когда $k = 1$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – канонический базис ℓ_2 и $H_1(\{e_n\}) = \ell_2(\Delta)$. Доказательство в общем случае проводится аналогичным образом.

1. Известно, что последовательность $\vartheta_1 = (1, 1, 1, 1, \dots)^T$, $\vartheta_2 = (0, 1, 1, 1, \dots)^T$, $\vartheta_3 = (0, 0, 1, 1, \dots)^T$, $\vartheta_4 = (0, 0, 0, 1, \dots)^T$, $\dots$ образует базис пространства $\ell_2(\Delta)$, см. [45, 80]. Покажем, что любой элемент этой последовательности можно с любой наперед заданной точностью приблизить элементами из $Lin\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. В самом деле, для всякого ϑ_j найдется последовательность элементов $\{x_j^n\}_{n=1}^{\infty} \subset Lin\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида

$$x_j^n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) e_{j+i-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

такая, что

$$\left\|\vartheta_j - x_j^n\right\|^2_{\ell_2(\Delta)} = \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} e_{j+i-1} + (\mathfrak{f}) \sum_{i=j+n}^{\infty} e_i\right\|^2_{\ell_2(\Delta)} = \frac{1}{n} \to 0,$$

если $n \to \infty$. Поскольку $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис $\ell_2(\Delta)$, то $\overline{Lin}\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty} = \ell_2(\Delta)$. Следовательно $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \ell_2(\Delta)$.

2. Предположим, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом $\ell_2(\Delta)$. Тогда для всякого $x \in \ell_2(\Delta)$ справедливо $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Поскольку $\|e_n\|_1 = \sqrt{2}$ для любого n, то, на основании необходимого условия сходимости ряда, имеем $c_n \to 0$, при $n \to \infty$. Рассмотрев $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n = (1,1,1,1,\dots)^T \in \ell_2(\Delta)$, получим равенство

$$(1,1,1,1,\dots)^T = (c_1, c_2, c_3, c_4, \dots)^T,$$

где $c_n \to 0$, при $n \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом $\ell_2(\Delta)$. $\square$

Предложение 3.3. Пространство $H_k(\{e_n\})$ – пополнение пространства $H_k^0(\{e_n\})$ по норме $\|\cdot\|_k$.

Доказательство. Поскольку $\ell_2 \subset \ell_2(\Delta^k)$ для любого k, то $H \subset H_k(\{e_n\})$. Таким образом на элементах из H нормы пространств $H_k^0(\{e_n\})$ и $H_k(\{e_n\})$ – совпадают. Так как $H_k(\{e_n\})$ – полное пространство в силу предложения 3.1, то для завершения доказательства остается показать, что $H_k^0(\{e_n\})$ всюду плотно в $H_k(\{e_n\})$. Это следует из пункта 1 предложения 3.2. $\square$

Из вышенаписанного становится понятной природа пространства $\ell_2(\Delta^k)$. А именно, пространство $\ell_2(\Delta^k)$ возникает, как естественное пополнение пространства $(\ell_2)_k^0(\{e_n\})$ по норме $\|\cdot\|_k$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – канонический базис ℓ_2.

Напомним следующие определения.

Определение 3.2. [102] Последовательность элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется минимальной, если для всякого n,

$$\rho\left(e_n, \overline{Lin}\{e_j\}_{j\neq n}\right) > 0,$$

где ρ – расстояние в пространстве X.

Определение 3.3. [94] Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X называют равномерно минимальной, если

$$\inf_n \rho\left(e_n, \overline{Lin}\{e_j\}_{j\neq n}\right) > 0.$$

Пусть $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ – последовательность, биортогональная к $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в исходном пространстве H. Тогда в пространстве $H_k(\{e_n\})$ можно определить оператор T^* и $e_n^* \in D\left((I-T)^{-k}(I-T^*)^{-k}\right)$ для любого k. К примеру, в пространстве $\ell_2(\Delta^k)$ этот факт следует из явного вида операторов $(I-T)^{-k}$ и $(I-T^*)^{-k}$, а именно,

$$(I-T)^{-k} = \Delta^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ C_k^1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ C_{k+1}^2 & C_k^1 & 1 & 0 & \dots \\ C_{k+2}^3 & C_{k+1}^2 & C_k^1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (I-T^*)^{-k} = \left(\Delta^{-k}\right)^T,$$

см. [80]. Аналогичным образом это можно показать и в произвольном пространстве $H_k(\{e_n\})$. Эти наблюдения приводят нас к следующему.

Замечание 3.2. Пространства $H_k(\{e_n\})$ обладают следующими свойствами.

1. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственную биортогональную последовательность
$$\left\{\chi_n = (I-T)^{-k}(I-T^*)^{-k} e_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$$
в $H_k(\{e_n\})$.

2. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – минимальна, но не равномерно минимальна в $H_k(\{e_n\})$, а $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – равномерно минимальная последовательность в $H_k(\{e_n\})$.

3. $H \subset H_1(\{e_n\}) \subset H_2(\{e_n\}) \subset H_3(\{e_n\}) \subset \dots$.

Непосредственно проверяется, что

$$\langle e_n, \chi_j \rangle_k = \left\langle (I-T)^k e_n, (I-T)^k (I-T)^{-k} (I-T^*)^{-k} e_j^* \right\rangle = \delta_n^j.$$

Единственность последовательности $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует из пункта 1 предложения 3.2. Заметим, что $\sup\limits_n \|e_n\|_k < \infty$, в то время, как $\sup\limits_n \|\chi_n\|_k = \infty$. Отсюда следует пункт 2, см. [94]. Пункт 3 следует из цепочки строгих включений $\ell_2 \subset \ell_2(\Delta) \subset \ell_2(\Delta^2) \subset \ell_2(\Delta^3) \subset \dots$, см. [80].

Пример 3.2. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис H, то последовательность

$$\left\{ (I-T)^{-k} e_n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

формирует ортонормированный базис $H_k(\{e_n\})$.

Замечание 3.3. Интересным является вопрос о явном виде (ограниченного) нериссовского базиса в $H_k(\{e_n\})$. Отметим, что первый пример ограниченного нериссовского базиса в гильбертовом пространстве возник только в 1948 году в работе К. И. Бабенко [3]. Он показал, что для всякого $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$, система функций $\{f_n(t) = |t|^{\alpha} e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ образует ограниченный нериссовский базис в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Этот пример в дальнейшем был значительно расширен и обобщен В. Ф. Гапошкиным в работе [8]. Наконец, А. М. Олевским в статье [28] был найден довольно широкий класс операторов, порождающих нериссовские базисы в H. Поскольку пространство $L_2(-\pi, \pi)$ изоморфно ℓ_2 и $H_k(\{e_n\})$ изоморфно ℓ_2, то существует изоморфизм S, отображающий $L_2(-\pi, \pi)$ на $H_k(\{e_n\})$. Тогда система $\{Sf_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ будет ограниченным нериссовским базисом пространства $H_k(\{e_n\})$.

Перейдем теперь к описанию специальных пространств Банаха $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, которые необходимы для распространения нашей конструкции на случай банаховых пространств.

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фиксированный симметричный базис пространства $\ell_p,\ p \geq 1,$ а T – оператор правого сдвига, ассоциированный с базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Введем на множестве всех $x \in \ell_p$ новую норму следующим равенством,

$$\|x\|_k = \left\|(I-T)^k x\right\|,\ k \in \mathbb{N},$$

и обозначим множество $x \in \ell_p$ с этой нормой символом $\ell_{p,k}^0(\{e_n\})$. Подобно тому, как вводились гильбертовы пространства $H_k(\{e_n\})$, мы вводим банахово пространство $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p \geq 1,\ k \in \mathbb{N},$ как пополнение линейного пространства $\ell_{p,k}^0(\{e_n\})$.

На основании предложения 2.3 мы получаем, что для всякого $p \geq 1,$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in \ell_p \quad \Longleftrightarrow \quad \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Следовательно, рассуждая также, как и в случае пространств $H_k(\{e_n\})$, мы заключаем, что для всякого $k \in \mathbb{N},$

$$\ell_{p,k}(\{e_n\}) = \left\{x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n :\ \left\{c_n - C_k^1 c_{n-1} + \cdots + (-1)^k c_{n-k}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p\right\}$$

является пространством Банаха с нормой

$$\|x\|_k = \left\|(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|_k = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - C_k^1 c_{n-1} + \cdots + (-1)^k c_{n-k}\right) e_n\right\|.$$

Заметим, что, если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – канонический базис $\ell_p,$ то $\ell_{p,k}(\{e_n\}) = \ell_p(\Delta^k)$, где $\ell_p(\Delta^k)$ – пространство, состоящее из всех последовательностей с p-абсолютно суммируемыми разностями k-того порядка, с нормой $\|x\|_{\ell_p(\Delta^k)} = \|\Delta^k x\|_{\ell_p},$ см. [40, 45, 80]. В других терминах, $\ell_p(\Delta^k) = \left\{x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} :\ \Delta^k x \in \ell_p\right\}$. Таким образом,

$$\ell_{p,k}(\{e_n\}) = \left\{x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n :\ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta^k)\right\},\ p \geq 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Во всех случаях, кроме $p = 2$, пространство $\ell_p(\Delta^k)$ не является пространством со скалярным произведением, см. [80]. Следовательно, при

$1 \le p \ne 2$, пространство $\ell_{p,k}(\{e_n\})$ не обладает скалярным произведением, и, таким образом, не является гильбертовым пространством. С другой стороны, $\ell_{2,k}(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, является гильбертовым пространством, так как $\ell_{2,k}(\{e_n\}) = H_k(\{e_n\})$, где $H = \ell_2$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса в ℓ_2.

Основные свойства последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\ell_{p,k}(\{e_n\})$ указаны в следующем утверждении.

Предложение 3.4. 1. Если $p > 1$, то $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \ell_{p,k}(\{e_n\})$.

2. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом $\ell_{p,k}(\{e_n\})$.

3. Если $p > 1$, то $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет биортогональную последовательность

$$\left\{\chi_n = (I - T)^{-k} (I - T^*)^{-k} e_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$$

в $(\ell_{p,k}(\{e_n\}))^*$, где $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ – биортогональный к $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ базис ℓ_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. Если $p > 1$, то $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – минимальная, но не равномерно минимальная последовательность в $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, а $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – равномерно минимальная последовательность в $(\ell_{p,k}(\{e_n\}))^*$.

5. $\ell_p \subset \ell_{p,1}(\{e_n\}) \subset \ell_{p,2}(\{e_n\}) \subset \ell_{p,3}(\{e_n\}) \subset \dots$.

6. $\ell_{p,k}(\{e_n\})$ – пространство Банаха, изоморфное ℓ_p.

Доказательство пунктов 1 и 2 предложения 3.4 подобно доказательству предложения 3.2. Доказательство пунктов 3, 4 и 5 основано на таких же рассуждениях, что и аргументация соответствующих пунктов замечания 3.2, а доказательство пункта 6 подобно доказательству предложения 3.1.

3.2. Конструкция генератора C_0-группы с простым спектром $\{i\ln n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $H_1(\{e_n\})$

Определим оператор $A: H_1(\{e_n\}) \supset D(A) \mapsto H_1(\{e_n\})$ формулой

$$Ax = A(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} i\ln n\cdot c_n e_n, \tag{3.5}$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{ x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\}) :\ \{\ln n\cdot c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta) \right\}. \tag{3.6}$$

Отметим, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные векторы A, соответствующие собственным числам $\{i\ln n\}_{n=1}^{\infty}$. Как показано в предложении 3.2, $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = H_1(\{e_n\})$, а значит $\overline{D(A)} = H_1(\{e_n\})$, однако при этом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом пространства $H_1(\{e_n\})$.

Центральным результатом данной диссертации является следующая теорема. В ней представлена конструкция генератора C_0-группы, собственные векторы которого полны и при этом не образуют базис Шаудера.

Теорема 3.1. Оператор A, определенный формулой (3.5), с областью определения (3.6), генерирует C_0-группу $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $H_1(\{e_n\})$, действие которой задается для всех $t\in\mathbb{R}$ формулой

$$e^{At}x = e^{At}(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} e^{it\ln n} c_n e_n. \tag{3.7}$$

Доказательство. Напомним, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса исходного пространства H, а значит, в силу предложения 1.1, существуют константы $M \geq m > 0$, такие, что для любого $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n \in H$,

$$m\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 \leq M\|x\|^2. \tag{3.8}$$

Напомним, что в пространстве $H_1(\{e_n\})$ норма элемента $x =$

$(\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_ne_n\in H_1(\{e_n\})$ вычисляется следующим образом,

$$\|x\|_1=\left\|(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty}c_ne_n\right\|_1=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})\,e_n\right\|, \tag{3.9}$$

где $c_0=0$. Рассмотрим $x=(\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_ne_n\in H_1(\{e_n\})$. Зафиксируем $t\in\mathbb{R}$ и докажем, что $(\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{it\ln n}c_ne_n\in H_1(\{e_n\})$. В силу (3.9)

$$\left\|(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty}e^{it\ln n}c_ne_n\right\|_1=\left\|c_1e_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{it\ln n}c_n-e^{it\ln(n-1)}c_{n-1}\right)e_n\right\|$$
$$=\left\|c_1e_1+\sum_{n=2}^{\infty}(e^{it\ln n}c_n-e^{it\ln n}c_{n-1}+e^{it\ln n}c_{n-1}-e^{it\ln(n-1)}c_{n-1})e_n\right\|$$
$$\le\left\|\sum_{n=1}^{\infty}e^{it\ln n}(c_n-c_{n-1})e_n\right\|+\left\|\sum_{n=2}^{\infty}(e^{it\ln n}-e^{it\ln(n-1)})c_{n-1}e_n\right\|=\Xi_1+\Xi_2(t).$$

Первое слагаемое оценивается сразу на основании (3.8),

$$\Xi_1^2\le\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}|(c_n-c_{n-1})|^2\le\frac{M}{m}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n-1})e_n\right\|^2=\frac{M}{m}\|x\|_1^2. \tag{3.10}$$

Далее, поскольку $e^{it\ln n}-e^{it\ln(n-1)}=e^{it\ln n}\left(1-e^{it\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)$ верно для всех $n\ge 2$, то, на основании (3.8) будем иметь

$$\Xi_2^2(t)\le\frac{1}{m}\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(1-e^{it\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)c_{n-1}\right|^2=\frac{1}{m}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\left|1-e^{it\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right|^2}{t^2}\frac{t^2}{n^2}|c_{n-1}|^2.$$

Введем обозначение $\xi_n(t)=\frac{n^2\left|1-e^{it\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right|^2}{t^2}$. Заметим, что при $r\ge 2$ верно $r\left|\ln\left(1-\frac{1}{r}\right)\right|\le 2$, и для всех $s\in\mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\sin^2 s\le s^2,\qquad (1-\cos s)^2\le s^2.$$

Поэтому при всех $t\in\mathbb{R}$ и $n\ge 2$ верно

$$\xi_n(t)=\frac{n^2}{t^2}\left(\left(1-\cos\left(t\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^2+\sin^2\left(t\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
$$\le\frac{n^2}{t^2}\left(2\left(t\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2\right)=2n^2\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2\le 8.$$

Таким образом,

$$\Xi_2^2(t) \leq \frac{8t^2}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_{n-1}|^2}{n^2}.$$

Теперь, чтобы оценить $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{|c_{n-1}|^2}{n^2}$ через $C \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n-1}|^2$, мы замечаем, что

$$c_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} (c_j - c_{j-1}), \quad n \geq 2,$$

и сначала оцениваем $\Xi_2^2(t)$ так,

$$\Xi_2^2(t) \leq \frac{8t^2}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_{n-1}|^2}{n^2} \leq \frac{8t^2}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{j=1}^{n-1} (c_j - c_{j-1}) \right|^2$$

$$\leq \frac{8t^2}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} |c_j - c_{j-1}| \right)^2 \leq \frac{8t^2}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |c_j - c_{j-1}| \right)^2.$$

Ключевым моментом доказательства является применение в этом месте дискретного неравенства Харди (1.6) для $p = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{3.11}$$

Получаем

$$\Xi_2^2(t) \leq \frac{8t^2}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |c_j - c_{j-1}| \right)^2 \leq \frac{32t^2}{m} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c_{n-1}|^2$$

$$\leq \frac{32Mt^2}{m} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) e_n \right\|^2 = \frac{32Mt^2}{m} \|x\|_1^2.$$

Комбинируя эту оценку с (3.10), приходим к следующему,

$$\left\| (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{it \ln n} c_n e_n \right\|_1^2 \leq (\Xi_1 + \Xi_2(t))^2 \leq 2\Xi_1^2 + 2\Xi_2^2(t) \leq \frac{2M}{m} \left(1 + 32t^2\right) \|x\|_1^2.$$

Эта оценка показывает, что мы можем определить однопараметрическое семейство операторов $e^{At} \in [H_1(\{e_n\})]$, $t \in \mathbb{R}$, формулой

$$e^{At} x = e^{At} (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{it \ln n} c_n e_n,$$

а также, что для всех $t \in \mathbb{R}$ верна оценка

$$\left\|e^{At}\right\| \leq \sqrt{\frac{2M}{m}}\sqrt{1+32t^2}. \tag{3.12}$$

Следующим шагом, докажем, что семейство операторов $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ обладает свойством сильной непрерывности в нуле. Для этого заметим, что для всякого $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\})$,

$$\begin{aligned}
\|e^{At}x - x\|_1 &= \left\|\sum_{n=2}^{\infty}((e^{it\ln n}-1)c_n - (e^{it\ln(n-1)}-1)c_{n-1})e_n\right\| \\
&= \left\|\sum_{n=2}^{\infty}((e^{it\ln n}-1)(c_n - c_{n-1})e_n + \sum_{n=2}^{\infty}(e^{it\ln n} - e^{it\ln(n-1)})c_{n-1}e_n\right\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|e^{it\ln n}-1|^2|c_n - c_{n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left\|\sum_{n=2}^{\infty}(e^{it\ln n} - e^{it\ln(n-1)})c_{n-1}e_n\right\| \\
&= \Upsilon(t) + \Xi_2(t).
\end{aligned}$$

Рассмотрим оператор $G : H \supset D(G) \mapsto H,$ заданный формулой

$$Gy = G\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} i\ln n \cdot a_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H,$$

с областью определения $D(G) = \left\{y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H :\ \{a_n \ln n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2\right\}$. Нетрудно показать, что G генерирует C_0-группу $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в H, действие которой задается формулой

$$T(t)y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{it\ln n} a_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H,$$

см. также [53]. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{e^{it\ln n}-1}{t} - i\ln n\right|^2 |a_n|^2 \to 0 \tag{3.13}$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|e^{it\ln n}-1|^2|a_n|^2 \to 0$ при $t \to 0,$ а значит $\Upsilon(t) \to 0,$ когда $t \to 0.$ Поскольку $\Xi_2(t) \to 0$ при $t \to 0,$ то свойство сильной непрерывности в нуле для семейства $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ доказано. Отметим, что $e^{A\cdot 0} = I$ и групповое свойство для семейства $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ очевидно выполняется. Таким образом $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ – C_0-группа в $H_1(\{e_n\})$.

Проверим, что A – инфинитезимальный генератор сконструированной C_0-группы $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Для этого необходимо показать, что $D(A) = E,$ где $E = \left\{x \in H_1(\{e_n\}) : \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{At}x - x}{t}\right\}$ и что для всякого $x \in D(A)$ имеем

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{e^{At}x - x}{t}. \tag{3.14}$$

Пусть $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in D(A)$. Тогда, в силу (3.6), имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n \ln n - c_{n-1} \ln(n-1)|^2 < \infty.$$

Обозначим $\gamma_n = c_n \ln n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)$ и $c_n = \frac{\gamma_n}{\ln n},$ $n \geq 2.$ Следовательно, для всех $n \geq 3,$

$$(\ln n + \ln(n-1))\,|c_{n-1}| = \frac{|\gamma_{n-1}| \ln n}{\ln(n-1)} + \frac{|\gamma_{n-1}| \ln(n-1)}{\ln(n-1)} \leq 3\,|\gamma_{n-1}|. \tag{3.15}$$

Теперь докажем, что выполнено равенство (3.14):

$$\left\| \frac{e^{At}x - x}{t} - Ax \right\|_1^2 = \left\| (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{it\ln n} - 1}{t} - i \ln n \right) c_n e_n \right\|_1^2$$

$$\leq \frac{1}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \left(\frac{e^{it\ln n} - 1}{t} - i\ln n \right) c_n - \left(\frac{e^{it\ln(n-1)} - 1}{t} - i\ln(n-1) \right) c_{n-1} \right|^2$$

$$\leq \frac{2}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{e^{it\ln n} - 1}{t} - i\ln n \right|^2 |c_n - c_{n-1}|^2$$

$$+ \frac{2}{m} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{e^{it\ln n} - e^{it\ln(n-1)}}{t} - (i\ln n - i\ln(n-1)) \right|^2 |c_{n-1}|^2 = \Xi_3(t) + \frac{2\Theta(t)}{m}.$$

Отметим, что, на основании (3.13), $\Xi_3(t) \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому нам достаточно доказать, что $\Theta(t) \to 0$ при $t \to 0.$

Для этого отметим, что для всех $n \geq 2$ верно

$$\left| \frac{e^{it\ln n} - e^{it\ln(n-1)}}{t} - i\ln n + i\ln(n-1) \right|^2 = \frac{(\cos(t\ln n) - \cos(t\ln(n-1)))^2}{t^2}$$

$$+ \left(\frac{\sin(t\ln n) - \sin(t\ln(n-1))}{t} - \ln n + \ln(n-1) \right)^2 = \widetilde{\theta}_n(t) + \widetilde{\widetilde{\theta}}_n(t).$$

Функции $\widetilde{\theta}_n(t)$ оцениваются при всех $t \in \mathbb{R}$ и $n \geq 2$ следующим образом,

$$\widetilde{\theta}_n(t) = \frac{4}{t^2}\left(\sin\frac{t\,(\ln n + \ln(n-1))}{2}\right)^2\left(\sin\frac{t\,(\ln n - \ln(n-1))}{2}\right)^2$$
$$\leq 2^{-2}\,(\ln n + \ln(n-1))^2\,(\ln n - \ln(n-1))^2\,t^2.$$

В силу теоремы Лагранжа о среднем значении, функции $\widetilde{\widetilde{\theta}}_n(t)$ оцениваются при всех $t \in \mathbb{R}$ и $n \geq 2$ следующим образом:

$$\widetilde{\widetilde{\theta}}_n(t) = \left(\frac{(\sin(t\ln n) - t\ln n) - (\sin(t\ln(n-1)) - t\ln(n-1))}{t}\right)^2$$
$$\leq \frac{(\cos(\theta t\ln n + (1-\theta)t\ln(n-1)) - 1)^2\,(t\ln n - t\ln(n-1))^2}{t^2}$$
$$\leq (\theta t\ln n + (1-\theta)t\ln(n-1))^2\,(\ln n - \ln(n-1))^2$$
$$\leq (\ln n + \ln(n-1))^2\,(\ln n - \ln(n-1))^2\,t^2, \quad \text{где} \quad \theta \in (0,1)\,.$$

Из этих оценок, на основании (3.15), принимая во внимание, что $n^2\,(\ln n - \ln(n-1))^2 \leq 4$ при всех $n \geq 2$, мы получаем следующее,

$$\Theta(t) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\widetilde{\theta}_n(t) + \widetilde{\widetilde{\theta}}_n(t)\right)|c_{n-1}|^2$$
$$\leq \frac{5t^2}{4}\left((\ln 2)^4\,|c_1|^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(\ln n + \ln(n-1))^2\,|c_{n-1}|^2\,(\ln n - \ln(n-1))^2\right)$$
$$\leq \frac{45t^2}{4}\left((\ln 2)^4\,|c_1|^2 + \sum_{n=3}^{\infty} n^2\,(\ln n - \ln(n-1))^2\,\frac{|\gamma_{n-1}|^2}{n^2}\right)$$
$$\leq 45t^2\left((\ln 2)^4\,|c_1|^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{|\gamma_{n-1}|^2}{n^2}\right).$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при оценке $\Xi_2^2(t)$, мы заключаем, что

$$\Theta(t) \leq 180t^2\left((\ln 2)^4\,|c_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}|\gamma_n - \gamma_{n-1}|^2\right) \to 0$$

при $t \to 0$, поскольку $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)$. Таким образом $\Theta(t) \to 0$ при $t \to 0$, $D(A) \subset E$ и $Ax = \lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{At}x - x}{t}$, когда $x \in D(A)$.

Обратно, пусть $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in E$. Обозначим $z = \lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{At}x-x}{t} \in H_1(\{e_n\})$. Тогда $z = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n e_n$, где $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)$. Условие $\left\|\frac{e^{At}x-x}{t} - z\right\|_1 \to 0,\ t\to 0$, влечет

$$|z_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{e^{it\ln n}-1}{t}c_n - z_n - \frac{e^{it\ln(n-1)}-1}{t}c_{n-1} + z_{n-1}\right|^2 \to 0, \quad t\to 0.$$

Следовательно, $z_1 = 0$ и для всякого $n\geq 2$ имеем

$$\left|\frac{e^{it\ln n}-1}{t}c_n - z_n - \frac{e^{it\ln(n-1)}-1}{t}c_{n-1} + z_{n-1}\right| \to 0, \quad t\to 0.$$

Отметим, что $\left|\frac{e^{it\ln n}-1}{t}c_n - z_n\right| \leq \left|\frac{e^{it\ln n}-1}{t}c_n - z_n - \frac{e^{it\ln(n-1)}-1}{t}c_{n-1} + z_{n-1}\right| + \left|\frac{e^{it\ln(n-1)}-1}{t}c_{n-1} - z_{n-1}\right|$ при $n\geq 2$. Поскольку $\frac{e^{it\ln 1}-1}{t}c_1 - z_1 = 0$, то из последенего неравенства при $n=2$ мы получаем, что $\left|\frac{e^{it\ln 2}-1}{t}c_2 - z_2\right| \to 0$ при $t\to 0$. Применяя это неравенство последовательно при $n = 3, 4, \ldots$, в результате получим соотношения $\left|\frac{e^{it\ln n}-1}{t}c_n - z_n\right| \to 0,\ t\to 0,\ n\geq 2$. Отсюда предельным переходом при $t\to 0$ получаем равенства

$$z_n = ic_n\ln n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Поэтому $z = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} i\ln n\cdot c_n e_n$. Это означает, что $x\in D(A)$ и $z = Ax$.

Таким образом A – генератор сконструированной C_0-группы $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ и теорема полностью доказана.

$\square$

В следующей теореме устанавливается вид резольвенты для генератора A из теоремы 3.1, а также будет дан ответ на вопрос о расположении спектра и резольвентного множества A на комлексной плоскости.

Теорема 3.2. Пусть A – оператор, определенный формулой (3.5), с областью определения (3.6). Тогда $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{i\ln n\}_1^{\infty}$ и

$$(A-\lambda I)^{-1}x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i\ln n - \lambda}c_n e_n, \quad \lambda\in\rho(A), \tag{3.16}$$

где $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\})$.

Доказательство. Докажем, что $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{i\ln n\}_1^{\infty}$ – резольвентное множество оператора A и $A_\lambda x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i\ln n-\lambda} c_n e_n,$ где $\lambda \neq i\ln n$, $n \in \mathbb{N}$, и $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\})$, является резольвентой оператора A.

С этой целью обозначим $\lambda_n = i\ln n,\ n \in \mathbb{N}$, и заметим, что $c_0 = 0$ и

$$\|A_\lambda x\|_1^2 = \left\|(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n e_n}{\lambda_n-\lambda}\right\|_1^2 = \left\|\frac{c_1 e_1}{\lambda_1-\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{c_n}{\lambda_n-\lambda} - \frac{c_{n-1}}{\lambda_{n-1}-\lambda}\right)e_n\right\|^2$$

$$= \left\|\frac{c_1 e_1}{\lambda_1-\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{c_n}{\lambda_n-\lambda} - \frac{c_{n-1}}{\lambda_n-\lambda} + \frac{c_{n-1}}{\lambda_n-\lambda} - \frac{c_{n-1}}{\lambda_{n-1}-\lambda}\right)e_n\right\|^2$$

$$\le \left[\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{\lambda_n-\lambda}e_n\right\| + \left\|\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n-\lambda} - \frac{1}{\lambda_{n-1}-\lambda}\right)c_{n-1}e_n\right\|\right]^2$$

$$= [\Sigma_1 + \Sigma_2]^2 \le 2\Sigma_1^2 + 2\Sigma_2^2,$$

Рассмотрим $\lambda :\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| \ge a > 0$. На основании (3.8) имеем

$$\Sigma_1^2 \le \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n-c_{n-1}|^2}{|\lambda_n-\lambda|^2} \le \frac{1}{ma^2}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n-c_{n-1}|^2 \le \frac{M}{ma^2}\|x\|_1^2. \tag{3.17}$$

Поскольку $\frac{1}{\lambda_n-\lambda} - \frac{1}{\lambda_{n-1}-\lambda} = \frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_{n-1}-\lambda)}$ при $n \ge 2$, будем иметь

$$\Sigma_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\lambda_{n-1}-\lambda_n|^2|c_{n-1}|^2}{|\lambda_n-\lambda|^2|\lambda_{n-1}-\lambda|^2} \le \frac{1}{ma^4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|c_{n-1}|^2}{n^2}n^2|\ln(n-1)-\ln n|^2.$$

Так как $n^2|\ln(n-1)-\ln n|^2 \le 4$ при $n \ge 2$, то

$$\Sigma_2^2 \le \frac{4}{ma^4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|c_{n-1}|^2}{n^2} = \frac{4}{ma^4}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n-1}(c_j-c_{j-1})\right|\right)^2$$

$$\le \frac{4}{ma^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|c_j-c_{j-1}|\right)^2.$$

Далее, на основании неравенства Харди (3.11) получаем

$$\Sigma_2^2 \le \frac{16}{ma^4}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n-c_{n-1}|^2 \le \frac{16M}{ma^4}\|x\|_1^2.$$

Учитывая (3.17), получаем $\|A_\lambda x\|_1^2 \leq \left(\frac{2}{a^2}+\frac{32}{a^4}\right)\frac{M}{m}\|x\|_1^2$ и $A_\lambda \in [H_1(\{e_n\})]$.

Зафиксируем $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\})$ и продемострируем, что $A_\lambda x \in D(A)$. Для этого, учитывая (3.6), достаточно показать, что $\left\{\frac{i\ln n\cdot c_n}{i\ln n-\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)$. Для этого заметим, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{i\ln n\cdot c_n}{i\ln n-\lambda}-\frac{i\ln(n-1)\cdot c_{n-1}}{i\ln(n-1)-\lambda}\right|^2$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(c_n+\frac{\lambda c_n}{i\ln n-\lambda}\right)-\left(c_{n-1}+\frac{\lambda c_{n-1}}{i\ln(n-1)-\lambda}\right)\right|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n-c_{n-1}|^2$$

$$+2|\lambda|^2\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{c_n}{i\ln n-\lambda}-\frac{c_{n-1}}{i\ln(n-1)-\lambda}\right|^2 \leq 2M\|x\|_1^2+2|\lambda|^2\Xi.$$

Поскольку для любого $n \geq 2$ справедливо $\frac{c_n}{i\ln n-\lambda}-\frac{c_{n-1}}{i\ln(n-1)-\lambda}=\frac{c_n}{i\ln n-\lambda}-\frac{c_{n-1}}{i\ln n-\lambda}+\frac{c_{n-1}}{i\ln n-\lambda}-\frac{c_{n-1}}{i\ln(n-1)-\lambda}=\frac{c_n-c_{n-1}}{i\ln n-\lambda}+c_{n-1}\left(\frac{i(\ln(n-1)-\ln n)}{(i\ln n-\lambda)(i\ln(n-1)-\lambda)}\right)$, то

$$\Xi \leq 2\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{c_n-c_{n-1}}{i\ln n-\lambda}\right|^2+2\sum_{n=2}^{\infty}\left|c_{n-1}\left(\frac{(\ln(n-1)-\ln n)}{(i\ln n-\lambda)(i\ln(n-1)-\lambda)}\right)\right|^2 \leq \frac{2M}{a^2}$$

$$\times\|x\|_1^2+\frac{2}{a^4}\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left|\ln(n-1)-\ln n\right|^2\frac{|c_{n-1}|^2}{n^2} \leq \frac{2M}{a^2}\|x\|_1^2+\frac{8}{a^4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|c_{n-1}|^2}{n^2}$$

$$\leq \frac{2M}{a^2}\|x\|_1^2+\frac{8}{a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|c_j-c_{j-1}|\right)^2.$$

На основании неравенства Харди (3.11) имеем $\Xi \leq \frac{2M}{a^2}\|x\|_1^2+\frac{32M}{a^4}\|x\|_1^2$. Следовательно, $\left\{\frac{i\ln n\cdot c_n}{i\ln n-\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)$.

Таким образом, $A_\lambda x \in D(A)$ и, поэтому,

$$(A-\lambda I)\,A_\lambda x=(A-\lambda I)\,(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda}c_n e_n=(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty}c_n e_n=x. \tag{3.18}$$

Возьмем теперь $y \in D(A)$ и рассмотрим $x=(A-\lambda I)\,y$. Тогда, в силу (3.18), $x=(A-\lambda I)\,A_\lambda x=(A-\lambda I)\,A_\lambda\,(A-\lambda I)\,y$. Следовательно,

$$(A-\lambda I)\,(y-A_\lambda\,(A-\lambda I)\,y)=x-x=0.$$

Поскольку $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то для всякого $y \in D(A)$, $y=A_\lambda\,(A-\lambda I)\,y$. Комбинируя это равенство с (3.18), имеем, что $\lambda \in \rho(A)$ и $A_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$.

Кроме того, попутно, установлено, что

$$\{\lambda \in \mathbb{C}:\ \lambda \neq i\ln n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \rho(A).$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что, так как $\lambda_n \in \sigma(A),\ n \in \mathbb{N},$ оператор A замкнут как генератор C_0-группы в силу теоремы 3.1, спектр замкнутого оператора замкнут и множество $\{i\ln n\}_1^{\infty}$ содержит все свои предельные точки, то $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{i\ln n\}_1^{\infty}$ и

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \lambda \neq i\ln n,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

$\square$

На основании теоремы 1.1, из теоремы 3.1 выводится следующий результат.

Следствие 3.1. Задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.19}$$

с оператором A, определенным соотношениями (3.5),(3.6), является корректной в $H_1(\{e_n\})$ и ее решение задается формулой (3.7), где $x = x_0$.

Замечание 3.4. Случай, когда спектр $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A лежит на мнимой оси и удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0$, встречается в физических приложениях. К примеру, рассмотрим оператор $\mathcal{Q} = i\Delta$ – оператор правой части эволюционного уравнения Шрёдингера в ограниченной области, см. [121]. Здесь Δ – лапласиан в пространстве $L_2(D)$ с краевым условием Дирихле, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда, в силу результата Г. Вейля 1912 г. [101], для собственных чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора Δ справедлива асимптотическая формула,

$$\mu_k \sim -C_n\,(V(D))^{-\frac{2}{n}}\,k^{\frac{2}{n}}, \quad k \to \infty,$$

где $C_n = (2\pi)^2 B_n^{-\frac{2}{n}}$ – константа Вейля, а $V(D)$ – объем области D. Здесь $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, Γ – гамма-функция Эйлера.

Тогда спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathcal{Q}$ будет лежать на мнимой оси и для него будет справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k \sim -iC_n\,(V(D))^{-\frac{2}{n}}\,k^{\frac{2}{n}}, \quad k \to \infty.$$

Следовательно, для любого $n \geq 3$ спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет удовлетворять условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0$.

Замечание 3.5. Операторы с небазисными семействами собственных векторов также встречаются в физических приложениях.

- Рассмотрим оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \mapsto L_2\,(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, определенный формулой

  $$\mathcal{L}\psi = -\psi'' + ix\psi, \quad \psi \in D(\mathcal{L}),$$

  где $D(\mathcal{L}) = \left\{\psi \in L_2\,(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) :\ x\psi \in L_2\,(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\,, \psi \in H_0^2\,(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\right\}$. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – нули функции Эйри $Ai(z)$, занумерованные в порядке убывания. Тогда множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

  $$\lambda_n = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\mu_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

  содержит все собственные числа оператора $\mathcal{L}$ [39]. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| = 0$ (см. [77], а также [151]), то спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $\mathcal{L}$ подчиняется условию $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0$. Собственными функциями оператора $\mathcal{L}$ являются [39] функции

  $$\tilde{u}_n = Ai\left(e^{\frac{\pi i}{6}}x + \mu_n\right) \in H_0^2\,(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

  Нормированные собственные функции $u_n = \frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|}$, $n \in \mathbb{N}$, полны в $L_2\,(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, однако не образуют базис Шаудера в $L_2\,(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, см. [39].

- Рассмотрим (замкнутый) несамосопряженный гармонический осциллятор $H_a : D(H_a) \mapsto L_2\,(\mathbb{R})$, $H_a f = -f'' + ax^2 f$, где $a \in \mathbb{C}$. Такие операторы возникают в физике, например, при изучении нагруженных или неустойчивых лазеров [55]. Оператор H_a имеет чисто точечный простой спектр $\left\{(2n+1)\,a^{\frac{1}{2}}\right\}_{n=0}^{\infty}$, а соответствующие собственные функции

$$\phi_n(x) = h_n\left(a^{\frac{1}{4}}x\right)e^{-a^{\frac{1}{2}}x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где h_n – полином Эрмита степени $n,$ хотя и полны в $L_2(\mathbb{R})$, но не образуют базис Шаудера в $L_2(\mathbb{R})$, если $\Im a \neq 0$ [55]. Более того, нормы спектральных проекций P_n растут экспоненциально при $n \to \infty$, см. [55]. В общем случае, когда $a = e^{i\theta},\ -\pi < \theta < \pi,$ оператор $-H_a$ порождает компактную C_0-полугруппу, см. [55].В случае $\theta = \pm\pi$ оператор $-H_a$ не порождает C_0-группу в силу теоремы 1.3, несмотря на то, что $\sigma(-H_a) \subset i\mathbb{R}$.

3.3. Класс операторов, для которых задача Коши в $H_1(\{e_n\})$ некорректна

В данном подразделе будет показано, что вопрос о порождении C_0-группы для операторов подобного вида, как в теореме 3.1, существенно зависит от характера поведения спектра оператора в окрестности точки $i\infty$. Рассмотрим класс операторов $A : H_1(\{e_n\}) \supset D(A) \mapsto H_1(\{e_n\})$, заданный формулой

$$Ax = A(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n, \tag{3.20}$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, с областью определения

$$D(A) = \left\{x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\}) :\ \{\lambda_n c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)\right\}. \tag{3.21}$$

Заметим, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные векторы A, соответствующие собственным числам $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, и оператор, определенный соотношениями (3.5),(3.6), входит в этот класс.

Далее мы покажем, что, даже если спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет лежать на $i\mathbb{R}$ и удовлетворять (3.1), то оператор A может не генерировать даже C_0-полугруппу в $H_1(\{e_n\})$. Следовательно, и задача Коши (0.1) с таким оператором может не быть корректной.

Предложение 3.5. Оператор A, определенный формулами (3.20), (3.21), где $\lambda_n = i\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, не генерирует C_0-полугруппу в $H_1(\{e_n\})$.

Доказательство. Предположим, что A генерирует C_0-полугруппу $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ в пространстве $H_1(\{e_n\})$. Тогда, поскольку $Ae_n = i\sqrt{n}\cdot e_n$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого $t \ge 0$ мы будем иметь $S(t)e_n = e^{it\sqrt{n}}e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, на линейные комбинации $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n e_n \in H_1(\{e_n\})$ оператор $S(t)$ будет действовать так,

$$S(t)\sum_{n=1}^{N} c_n e_n = \sum_{n=1}^{N} e^{it\sqrt{n}} c_n e_n, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что $S(1)$ – неограниченный оператор. Для этого заметим, что, на основании (3.8) и неравенства треугольника,

$$\begin{aligned}\left\|S(1)\sum_{n=1}^{N} c_n e_n\right\|_1 &= \left\|\sum_{n=1}^{N+1}\left(e^{i\sqrt{n}}c_n - e^{i\sqrt{n-1}}c_{n-1}\right)e_n\right\| \\ &\ge \left\|\sum_{n=2}^{N+1}(e^{i\sqrt{n}} - e^{i\sqrt{n-1}})c_{n-1}e_n\right\| - \left\|\sum_{n=1}^{N+1} e^{i\sqrt{n}}(c_n - c_{n-1})e_n\right\| \\ &\ge \Xi_N - \sqrt{\frac{M}{m}}\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n e_n\right\|_1 .\end{aligned}$$

Далее отметим, что, поскольку $\sin s \ge s/2$ при $s \in [0,1]$, и $n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)^2 \ge \frac{1}{4}$ при $n \ge 2$, то

$$\begin{aligned}\Xi_N^2 &\ge \frac{1}{M}\sum_{n=2}^{N+1}\left|1 - e^{i\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)}\right|^2 |c_{n-1}|^2 \ge \frac{1}{M}\sum_{n=2}^{N+1}\sin^2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)|c_{n-1}|^2 \\ &\ge \frac{1}{4M}\sum_{n=2}^{N+1} n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)^2\frac{|c_{n-1}|^2}{n} \ge \frac{1}{16M}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{|c_{n-1}|^2}{n}.\end{aligned}$$

Теперь, выбирая последовательность $x^N = \sum\limits_{n=1}^{N} e_n$, $N \in \mathbb{N}$, мы видим, что, с одной стороны, $\sup\limits_N \left\|x^N\right\|_1 \le \sqrt{\frac{2}{m}}$, а с другой стороны,

$$\left\|S(1)x^N\right\|_1 = \left\|S(1)\sum_{n=1}^{N} e_n\right\|_1 \ge \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}} - \frac{\sqrt{2M}}{m} \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Таким образом мы пришли к тому, что $S(1)$ – неограниченный оператор. Это противоречит определению C_0-полугруппы. Следовательно, оператор A не генерирует C_0-полугруппу в пространстве $H_1(\{e_n\})$.

$\square$

Задействуя аргументы, такие же, как и в доказательстве предложения 3.5, можно доказать следующее.

Предложение 3.6. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (3.1) и существует $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right] : \liminf\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}|\lambda_n - \lambda_{n-1}| > 0$. Тогда оператор A, определенный формулой (3.20), с областью определения (3.21), не порождает C_0-полугруппу в пространстве $H_1(\{e_n\})$.

Следствие 3.2. Оператор A из предложения 3.6 не генерирует C_0-группу в пространстве $H_1(\{e_n\})$.

Комбинируя предложение 3.6 с теоремой 1.1, мы получаем следствие о некорректности соответствующих задач Коши (0.1).

Следствие 3.3. Задача Коши (0.1) с оператором A из предложения 3.6 не является корректной в пространстве $H_1(\{e_n\})$.

3.4. Класс генераторов C_0-групп в гильбертовых пространствах $H_k(\{e_n\})$

Данный подраздел посвящен обобщению теоремы 3.1 в двух направлениях. А именно, во-первых, мы представим конструкцию инфинитезимальных генераторов с полным, небазисным семейством собственных векторов в пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$. Во-вторых, будет исследован более общий характер поведения спектра этих операторов.

В данном разделе считается, что все числовые последовательности доопределяются нулями, т.е. если $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность, то $u_{-n} = 0$ при $n \geq 0$.

Напомним, что

$$\Delta^k u_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j u_{n-j}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для обобщения теоремы 3.1 введем в рассмотрение следующие классы последовательностей.

Определение 3.4. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ – последовательность. Тогда

$$\mathcal{S}_k = \Big\{ \{f(n)\}_1^{\infty} : \lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty; \big\{ n^j \Delta^j f(n) \big\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty \text{ при } 1 \le j \le k \Big\}.$$

К примеру, для любого $k \in \mathbb{N}$, $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, $\{\ln\ln(n+1)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, $\big\{\ln\ln\sqrt{n+1}\big\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, а $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty} \notin \mathcal{S}_k$. Ясно, что $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}_m$, если $m \le k$.

Перейдем к формулировке одного из основных результатов раздела 3 – обобщения теоремы 3.1.

Теорема 3.3. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда оператор $A_k : H_k(\{e_n\}) \supset D(A_k) \mapsto H_k(\{e_n\})$, заданный формулой

$$A_k x = A_k (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} i f(n) \cdot c_n e_n,$$

где $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, с областью определения

$$D(A_k) = \left\{ x = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_k(\{e_n\}) : \ \{f(n) \cdot c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta^k) \right\}, \tag{3.22}$$

генерирует C_0-группу в пространстве $H_k(\{e_n\})$, действие которой задается для всех $t \in \mathbb{R}$ формулой

$$e^{A_k t} x = e^{A_k t} (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n e_n. \tag{3.23}$$

Доказательство. Можно проследить, что в доказательстве теоремы 3.1 используются только те свойства последовательности $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, которые вошли в определение класса $\mathcal{S}_1$. Поэтому доказательство теоремы в случае $k = 1$ проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.

Докажем теорему при любом фиксированном $k \geq 2$. Рассмотрим $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_k(\{e_n\})$. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$ и докажем, что $(\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n e_n \in H_k(\{e_n\})$. В силу (3.2) имеем

$$\left\| (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n e_n \right\|_k = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta^k \left(e^{itf(n)} c_n \right) \right) e_n \right\|,$$

где $c_{1-j} = 0$ при любом $j \in \mathbb{N}$. Далее мы будем пользоваться теоремой Лейбница о конечных разностях для последовательностей:

$$\Delta^k (u_n v_n) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \Delta^{k-j} u_{n-j} \Delta^j v_n, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

см. [115], с. 34-35. На основании теоремы Лейбница (3.24) и двойной оценки (3.8), поскольку $c_{n-j} = 0$ при $j \geq n$, имеем

$$\begin{aligned}
\left\| (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n e_n \right\|_k &\leq \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta^j e^{itf(n)} \right) \left(\Delta^{k-j} c_{n-j} \right) e_n \right\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta^j e^{itf(n)} \right|^2 \left| \Delta^{k-j} c_{n-j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(\sum_{n=j+1}^{\infty} \left| \Delta^j e^{itf(n)} \right|^2 \left| \Delta^{k-j} c_{n-j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sqrt{\Theta_j(t)}.
\end{aligned}$$

Функция $\Theta_0(t)$ оценивается на основании (3.8) и (3.2) сразу:

$$\Theta_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{itf(n)} \Delta^k c_n \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta^k c_n \right|^2 \leq M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^k c_n e_n \right\|^2 = M \|x\|_k^2.$$

Далее необходимо оценить функции $\Theta_j(t)$, $1 \leq j \leq k$. С этой целью заметим, что, так как $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, то существует $C > 0$, такая что при каждом фиксированном $j:\ 1 \leq j \leq k$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$n^j \left| \Delta^j f(n) \right| \leq C. \tag{3.25}$$

Далее, поскольку $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, то для всякого $m \in \mathbb{N}$ мы будем иметь $\{f(n-m)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$. Действительно, в силу (3.25), учитывая, что $f(n-m) = 0$ при $1 \le n \le m$, для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $(n-m)^j \left|\Delta^j f(n-m)\right| \le C$, а значит при $n > m$ получим $\left|\Delta^j f(n-m)\right| \le \frac{C}{(n-m)^j}$. Отметим, что при $n > m$

$$\frac{1}{(n-m)^j} \le \frac{(1+m)^j}{n^j}.$$

Это следует из того факта, что

$$\left(\frac{n}{n-m}\right)^j = \left(1 + \frac{m}{n-m}\right)^j \le \left(1 + \frac{m}{m+1-m}\right)^j = (1+m)^j.$$

Таким образом при $n > m$ получаем $\left|\Delta^j f(n-m)\right| \le \frac{C(1+m)^j}{n^j}$, а при $1 \le n \le m$ имеем $\left|\Delta^j f(n-m)\right| = 0$. Следовательно $n^j \left|\Delta^j f(n-m)\right| \le C(1+m)^j$ для всех n, а значит $\{f(n-m)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$.

Пусть $m : 1 \le m \le k$. Введем в рассмотрение множества $\Sigma_1 = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, $\Sigma_2 = \{0, 1, 2, \ldots, k-2\}, \ldots, \ \Sigma_{k-1} = \{0, 1\}, \ \Sigma_k = \{0\}$. Очевидно выполняется следующее: $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_3 \supset \cdots \supset \Sigma_k$.

Теперь мы утверждаем, что для любого $m : 1 \le m \le k$ и всякой последовательности $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, при каждом $s \in \Sigma_m$, $t \in \mathbb{R}$ и любом $n > m$ справедливо следующее неравенство,

$$\left|\Delta^m e^{(-1)^s it \Delta^s \widetilde{f}(n)}\right| \le \frac{\mathcal{P}_m\left[\widetilde{f}(n)\right](|t|)}{n^{m+s}}, \tag{3.26}$$

где $\mathcal{P}_m\left[\widetilde{f}(n)\right]$ – полином степени m, с положительными коэффициентами, зависящими от $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, и без свободного члена. Для доказательства этого факта применим метод математической индукции.

Далее для удобства мы будем обозначать s через $s(m)$, если $s \in \Sigma_m$.

База индукции. Пусть $m = 1$. В этом случае у нас есть множество $\Sigma_1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ и $s = s(1)$ пробегает все значения от 0 до $k-1$. Тогда для всякой $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$ и любого $s(1) \in \Sigma_1$, при $n > 1$, учитывая (3.25), будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\left|\Delta e^{(-1)^{s(1)}it\Delta^{s(1)}\widetilde{f}(n)}\right| = \left|e^{(-1)^{s(1)}it\Delta^{s(1)}\widetilde{f}(n)} - e^{(-1)^{s(1)}it\Delta^{s(1)}\widetilde{f}(n-1)}\right| \\
&= \left|e^{(-1)^{s(1)}it\Delta^{s(1)}\widetilde{f}(n)}\left(1 - e^{(-1)^{s(1)+1}it\Delta^{s(1)+1}\widetilde{f}(n)}\right)\right| = \left|1 - e^{(-1)^{s(1)+1}it\Delta^{s(1)+1}\widetilde{f}(n)}\right| \\
&\le \sqrt{2}|t|\left|\Delta^{s(1)+1}\widetilde{f}(n)\right| = \frac{\sqrt{2}|t|n^{s(1)+1}\left|\Delta^{s(1)+1}\widetilde{f}(n)\right|}{n^{s(1)+1}} \le \frac{\sqrt{2}C\left(\widetilde{f}\right)|t|}{n^{s(1)+1}},
\end{aligned}
$$

где $C\left(\widetilde{f}\right)$ – константа, зависящая от последовательности $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Теперь предположим, что для любых $l\,:\,1 \le l \le m-1$ и всякой $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, при любых $s(l) \in \Sigma_l$, $t \in \mathbb{R}$ и $n > l$ справедливо

$$
\left|\Delta^l e^{(-1)^{s(l)}it\Delta^{s(l)}\widetilde{f}(n)}\right| \le \frac{\mathcal{P}_l\left[\widetilde{f}(n)\right](|t|)}{n^{l+s(l)}}, \tag{3.27}
$$

где $\mathcal{P}_l\left[\widetilde{f}(n)\right]$ – полином степени l, с положительными коэффициентами, зависящими от $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, и без свободного члена.

Докажем (3.27) при $l = m$. Для всякой $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, любого $s(m) \in \Sigma_m$ и при $n > m$, по теореме Лейбница (3.24) имеем

$$
\begin{aligned}
&\left|\Delta^m e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right| = \left|\Delta^{m-1}\left(e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)} - e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n-1)}\right)\right| \\
&= \left|\Delta^{m-1}\left(e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\left(1 - e^{(-1)^{s(m)+1}it\Delta^{s(m)+1}\widetilde{f}(n)}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l\left(\Delta^l e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right)\left(\Delta^{m-1-l}\left(1 - e^{(-1)^{s(m)+1}it\Delta^{s(m)+1}\widetilde{f}(n-l)}\right)\right)\right| \\
&\qquad \le \left|e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right|\left|\Delta^{m-1}e^{(-1)^{s(m)+1}it\Delta^{s(m)+1}\widetilde{f}(n)}\right| \\
&\qquad\qquad + \sum_{l=1}^{m-2} C_{m-1}^l\left|\Delta^l e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right|\left|\Delta^{m-1-l}e^{(-1)^{s(m)+1}it\Delta^{s(m)+1}\widetilde{f}(n-l)}\right| \\
&\qquad\qquad\quad + \left|\Delta^{m-1}e^{(-1)^{s(m)}it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right|\left|1 - e^{(-1)^{s(m)+1}it\Delta^{s(m)+1}\widetilde{f}(n-(m-1))}\right|.
\end{aligned}
$$

Поскольку $s(m) \in \Sigma_m$, а $\Sigma_m \subset \Sigma_{m-1} \subset \Sigma_{m-2} \subset \cdots \subset \Sigma_2 \subset \Sigma_1$, то $s(m) \in \Sigma_l$ для любого $l\,:\,1 \le l \le m-1$. Аналогичным образом, так как $s(m)+1 \in \Sigma_{m-1}$, то $s(m)+1 \in \Sigma_l$ для любого $l\,:\,1 \le l \le m-1$. Ранее было доказано, что, если $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, то для всякого $m \in \mathbb{N}$

имеем $\left\{\widetilde{f}(n-m)\right\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$. В таком случае мы можем воспользоваться индуктивным предположением (3.27) и продолжить последнюю оценку,

$$\left|\Delta^m e^{(-1)^{s(m)} it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right| \le \frac{\mathcal{P}_{m-1}\left[\widetilde{f}(n)\right](|t|)}{n^{m-1+s(m)+1}} + \sum_{l=1}^{m-2} C_{m-1}^{l} \frac{\mathcal{P}_l\left[\widetilde{f}(n)\right](|t|)}{n^{l+s(m)}}$$
$$\times \frac{\mathcal{P}_{m-1-l}\left[\widetilde{f}(n-l)\right](|t|)}{n^{m-1-l+s(m)+1}} + \frac{\mathcal{P}_{m-1}\left[\widetilde{f}(n)\right](|t|)}{n^{m-1+s(m)}} \frac{\sqrt{2}\widetilde{C}|t|}{n^{s(m)+1}}.$$

Таким образом имеем

$$\left|\Delta^m e^{(-1)^{s(m)} it\Delta^{s(m)}\widetilde{f}(n)}\right| \le \frac{\widetilde{P_m}\left[\widetilde{f}(n)\right](|t|)}{n^{m+s(m)}},$$

где $\widetilde{P_m}\left[\widetilde{f}(n)\right]$ – полином степени m, с положительными коэффициентами, зависящими от $\left\{\widetilde{f}(n)\right\}_{n=1}^{\infty}$, и без свободного члена, а значит (3.26) доказано.

Из оценки (3.26), в частности, следует, что для нашей последовательности $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, для любых $j\,:\; 1 \le j \le k$, $t \in \mathbb{R}$ и для всякого $n > j$ справедлива следующая оценка:

$$\left|\Delta^j e^{itf(n)}\right| \le \frac{\mathcal{P}_j(|t|)}{n^j}, \tag{3.28}$$

где $\mathcal{P}_j$ – полином степени j, с положительными коэффициентами и без свободного члена.

Далее, на основании (3.28) функции $\Theta_j(t)$, $1 \le j \le k$, оцениваются так:

$$\Theta_j(t) \le \left(\mathcal{P}_j(|t|)\right)^2 \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^{k-j} c_{n-j}\right|^2}{n^{2j}} = \left(\mathcal{P}_j(|t|)\right)^2 \Omega_j. \tag{3.29}$$

Заметим, что для всяких $d, n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$\Delta^d c_n = \sum_{m=1}^{n} \Delta^{d+1} c_m. \tag{3.30}$$

Поэтому величины Ω_j, $1 \le j \le k$, оцениваются следующим образом,

$$\Omega_j = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^{k-j} c_{n-j}\right|^2}{n^{2j}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^{k-j} c_{n-j}\right|^2}{n^{2j}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^j} \left| \sum_{m=1}^{n-j} \Delta^{k-j+1} c_m \right| \right)^2$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^j} \sum_{m=1}^{n-j} \left|\Delta^{k-j+1} c_m\right| \right)^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^j} \sum_{m=1}^{n} \left|\Delta^{k-j+1} c_m\right| \right)^2 .$$

На основании неравенства Харди (3.11) имеем

$$\Omega_j \le 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{j-1}} \left|\Delta^{k-j+1} c_n\right| \right)^2 .$$

Для продолжения оценки мы будем последовательно применять формулу (3.30) и неравенство Харди (3.11) еще $j-1$ раз:

$$\Omega_j \le 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{j-1}} \left|\Delta^{k-j+1} c_n\right| \right)^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{j-1}} \left| \sum_{m=1}^{n} \Delta^{k-j+2} c_m \right| \right)^2$$
$$\le 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{j-1}} \sum_{m=1}^{n} \left|\Delta^{k-j+2} c_m\right| \right)^2 \le 4^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{j-2}} \left|\Delta^{k-j+2} c_n\right| \right)^2$$
$$\le \ldots \le 4^{j-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left|\Delta^{k-1} c_n\right| \right)^2 \le 4^{j-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left|\Delta^{k} c_m\right| \right)^2$$
$$\le 4^j \sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^k c_n\right|^2 \le 4^j M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^k c_n e_n \right\|^2 = 4^j M \|x\|_k^2 .$$

Комбинируя эту оценку с (3.29), мы приходим к следующему,

$$\left\| (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n e_n \right\|_k \le \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sqrt{\Theta_j(t)}$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sqrt{M} \|x\|_k + \sum_{j=1}^{k} C_k^j \sqrt{\left(\mathcal{P}_j(|t|)\right)^2 \Omega_j} \right) \le \sqrt{\frac{M}{m}} \sum_{j=0}^{k} 2^j C_k^j \mathcal{P}_j(|t|) \|x\|_k, \tag{3.31}$$

где $\mathcal{P}_0(|t|) \equiv 1$. Эта оценка показывает, что мы можем определить однопараметрическое семейство операторов $e^{A_k t} \in [H_k(\{e_n\})]$, $t \in \mathbb{R}$, формулой

$$e^{A_k t} x = e^{A_k t} (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} c_n e_n,$$

а также, что для всех $t \in \mathbb{R}$ верна оценка

$$\left\|e^{A_k t}\right\| \leq \mathfrak{p}_k(|t|), \tag{3.32}$$

где $\mathfrak{p}_k(|t|) = \sqrt{\frac{M}{m}} \sum\limits_{j=0}^{k} 2^j C_k^j \mathcal{P}_j(|t|)$ – полином с положительными коэффициентами и $\deg \mathfrak{p}_k = k$.

Теперь докажем, что семейство $\{e^{A_k t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ обладает свойством сильной непрерывности в нуле. Для этого заметим, что для любого $j: 1 \leq j \leq k$ и при всех $n > j$ верно $\Delta^j\left(e^{itf(n)} - 1\right) = \Delta^j\left(e^{itf(n)}\right)$. Тогда по теореме Лейбница (3.24), принимая во внимание оценку (3.31), для всякого $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_k(\{e_n\})$ мы будем иметь следующее,

$$\begin{aligned}
\|e^{A_k t}x - x\|_k &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta^k\left((e^{itf(n)} - 1)c_n\right)\right)e_n\right\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta^j\left(e^{itf(n)} - 1\right)\right)\left(\Delta^{k-j}c_{n-j}\right)e_n\right\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{itf(n)} - 1\right|^2\left|\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\left.+ \sum_{j=1}^{k} C_k^j\left(\sum_{n=j+1}^{\infty}\left|\Delta^j e^{itf(n)}\right|^2\left|\Delta^{k-j}c_{n-j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \Upsilon_k(t) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{k} C_k^j\sqrt{\Theta_j(t)} \leq \Upsilon_k(t) + \sqrt{\frac{M}{m}}\sum_{j=1}^{k} 2^j C_k^j \mathcal{P}_j(|t|)\|x\|_k.
\end{aligned}$$

Функция $\widetilde{\mathfrak{p}}_k(|t|) = \sum\limits_{j=1}^{k} 2^j C_k^j \mathcal{P}_j(|t|)$ представляет из себя полином от $|t|$ степени k, с положительными коэффициентами и без свободного члена. Поэтому $\sqrt{\frac{M}{m}}\widetilde{\mathfrak{p}}_k(|t|)\|x\|_k \to 0$ при $t \to 0$.

Покажем, что $\Upsilon_k(t) \to 0$ при $t \to 0$. Для этого рассмотрим оператор $F : H \supset D(F) \mapsto H$, заданный формулой

$$Fy = F\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} if(n)\cdot a_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H,$$

с областью определения $D(F) = \left\{ y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H : \{a_n f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \right\}$.

Нетрудно показать, что F генерирует C_0-группу $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в H, действие которой задается формулой

$$T(t)y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itf(n)} a_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in H,$$

см. также [53]. Следовательно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |e^{itf(n)} - 1|^2 |a_n|^2 \to 0$ при $t \to 0$. Поскольку $\left\{\Delta^k c_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, то $\Upsilon_k(t) \to 0$, когда $t \to 0$. Следовательно $\|e^{A_k t}x - x\|_k \to 0$ при $t \to 0$, и свойство сильной непрерывности в нуле для семейства $\{e^{A_k t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ доказано. Ясно, что $e^{A_k \cdot 0} = I$ и групповое свойство для семейства $\{e^{A_k t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ выполняется. Таким образом $\{e^{A_k t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ является C_0-группой в пространстве $H_k(\{e_n\})$.

Далее, покажем, что A_k является генератором сконструированной C_0-группы $\{e^{A_k t}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Для этого необходимо показать, что $D(A_k) = E_k$, где $E_k = \left\{ x \in H_k(\{e_n\}) : \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{A_k t}x - x}{t} \right\}$ и что для всякого $x \in D(A_k)$ верно

$$A_k x = \lim_{t\to 0} \frac{e^{A_k t}x - x}{t}. \tag{3.33}$$

Пусть $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in E_k$. Обозначим $z = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{A_k t}x - x}{t} \in H_k(\{e_n\})$. Тогда $z = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n e_n$, где $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta^k)$. Условие $\left\| \frac{e^{A_k t}x - x}{t} - z \right\|_k \to 0$, $t \to 0$, влечет

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta^k \left(\frac{e^{itf(n)} - 1}{t} c_n - z_n \right) \right|^2 \to 0, \quad t \to 0,$$

а значит для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\left| \Delta^k \left(\frac{e^{itf(n)} - 1}{t} c_n - z_n \right) \right|^2 \to 0, \quad t \to 0. \tag{3.34}$$

Докажем при помощи индукции по n, что $z_n = i c_n f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

При $n = 1$ из (3.34) получаем $\frac{e^{itf(1)} - 1}{t} c_1 - z_1 \to 0$, если $t \to 0$, а значит в пределе мы получим $z_1 = i c_1 f(1)$. Пусть $z_n = i c_n f(n)$ при $1 \le n \le l$.

Заметим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\Delta^k\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t}c_n - z_n\right) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\left(\frac{e^{itf(n-j)}-1}{t}c_{n-j} - z_{n-j}\right).$$

Следовательно, для $n = l+1$ мы будем иметь

$$\left|\frac{e^{itf(l+1)}-1}{t}c_{l+1} - z_{l+1}\right| = \left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\left(\frac{e^{itf(l+1-j)}-1}{t}c_{l+1-j} - z_{l+1-j}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{k}(-1)^j C_k^j\left(\frac{e^{itf(l+1-j)}-1}{t}c_{l+1-j} - z_{l+1-j}\right)\right|$$

$$\leq \left|\Delta^k\left(\frac{e^{itf(l+1)}-1}{t}c_{l+1} - z_{l+1}\right)\right| + \sum_{j=1}^{k} C_k^j\left|\frac{e^{itf(l+1-j)}-1}{t}c_{l+1-j} - z_{l+1-j}\right|.$$

Учитывая, что $z_{l+1-j} = ic_{l+1-j}f(l+1-j)$, на основании (3.34) получаем, что $z_{l+1} = ic_{l+1}f(l+1)$. Поэтому $z_n = ic_nf(n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $z = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} if(n)c_ne_n$. Это означает, что $x \in D(A_k)$ и $z = A_kx$.

Обратно, предположим, что $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_ne_n \in D(A_k)$ и докажем, что $x \in E_k$ и верно (3.33). С этой целью заметим, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{e^{A_kt}x - x}{t} - A_kx\right\|_k = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta^k\left(\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right)\right)e_n\right\|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta^k\left(\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\Delta^k\left(\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right)\right|^2\right.$$

$$\left.+\,2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\Delta^k\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t}c_n\right)\right|^2 + 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\Delta^k\left(if(n)c_n\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $x \in D(A_k)$, то $A_kx \in H_k(\{e_n\})$, а значит существует константа $C \geq 0:$ $\|A_kx\|_k \leq C$. Следовательно

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta^k\left(if(n)c_n\right)\right|^2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Delta^k\left(if(n)c_n\right)\right)e_n\right\|^2 = \|A_kx\|_k^2 \leq C^2,$$

а тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta^k\left(if(n)c_n\right)\right|^2\le MC^2. \tag{3.35}$$

Теперь отметим, что при любом $t\in\mathbb{R}$ и $N\in\mathbb{N}$ верно следующее,

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\Delta^k\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t}c_n\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{e^{itf(n)}-1}{t}\right|^2\left|\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}2^jC_k^j\frac{\mathcal{P}_j(|t|)}{|t|}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\widehat{\Upsilon}_k^N(t)+\mathcal{Q}_k(|t|)\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $c_n=0$ при $n\le N$, а $\mathcal{Q}_k(|t|)=\sum\limits_{j=1}^{k}2^jC_k^j\frac{\mathcal{P}_j(|t|)}{|t|}$ – полином от $|t|$ степени $k-1$ (см. доказательство сильной непрерывности $\{e^{A_kt}\}_{t\in\mathbb{R}}$ в нуле).

Далее отметим, что, так как $\left|e^{itf(n)}-1\right|\le\sqrt{2}|t||f(n)|,\ n\in\mathbb{N},$ то

$$\left(\widehat{\Upsilon}_k^N(t)\right)^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{e^{itf(n)}-1}{t}\right|^2\left|\Delta^k c_n\right|^2\le 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|f(n)\Delta^k c_n\right|^2. \tag{3.36}$$

Покажем, что $\left\{f(n)\Delta^k c_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_2.$ Действительно, поскольку в силу теоремы Лейбница (3.24)

$$\Delta^k(c_nf(n))=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\Delta^{k-j}c_{n-j}\Delta^jf(n)=\sum_{j=0}^{k}C_k^jv_j(n),$$

и $\{f(n)\cdot c_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_2(\Delta^k)$ из условия (3.22), то $v=\sum\limits_{j=0}^{k}C_k^jv_j\in\ell_2,$ где $v_j=\{v_j(n)=\Delta^{k-j}c_{n-j}\Delta^jf(n)\}_{n=1}^{\infty}$ при $0\le j\le k.$ Теперь заметим, что из условия $f\in\mathcal{S}_k$ и на основании неравенства Харди (3.11), для всякого $j:$ $1\le j\le k$ мы имеем

$$\|v_j\|_{\ell_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta^{k-j}c_{n-j}\Delta^jf(n)\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|n^j\Delta^jf(n)\right|^2\left|\Delta^{k-j}c_{n-j}\right|^2}{n^{2j}}$$

$$\le C(j)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta^{k-j}c_{n-j}\right|^2}{n^{2j}}=C(j)^2\Omega_j\le 4^jMC(j)^2\|x\|_k^2.$$

(см. оценку для Ω_j в доказательстве ограниченности семейства $\{e^{A_kt}\}_{t\in\mathbb{R}}$). Следовательно $v_0=\{f(n)\Delta^kc_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_2$ и остаток ряда в правой части (3.36) стремится к нулю при $N\to\infty$.

Поскольку $\mathcal{Q}_k(|t|)$ – полином от $|t|$, то найдется константа $K \geq 0$, такая что при всех $t: |t| \leq 1$ мы будем иметь

$$\mathcal{Q}_k(|t|) \leq K.$$

Таким образом, так как $\{f(n)\Delta^k c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $\{\Delta^k c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, то при всех $t: |t| \leq 1$ мы получим, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\Delta^k \left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} c_n\right)\right|^2 \leq \left(\widehat{\Upsilon}_k^N(t) + K\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq \left(\sqrt{2}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|f(n)\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + K\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\Delta^k c_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \to 0$$

при $N \to \infty$.

Далее возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Пусть $|t| \leq 1$. Так как выполнено условие (3.35), принимая во внимание последнее соотношение, найдется номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\Delta^k \left(if(n)c_n\right)\right|^2 \leq \varepsilon, \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\Delta^k \left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} c_n\right)\right|^2 \leq \varepsilon.$$

На основании этого мы получим, что $\left\|\frac{e^{A_k t}x-x}{t} - A_k x\right\|_k \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \left|\Delta^k\left(\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right)\right|^2 + 4\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}$. Так как $\left\|\Delta^k\right\| \leq 2^k$, где Δ^k рассматривается как оператор из ℓ_2 в ℓ_2, то

$$\left\|\frac{e^{A_k t}x-x}{t} - A_k x\right\|_k \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\left(2^{2k}\sum_{n=1}^{N} \left|\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right|^2 + 4\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку при всяком $n \in [1, N]$, $\left|\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right|^2 \to 0$, когда $t \to 0$, то и $2^{2k}\sum\limits_{n=1}^{N} \left|\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right|^2 \to 0$, когда $t \to 0$. Следовательно для выбранного ранее $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что, для всех $t: |t| \leq \delta$ выполняется

$$2^{2k}\sum_{n=1}^{N} \left|\left(\frac{e^{itf(n)}-1}{t} - if(n)\right)c_n\right|^2 \leq \varepsilon.$$

Последнее неравенство верно также при $t: \ |t| \leq \min\{1, \delta\}$. Поэтому

$$\left\| \frac{e^{A_k t}x - x}{t} - A_k x \right\|_k \leq \frac{1}{\sqrt{m}} (\varepsilon + 4\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5\varepsilon}}{\sqrt{m}}.$$

Это означает, что $x \in E_k$ и $\left\| \frac{e^{A_k t}x - x}{t} - A_k x \right\|_k \to 0,$ когда $t \to 0$.

Таким образом A_k является генератором сконструированной C_0-группы $\{e^{A_k t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ и теорема полностью доказана.

□

Отметим, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные векторы A_k, соответствующие собственным числам $\{if(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Из предложения 3.2 имеем, что $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = H_k(\{e_n\})$, а значит $\overline{D(A_k)} = H_k(\{e_n\})$, но $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом пространства $H_k(\{e_n\})$.

Теорема 3.1 – это частный случай теоремы 3.3, когда $k = 1$ и $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\ln n\}_{n=1}^{\infty}$. В результате комбинации теоремы 1.1 с теоремой 3.3 получаем следующее.

Следствие 3.4. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ задача Коши (3.19) с оператором A_k из теоремы 3.3 является корректной в пространстве $H_k(\{e_n\})$, а ее решение задается формулой (3.23), где $x = x_0$.

Теперь перейдем к вопросу об асимптотическом поведении сконструированной в теореме 3.3 C_0-группы.

Предложение 3.7. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t \in \mathbb{R}}$ – C_0-группа из теоремы 3.3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $\left\|e^{A_k t}\right\| \to \infty,$ когда $t \to \pm\infty$.
2. Существует полином $\mathfrak{p}_k$ с положительными коэффициентами, степени $\deg \mathfrak{p}_k = k,$ такой что для всякого $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка:

$$\left\|e^{A_k t}\right\| \leq \mathfrak{p}_k(|t|).$$

Доказательство. 1. Напомним, что A_k имеет собственные числа $\{if(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$. Им соответствуют собственные векторы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые полны в $H_k(\{e_n\})$. В силу теоремы 3.3 оператор A_k генерирует C_0-группу $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$. Предположим, что $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ – ограниченная C_0-группа. Тогда по теореме 2 из работы Милославского [27] последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса пространства $H_k(\{e_n\})$. Таким образом мы приходим к противоречию, поскольку в силу предложения 3.2 последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом.

2. Существование полинома $\mathfrak{p}_k$ с заданными свойствами при $k = 1$ следует из доказательства теоремы 3.1, см. оценку (3.12), а при $k > 1$ – из доказательства теоремы 3.3, см. оценку (3.32). □

Замечание 3.6. Можно показать, что C_0-группа из теоремы 3.1, соответствующая оператору A вида (3.5), с областью определения (3.6), растет линейно при $t \to \pm\infty$ (Г. М. Скляр, П. Полак, устное сообщение).

Замечание 3.7. Подчеркнем, что наш класс C_0-групп принадлежит к классу полиномиально ограниченных C_0-групп. Тот феномен, что C_0-группа $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ растет на бесконечности, хотя имеет чисто мнимый спектр (см. теорему 3.4), на самом деле не является очень удивительным. Существуют примеры из класса систем нейтрального типа, когда оператор A имеет собственные числа в открытой левой полуплоскости, асимптотически приближающиеся к $i\mathbb{R}$, а C_0-полугруппа $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ имеет полиномиальный порядок роста при $t \to \infty$, см. [148]. Также существуют конструкции, когда $\Re\sigma(A) < 0$ (или даже $\sigma(A) = \emptyset$), а C_0-полугруппа $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ возрастает при $t \to \infty$, см. [41].

Аналогично теореме 3.2 и теореме 3.3 может быть получена следующая теорема, устанавливающая вид резольвенты генератора A_k из теоремы 3.3, а также дающая ответ на вопрос о расположении $\sigma(A_k)$ и $\rho(A_k)$.

Теорема 3.4. Пусть A_k – оператор из теоремы 3.3. Тогда $\sigma(A_k) = \sigma_p(A_k) = \{if(n)\}_1^\infty$, и

$$(A_k - \lambda I)^{-1} x = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e_n}{if(n) - \lambda}, \ \lambda \in \rho(A_k) = \mathbb{C} \setminus \{if(n)\}_1^\infty, \qquad (3.37)$$

где $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_k(\{e_n\})$.

Таким образом, оператор A_k имеет чисто точечный спектр $\{\lambda_n = if(n)\}_{n=1}^\infty \subset i\mathbb{R}$, который не удовлетворяет условию (1.3) и, более того, не представляется в виде конечного объединения множеств, каждое из которых удовлетворяет условию (1.3), поскольку $\{f(n)\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{S}_k$.

Из теорем 3.3 и 3.4 получаем следующее.

Следствие 3.5. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\omega_0(A_k)$ – логарифмический показатель роста C_0-группы $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, сконструированной в теореме 3.3, а $\omega_s(A_k) = \sup\{\Re\lambda : \ \lambda \in \sigma(A_k)\}$ – спектральная граница ее генератора A_k. Тогда

$$\omega_0(A_k) = \omega_s(A_k) = 0.$$

Замечание 3.8. Из предложения 3.7 и результатов работы [63] (теорема 2.1), см. также [65], теорема 1.20, следует, что для всякого $a > 0$ существует константа $C > 0$, такая, что

$$\left\|(A_k - \lambda I)^{-1}\right\| \le \frac{C}{|\Re\lambda|^{k+1}}, \quad \text{для всех } \lambda : \ 0 < |\Re\lambda| < a \qquad (3.38)$$

$$\left\|(A_k - \lambda I)^{-1}\right\| \le C, \quad \text{для всех } \lambda : \ |\Re\lambda| \ge a. \qquad (3.39)$$

Замечание 3.9. В результате комбинации предложения 3.7 с теоремой 3 из работы [19] получаем, что мажоранта резольвенты

$$M(\delta) = \sup_{|\Re\lambda|\ge\delta} \left\|(A_k - \lambda I)^{-1}\right\|$$

удовлетворяет условию Левинсона

$$\int_0^\varepsilon \ln\ln M(\delta) d\delta < \infty \qquad (3.40)$$

при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$.

В 1967 году В. Э. Кацнельсон [16] доказал следующий результат.

Теорема 3.5. [16] Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность различных точек полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \Im z > 0\}$ и пусть

$$\inf_{1\le j<\infty} \prod_{k=1;k\neq j}^{\infty} \left|\frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \overline{\lambda}_k}\right| = 0. \tag{3.41}$$

Тогда в (любом сепарабельном) гильбертовом пространстве H существует линейный оператор $A: H \supset D(A) \mapsto H$ удовлетворяющий условиям:

1. $\Im\langle Ax, x\rangle \ge 0,\ x \in D(A)$.
2. $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – множество собственных чисел A и $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}}$.
3. Каждое корневое подпространство A одномерно. Система собственных векторов $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A полна, но не равномерно минимальна в H.

   Если, кроме того, $\{\Im\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность, то в H существует линейный оператор $A: H \supset D(A) \mapsto H$, удовлетворяющий, кроме условий 1-3, еще и условию
4. $A = A_{\mathfrak{R}} + iA_{\mathfrak{I}}$,

   где $A_{\mathfrak{R}}$ – самосопряженный оператор, а $A_{\mathfrak{I}}$ – ограниченный положительный оператор (компактный, если $\Im\lambda_n \to 0,\ n\to\infty$; одномерный, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Im\lambda_n < \infty$).

Применяя теорему Кацнельсона в случае, близком к рассмотренному в диссертации, получим следующее.

Следствие 3.6. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность различных точек из вертикальной полосы $\{z \in \mathbb{C}: -\alpha < \Re z < 0\}$, не удовлетворяющая (1.3). Тогда в H существует генератор V C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ с собственными числами $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и соответствующими собственными векторами $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые полны, но не равномерно минимальны в H.

Доказательство. Для начала отметим, что в любой горизонтальной полосе $\{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \Im z < \alpha\}$ условие (3.41) превращается в условие $\inf\limits_{j \neq k} |\lambda_j - \lambda_k| = 0$, см. [67, Глава VII]. Следовательно, для любой последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im z < \alpha\}$, не удовлетворяющей (1.3), существует, по теореме 3.5, оператор A, удовлетворяющий условиям 1-4 теоремы 3.5. Тогда, применив поворот на $\frac{\pi}{2}$, мы получим, что в H существует диссипативный оператор $V = iA$ с собственными числами $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\mu_n = i\lambda_n, \ n \in \mathbb{N},$ и собственными векторами $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые полны, но не равномерно минимальны в H. Более того,

$$V = iA_{\mathfrak{R}} - A_{\mathfrak{I}},$$

где $A_{\mathfrak{R}}$ – самосопряженный оператор, а $A_{\mathfrak{I}}$ – ограниченный положительный оператор.

Таким образом, по теореме Стоуна [66, 149] оператор $iA_{\mathfrak{R}}$ генерирует унитарную C_0-группу и, следовательно, V генерирует C_0-группу $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, как ограниченное возмущение оператора $iA_{\mathfrak{R}}$ (см. [13, с. 671, теорема 19], или [157, с. 188, теорема 1.5]). Далее, в силу теоремы Люмера-Филлипса [42], мы заключаем, что V – генератор сжимающей C_0-полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Эту C_0-полугруппу можно расширить до C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. □

Сопоставляя теорему 3.3 и следствие 3.6, приходим к следующему.

Замечание 3.10.

- Теорема 3.3 и следствие 3.6 предоставляют конструкции генераторов C_0-групп с собственными числами, не удовлетворяющими (1.3) и соответствующими собственными векторами, которые полны, но не равномерно минимальны в соответствующих пространствах. Теорема 3.3 без особого труда переносится на случай, когда $\sigma(A_k)$ лежит на любой вертикальной оси. Однако теорема 3.3 сфокусирована на критическом и недопустимом для следствия 3.6 случае, когда $\sigma(A_k) \subset i\mathbb{R}$.

- Отметим, что C_0-полугруппа $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\geq 0}$, представленная в теореме 3.3 (сужение C_0-группы $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$), в отличие от C_0-полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ из следствия 3.6, не является сжимающей и растет, когда $t\to\infty$, см. предложение 3.7, несмотря на то, что $\sigma(A_k)\subset i\mathbb{R}$ (см. теорему 3.4).

В заключение подраздела, отметим следующее.

Замечание 3.11.

- Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса в гильбертовом пространстве $H_1\left(\{e_n\}\right)$. Определим $\widetilde{A}\,:\,H_1\left(\{e_n\}\right)\supset D(\widetilde{A})\mapsto H_1\left(\{e_n\}\right)$ как $\widetilde{A}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}i\ln n\cdot\alpha_n\varphi_n,$ с областью определения $D(\widetilde{A})=\left\{x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n\in H_1\left(\{e_n\}\right):\,\{\alpha_n\ln n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_2\right\}$. Тогда $\widetilde{A}$ генерирует C_0-группу в $H_1\left(\{e_n\}\right)$, см. [53]. Таким образом, в $H_1\left(\{e_n\}\right)$ существует два генератора C_0-групп, $\widetilde{A}$ и A с одинаковым спектром $\sigma(\widetilde{A})=\sigma(A)=\{i\ln n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что собственные векторы первого образуют базис Рисса, а собственные векторы второго не являются базисом Шаудера, см. теорему 3.1.

- Определим оператор $\widetilde{A}$ как оператор $\widetilde{A}$ вида выше, только с собственными числами $\{i\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда в $H_1\left(\{e_n\}\right)$ существует два оператора $\widetilde{A}$ и A с одинаковым спектром $\sigma(\widetilde{A})=\sigma(A)=\{i\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$, один из которых порождает ограниченную C_0-группу (задача Коши – корректна на оси и все решения ограничены в совокупности), а второй не порождает даже C_0-полугруппу (задача Коши – не является корректной даже на полуоси), см. предложение 3.5.

- Существует два оператора A и A_1 в разных пространствах Гильберта (H и $H_1\left(\{e_n\}\right)$, причем $H\subset H_1\left(\{e_n\}\right)$) с одинаковыми собственными числами $\{\lambda_n=i\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ и одинаковым набором собственных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Задача Коши с оператором A в пространстве H корректна на оси. Задача Коши с оператором A_1 в пространстве $H_1(\{e_n\})$ не является корректной.

- Конструкция неограниченного генератора C_0-группы с неограниченным нериссовским базисом из собственных векторов – тривиальна. С другой стороны, существование генератора C_0-группы с ограниченным нериссовским базисом из собственных векторов – неизвестно.

3.5. Класс генераторов C_0-групп в банаховых пространствах $\ell_{p,k}(\{e_n\})$

В этом подразделе будет представлен класс генераторов C_0-групп, обладающих собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, удовлетворяющими (3.1), и полным, минимальным, но не равномерно минимальным, а значит и небазисным, семейством соответствующих собственных векторов, в специальных банаховых пространствах $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Этот класс подобен классу генераторов C_0-групп в гильбертовых пространствах $H_k(\{e_n\})$, которому посвящен подраздел 3.4.

Теорема 3.6. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис пространства ℓ_p, $p > 1$, и $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не образует базис $\ell_{p,k}(\{e_n\})$ и оператор $A_k : \ell_{p,k}(\{e_n\}) \supset D(A_k) \mapsto \ell_{p,k}(\{e_n\})$, определенный формулой

$$A_k x = A_k(\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} i f(n) \cdot c_n e_n,$$

где $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$, с областью определения

$$D(A_k) = \left\{ x = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in \ell_{p,k}(\{e_n\}) : \ \{f(n) \cdot c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta^k) \right\}, \tag{3.42}$$

генерирует C_0-группу в пространстве $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, действие которой задается для всех $t \in \mathbb{R}$ формулой

$$e^{A_k t} x = e^{A_k t}(\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{i t f(n)} c_n e_n. \tag{3.43}$$

Доказательство всех результатов данного подраздела основано на применении предложения 2.3 и неравенства Харди (1.6) для случая $p > 1$, и проводится аналогично соответствующим результатам из подраздела 3.4.

Отметим, что $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные векторы A_k, соответствующие собственным числам $\{if(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Из предложения 3.4 имеем, что $\overline{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \ell_{p,k}(\{e_n\})$, а значит $\overline{D(A_k)} = \ell_{p,k}(\{e_n\})$, но $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом пространства $\ell_{p,k}(\{e_n\})$.

Комбинируя теорему 1.1 с теоремой 3.6, получаем следующее.

Следствие 3.7. Пусть $p > 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда задача Коши (3.19) с оператором A_k из теоремы 3.6 является корректной в пространстве $\ell_{p,k}(\{e_n\})$ и ее решение задается формулой (3.43), где $x = x_0$.

Сконструированная в теореме 3.6 C_0-группа $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ принадлежит к классу полиномиально ограниченных C_0-групп.

Предложение 3.8. Пусть $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$ и $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ – C_0-группа из теоремы 3.6. Тогда существует полином $\mathfrak{p}_k$ с положительными коэффициентами, степени $\deg \mathfrak{p}_k = k,$ такой что для всякого $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка:

$$\left\|e^{A_k t}\right\| \le \mathfrak{p}_k(|t|).$$

Справедлива следующая теорема о резольвенте генератора A_k из теоремы 3.6, его спектре $\sigma(A_k)$ и $\rho(A_k)$.

Теорема 3.7. Пусть $p > 1$ и A_k – оператор из теоремы 3.6. Тогда $\sigma(A_k) = \sigma_p(A_k) = \{if(n)\}_1^{\infty}$, $\rho(A_k) = \mathbb{C} \setminus \{if(n)\}_1^{\infty}$ и

$$(A_k - \lambda I)^{-1} x = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{if(n) - \lambda} c_n e_n, \quad \lambda \in \rho(A_k),$$

где $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in \ell_{p,k}(\{e_n\})$.

Таким образом, A_k имеет чисто точечный спектр $\{\lambda_n = if(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, который не удовлетворяет (1.3), и, более того, не может быть представлен в виде объединения $K < \infty$ множеств, удовлетворяющих (1.3), поскольку $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_k$.

В результате комбинации предложения 3.8 с теоремой 3 из работы [19] имеем, что мажоранта резольвенты $M(\delta) = \sup\limits_{|\Re\lambda|\geq\delta} \left\|(A_k - \lambda I)^{-1}\right\|$ удовлетворяет условию Левинсона (3.40) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $p \geq 1$. Определим оператор $A : \ell_{p,1}(\{e_n\}) \supset D(A) \mapsto \ell_{p,1}(\{e_n\})$ формулой

$$Ax = A(\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n, \tag{3.44}$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, с областью определения

$$D(A) = \left\{ x = (\mathfrak{f}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in \ell_{p,1}(\{e_n\}) : \ \{\lambda_n c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta) \right\}. \tag{3.45}$$

Привлекая аргументы, аналогичные тем, что в доказательстве предложения 3.5, можно доказать следующее.

Предложение 3.9. Пусть $p \geq 1$, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (3.1) и существует $\alpha \in \left(0, \frac{1}{p}\right]$: $\liminf\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}|\lambda_{n-1} - \lambda_n| > 0$. Тогда оператор A, определенный формулой (3.44), с областью определения (3.45), не порождает C_0-полугруппу в пространстве $\ell_{p,1}(\{e_n\})$.

Параллельно, комбинируя предложение 3.9 с теоремой 1.1, мы получаем следствие о некорректности соответствующих задач Коши (0.1) в $\ell_{p,1}(\{e_n\})$.

Следствие 3.8. Пусть $p \geq 1$. Тогда задача Коши (0.1) с оператором A из предложения 3.9 не является корректной в пространстве $\ell_{p,1}(\{e_n\})$.

Имеет место следствие, аналогичное следствию 3.5.

Следствие 3.9. Пусть $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$ и $\omega_0(A_k)$ – логарифмический показатель роста C_0-группы $\left\{e^{A_k t}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, сконструированной в теореме 3.6, а $\omega_s(A_k) = \sup\{\Re\lambda : \ \lambda \in \sigma(A_k)\}$ – спектральная граница ее генератора

A_k. Тогда

$$\omega_0(A_k) = \omega_s(A_k) = 0.$$

3.6. Выводы к разделу

В разделе 3 представлен класс генераторов C_0-групп с собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, удовлетворяющими условию (3.1), и полным, минимальным, но не равномерно минимальным семейством соответствующих собственных векторов. Класс представлен как в специальных гильбертовых пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, так и в банаховых пространствах $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Ключевым моментом доказательств основных результатов является применение дискретного неравенства Харди (1.6).

Обнаружено, что феномен порождения оператором C_0-группы для исследуемого класса операторов существенным образом зависит от поведения спектра оператора в окрестности точки $i\infty$. Так, найдены условия на спектр оператора, при выполнении которых он не будет генерировать даже C_0-полугруппу в соответствующем пространстве. Из полученных результатов выведены следствия о корректности и, соответственно, некорректности задач Коши для абстрактных дифференциальных уравнений вида (0.1) и (3.19), найдены явные формулы решений корректных задач.

Проведено исследование асимптотического поведения сконструированных C_0-групп $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, когда $t \to \pm\infty$, и показано, что C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, растут при $t \to \pm\infty$, но не быстрее некоторых полиномов степени k. Установлено, что C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в пространствах $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$, также являются полиномиально ограниченными. Кроме того, найдены формулы для резольвент их генераторов и оценки роста резольвент.

РАЗДЕЛ 4

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ШАУДЕРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном разделе получены результаты об устойчивости базисов и разложений Шаудера в банаховых пространствах. Исследован важный, в контексте раздела 2, вопрос: при каких условиях некоторая минимальная последовательность будет симметричным базисом в пространстве $\ell_p,$ $1 \leq p < \infty$, c_0, либо в гильбертовом пространстве? Получены результаты об устойчивости симметричных базисов в гильбертовых пространствах, пространствах $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, и c_0. По сути, устойчивость симметричного базиса означает, что последовательность, в некотором смысле близкая к симметричному базису, сама оказывается симметричным базисом. Аналогичным образом понимается устойчивость разложений Шаудера. Полученные результаты применяются к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений в гильбертовых пространствах, пространствах $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, и c_0.

В подразделе 4.1 изучаются свойства изоморфных и безусловных разложений Шаудера в произвольных банаховых пространствах. Далее, в подразделе 4.2 предложен класс банаховых пространств и проекторов, для которых справедливы теоремы, подобные теореме Като 1.6. Используя результаты подраздела 4.1, в подразделе 4.3 мы получаем результаты об устойчивости безусловных базисов и разложений Шаудера в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, и гильбертовых пространствах, в том числе и результаты об устойчивости симметричных базисов – предложения 4.4, 4.5, 4.8 и следствие 4.10. В подразделе 4.4 мы рассматриваем приложения этих результатов, а также результатов раздела 2, к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений в $\ell_p,\ 1 \le p < \infty$, c_0, а также в гильбертовых пространствах.

Основными результатами раздела 4 являются теоремы 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, следствие 4.6 и предложение 4.10.

4.1. Изоморфные и безусловные разложения Шаудера, их свойства

В данном разделе используются следующие определения.

Определение 4.1. Будем говорить, что разложения Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ банахова пространства X изоморфны, если существует изоморфизм $S : X \mapsto X$, такой что $\mathfrak{N}_n = S\mathfrak{M}_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Определение 4.2. Скажем, что последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ в банаховом пространстве X подобны, если существует изоморфизм $S : X \mapsto X$, такой, что $J_n = SP_nS^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Предложение 4.1. Для двух разложений Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в X с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$, соответственно, следующие утверждения эквивалентны:

$$\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ изоморфны;} \tag{4.1}$$

$$\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \{J_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ подобны.} \tag{4.2}$$

Доказательство. Предположим, что выполнено (4.1), т.е. что существует изоморфизм S, такой, что $\mathfrak{N}_n = S\mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Всякий элемент $x \in X$ имеет представление $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} J_n x$. Тогда элемент $y = S^{-1}x \in X$ имеет разложение

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} S^{-1} J_n x, . \tag{4.3}$$

С другой стороны, y имеет также следующее представление,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} P_n y. \tag{4.4}$$

Поскольку $\mathfrak{M}_n = S^{-1}\mathfrak{N}_n$ для всех n, мы получаем, что $S^{-1}J_nx \in \mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Комбинируя (4.3) с (4.4), мы заключаем, что $S^{-1}J_nx = P_ny$, а значит $J_nx = SP_nS^{-1}x,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Обратно, если справедливо (4.2), т.е. если существует изоморфизм S, такой, что $J_n = SP_nS^{-1},\ n \in \mathbb{Z}_+$, то для всякого n и $x \in \mathfrak{N}_n$ имеет место равенство $x = J_nx = SP_nS^{-1}x$. Поскольку $P_nS^{-1}x \in \mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+,$ то $x \in S\mathfrak{M}_n$. Таким образом $\mathfrak{N}_n \subset S\mathfrak{M}_n$.

Для доказательства обратного включения, возьмем любое n и $y = S^{-1}x \in \mathfrak{M}_n$. Тогда $P_ny = y$, а значит $x = Sy = SP_ny \in S\mathfrak{M}_n$. Так как $J_nx = SP_nS^{-1}x = SP_ny = x$, мы получаем $x \in \mathfrak{N}_n$. Тогда $\mathfrak{N}_n \supset S\mathfrak{M}_n,$ а значит $\mathfrak{N}_n = S\mathfrak{M}_n,\ n \in \mathbb{Z}_+.$ □

Изоморфные разложения Шаудера были впервые рассмотрены в [32,33] для пространств Гильберта. Работы [32, 33] фокусируются на изучении проекторов, подобных ортопроекторам, но, учитывая предложение 4.1, изучение подобных систем проекторов эквивалентно изучению изоморфных разложений Шаудера.

Все безусловные разложения Шаудера в X имеют следующую характеризацию.

Теорема 4.1. [81] [141, Теорема 15.18] Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – полная последовательность ненулевых подпространств в X. Тогда следующие условия эквивалентны.

I. $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в X.

II. Всякая перестановка $\{\mathfrak{M}_{\sigma(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ является разложением Шаудера в X.

III. Для всякой пары возрастающих последовательностей $\{s_n\}_{n=0}^{\infty},\ \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющей $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \cup \{z_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathbb{Z}_+$, подпространство $\overline{Lin}\{\mathfrak{M}_{s_n}\}_{n=0}^{\infty}$ является дополняемым к

$\overline{Lin}\{\mathfrak{M}_{z_n}\}_{n=0}^{\infty}$ в X, т.е.

$$\overline{Lin}\{\mathfrak{M}_{s_n}\}_{n=0}^{\infty} \oplus \overline{Lin}\{\mathfrak{M}_{z_n}\}_{n=0}^{\infty} = X.$$

IV. Существует константа $M \geq 1$, такая, что $\left\| \sum\limits_{i=0}^{n} \delta_i y_i \right\| \leq M \left\| \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \right\|$ для произвольных $n \in \mathbb{Z}_+$, $y_i \in \mathfrak{M}_i$ и $\delta_i \in \{0,1\}$.

Определение 4.3. Скажем, что $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера с константой M, если выполняется условие IV теоремы 4.1.

Замечание 4.1. В силу теоремы 4.1 и предложения 4.1, всякая последовательность подпространств $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$, изоморфная безусловному разложению Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ с константой M, сама является безусловным разложением Шаудера с константой $M\|S\|\|S^{-1}\|$, где $\mathfrak{N}_n = S\mathfrak{M}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Отметим, что все безусловные разложения Шаудера в гильбертовом пространстве H обладают дополнительной характеризацией. Комбинируя предложение 4.1 и теорему 4.1 с леммой 1 из [153] и теоремой 7 из [32], мы получим следующее.

Теорема 4.2. Для разложения Шаудера $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в H с проекторами $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующие условия эквивалентны.

I. $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера.

II. $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – базис Рисса из подпространств, т.е. найдется ортогональное разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$, изоморфное $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

III. Существует последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, подобная $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$.

IV. Существует константа $C \geq 1$, такая, что $\frac{1}{C}\|x\|^2 \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|J_n x\|^2 \leq C\|x\|^2$ для всякого $x \in H$.

Теорема 4.2 гарантирует единственность, с точностью до изоморфизма, безусловного разложения Шаудера в H и, следовательно, единственность ограниченного безусловного базиса в H. В отличие от гильбертовых пространств, пространство Банаха имеет, с точностью до изоморфизма, единственный ограниченный безусловный базис в том и только том случае, когда оно изоморфно ℓ_1, ℓ_2 или c_0, см. [86, с. 1640].

Далее мы будем пользоваться следующими определениями.

Определение 4.4. [102, с. 137] Выпуклая, неубывающая, непрерывная на $[0,\infty)$ функция Φ, удовлетворяющая $\Phi(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$, называется функцией Орлича.

Определение 4.5. [102, с. 137] Пусть Φ – функция Орлича. Пространство (последовательностей) Орлича ℓ_Φ – это банахово пространство всех скалярных последовательностей $x=(a_0,a_1,\dots)^T$, таких, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{|a_n|}{\rho}\right)<\infty$ для некоторого $\rho>0$, снабженное нормой $\|x\|_{\ell_\Phi}=\inf\left\{\rho>0:\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{|a_n|}{\rho}\right)\leq 1\right\}$.

Пусть X – произвольное банахово пространство. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbb{E}\left\|\sum\limits_{j=0}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|=\frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum\limits_{j=0}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|$, где $\{x_j\}_{j=0}^{n}\subset X$ – конечный набор векторов. Можно показать, что $\mathbb{E}\left\|\sum\limits_{j=0}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|=\int\limits_0^1\left\|\sum\limits_{j=0}^{n}r_j(t)x_j\right\|dt$, где $\{r_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность функций Радемахера, которая определяется следующим образом: $r_j(t)=sign(\sin(2^{j+1}\pi t))$, $t\in[0,1]$, $j\in\mathbb{Z}_+$.

Перейдем к изучению свойств безусловных разложений Шаудера X в зависимости от внутренней геометрии X. Для этого введем следующие определения.

Определение 4.6. Будем говорить, что банахово пространство X имеет тип Орлича-Радемахера Φ с константой $T_\Phi(X)$, если существует функция Орлича Φ и константа $T_\Phi(X)$, такие, что, для всякого конечного набора векторов $\{x_j\}_{j=0}^n \subset X$, имеем

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j x_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq T_\Phi(X)\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|x_j\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}. \qquad (4.5)$$

Определение 4.7. Будем говорить, что банахово пространство X имеет котип Орлича-Радемахера Ψ с константой $C_\Psi(X)$, если существует функция Орлича Ψ и константа $C_\Psi(X)$, такие, что, для всякого конечного набора векторов $\{x_j\}_{j=0}^n \subset X$, имеем

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j x_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq C_\Psi(X)\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^n \Psi\left(\frac{\|x_j\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}. \qquad (4.6)$$

Определение 4.8. Скажем, что банахово пространство X имеет инфратип Орлича-Радемахера Φ с константой $I_\Phi(X)$, если существует функция Орлича Φ и константа $I_\Phi(X)$, такие, что, для всякого конечного набора векторов $\{x_j\}_{j=0}^n \subset X$, справедливо

$$\min_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j x_j\right\| \leq I_\Phi(X)\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|x_j\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}. \qquad (4.7)$$

Определение 4.9. Скажем, что банахово пространство X имеет M-котип Орлича-Радемахера Ψ с константой $M_\Psi(X)$, если существует функция Орлича Ψ и константа $M_\Psi(X)$, такие, что, для всякого конечного набора векторов $\{x_j\}_{j=0}^n \subset X$, справедливо

$$\max_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j x_j\right\| \geq M_\Psi(X)\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^n \Psi\left(\frac{\|x_j\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}. \qquad (4.8)$$

Эти понятия являются обобщениями известных понятий типа, котипа, инфратипа и M-котипа (Радемахера) банахова пространства X, см. [85–87, 103]. В самом деле, если мы возьмем функцию $\Phi(t) = t^p$, то $\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|x_j\|}{\rho}\right)\leq 1\right\} = \left(\sum_{j=0}^n \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ и определение 4.6 совпадет с определением пространства Банаха, обладающего типом (Радемахера) p. Аналогичным образом, выбором $\Phi(t)=t^p$ или $\Psi(t)=t^q$ определения 4.8, 4.7 и 4.9 сводятся к классическим определениям, соответственно, инфратипа, котипа и M-котипа (Радемахера) банахова пространства X, см. [85, с. 48], [85, с. 48-49], [87, с. 68], [87, с. 49-50]. Все возможные значения типа X лежат на отрезке $[1,2]$, а все возможные значения котипа – на $[2,\infty]$, см. [85, с. 49]. Любое пространство Банаха имеет тип $p=1$ и котип $q=\infty$ в силу выпуклости нормы, см. [85, с. 49], [103], причем, в случае $q=\infty$ выражение $\left(\sum\limits_{j=0}^{n}\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ превращается в $\max\limits_{0\le j\le n}\|x_j\|$.

Как и в случае с определениями типа и котипа, L_2-среднее $\left(\int\limits_0^1\left\|\sum\limits_{j=0}^{n}r_j(t)x_j\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ в определениях 4.6, 4.7, 4.8 и 4.9, в силу неравенства Кахана-Хинчина [85, с. 50], может быть заменено любым другим L_p-средним, $p\in[1,\infty)\setminus\{2\}$, без особого влияния на суть определений. Но, конечно же, это повлечет изменения констант $T_\Phi(X)$, $C_\Psi(X)$, $I_\Phi(X)$ и $M_\Psi(X)$.

Теперь мы применим введенные выше определения к исследованию поведения безусловных разложений Шаудера в банаховых пространствах.

Лемма 4.1. Пусть X – банахово пространство, обладающее безусловным разложением Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Предположим, что X имеет тип (или инфратип) Орлича-Радемахера Φ, и X имеет котип (или M-котип) Орлича-Радемахера Ψ. Тогда существуют константы $T=T(\Phi,M)>0$ и $C=C(\Psi,M)>0$, такие, что для всякого $x\in X$ имеет место неравенство

$$C\|\,\{\|P_nx\|\}_{n=0}^{\infty}\,\|_{\ell_\Psi}\le\|x\|\le T\cdot\inf\left\{\rho>0:\sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{\|P_nx\|}{\rho}\right)\le 1\right\}. \quad (4.9)$$

Доказательство. Доказательство леммы следует идеям доказательства леммы 1 работы [153].

Поскольку X имеет тип Орлича-Радемахера Φ, для всякого $x\in X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существует набор чисел $\{\underline{\varepsilon}_j\}_{j=0}^n \subset \{-1, 1\}$, такой, что

$$\left\|\sum_{j=0}^n \underline{\varepsilon}_j P_j x\right\| = \left(\min_{\varepsilon_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j P_j x\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j P_j x\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq T_\Phi(X) \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Если X имеет инфратип Орлича-Радемахера Φ, то

$$\left(\min_{\varepsilon_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j P_j x\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq I_\Phi(X) \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Выбрав теперь $T(\Phi) = \max\{T_\Phi(X), I_\Phi(X)\}$, будем иметь следующее,

$$\left\|\sum_{j=0}^n \underline{\varepsilon}_j P_j x\right\| \leq T(\Phi) \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Сконструируем операторы $P_n^+ = \sum\limits_{j:\underline{\varepsilon}_j=1} P_j$, $P_n^- = \sum\limits_{j:\underline{\varepsilon}_j=-1} P_j$. Тогда, поскольку $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ – безусловное разложение Шаудера с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ (см. определение 4.3), будем иметь

$$\left\|\sum_{j=0}^n P_j x\right\| = \left\|(P_n^+ + P_n^-)x\right\| = \left\|(P_n^+ - P_n^-)^2 x\right\| \leq 2M \left\|(P_n^+ - P_n^-)x\right\| = 2M$$
$$\times \left\|\sum_{j=0}^n \underline{\varepsilon}_j P_j x\right\| \leq 2MT(\Phi) \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{j=0}^n \Phi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Предельным переходом по n из последней оценки выводится правое неравенство из (4.9) с константой $T = 2MT(\Phi)$.

Далее, так как X имеет котип Орлича-Радемахера Ψ, для всякого $x \in X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существует набор чисел $\{\overline{\varepsilon}_j\}_{j=0}^n \subset \{-1, 1\}$, такой, что

$$\left\|\sum_{j=0}^n \overline{\varepsilon}_j P_j x\right\| = \left(\max_{\varepsilon_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j P_j x\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=0}^n \varepsilon_j P_j x\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq C_\Psi(X) \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{j=0}^n \Psi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Если X имеет M-котип Орлича-Радемахера Ψ, то

$$\left(\max_{\varepsilon_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j P_j x\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq M_\Psi(X)\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^{n}\Psi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}.$$

Обозначив $C(\Psi)=\min\{C_\Psi(X),M_\Psi(X)\}$, в итоге получим

$$\left\|\sum_{j=0}^{n}\overline{\varepsilon}_j P_j x\right\| \geq C(\Psi)\inf\left\{\rho>0:\sum_{j=0}^{n}\Psi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}.$$

Заметим, что, для всякого набора чисел $\{\overline{\varepsilon}_j\}_{j=0}^n\subset\{-1,1\}$ существует два набора чисел $\{\delta_j^+\}_{j=0}^n\subset\{0,1\}$ и $\{\delta_j^-\}_{j=0}^n\subset\{0,1\}$, такие, что

$$\left\|\sum_{j=0}^{n}\overline{\varepsilon}_j P_j x\right\| = \left\|\sum_{j=0}^{n}\delta_j^+ P_j x-\sum_{j=0}^{n}\delta_j^- P_j x\right\| \leq 2M\|x\|.$$

Следовательно, $C(\Psi)\inf\left\{\rho>0:\sum\limits_{j=0}^{n}\Psi\left(\frac{\|P_j x\|}{\rho}\right)\leq 1\right\}\leq 2M\|x\|$, и (4.9) доказано с константой $C=(2M)^{-1}C(\Psi)$. □

Отметим, что лемма 4.1 является обобщением леммы 1 работы [153], в которой был установлен этот результат для пространств Гильберта. Подчеркнем, что лемма 1 работы [153] без уточнения констант в двойном неравенстве следует из одной леммы, полученной В. Орличем [119] в 1933 году.

Следствие 4.1. Пусть X – банахово пространство, обладающее безусловным разложением Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Предположим, что X имеет тип (или инфратип) p, и X имеет котип (или M-котип) q. Тогда сущестуют константы $T=T(p,M)>0$ и $C=C(q,M)>0$, такие, что для всякого $x\in X$ справедливо

$$C\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|x\|\leq T\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.10}$$

Замечание 4.2. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ – безусловное разложение Шаудера с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ в гильбертовом пространстве H.

Тогда, в силу следствия 4.1 и доказательства леммы 4.1, для всякого $x \in H$ верно неравенство, $\frac{1}{2M}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \leq 2M\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, которое совпадает с неравенством из пункта IV теоремы 4.2.

Продемонстрируем применение леммы 4.1 на примере безусловных разложений Шаудера в пространствах $L_p(\mu)$. Всюду далее под $L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, мы будем подразумевать банахово пространство μ-измеримых функций f, для которых $\|f\| = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Используя связь наилучших констант в неравенствах (4.5), (4.6), соответствующих наилучшим показателям типа и котипа пространства $L_p(\mu)$, с наилучшими константами неравенства Хинчина (см. [85, с. 49]), и точные значения этих констант, вычисленные У. Хаагерупом в [71], мы получаем следующее.

Предложение 4.2. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в $L_p(\mu)$ с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Обозначим p_0 – решение уравнения $\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ на интервале $[1, 2]$, где Γ – гамма-функция Эйлера, $p_0 \approx 1,84742$. Тогда верны следующие утверждения.

I. Если $p \in [1, p_0]$, то для всех $x \in L_p(\mu)$ мы имеем

$$\frac{2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}{M}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \leq 2M\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.11}$$

II. Если $p \in [p_0, 2]$, то для всех $x \in L_p(\mu)$ мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}M}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \leq 2M\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.12}$$

III. Если $p \in [2, \infty)$, то для всех $x \in L_p(\mu)$ мы имеем

$$\frac{1}{2M}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\| \leq \sqrt{8}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{p}} M\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Известно, что пространства $L_p(\mu)$, $p\in[1,\infty)$, имеют (наилучший возможный) тип $\min\{2,p\}$ и (наилучший возможный) котип $\max\{2,p\}$, см. [85, с. 49], [103]. Также известно, что наилучшие константы в неравенствах (4.5), (4.6), которые соответствуют наилучшим возможным показателям типа $\min\{2,p\}$ и котипа $\max\{2,p\}$, удовлетворяют следующим соотношениям,

$$T_p(L_p(\mu))=1,\ C_2(L_p(\mu))\geq A_p \text{ для } p\in[1,2],$$
$$T_2(L_p(\mu))\leq B_p,\ C_p(L_p(\mu))=1 \text{ для } p\in[2,\infty),$$

где A_p и B_p – наилучшие константы неравенства Хинчина, см. [85, с. 49]. Как было установлено У. Хаагерупом в [71],

$$A_p=\begin{cases} 2^{\frac12-\frac1p}, & p\in(0,p_0],\\ 2^{\frac12}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac1p}, & p\in[p_0,2],\\ 1, & p\in[2,\infty),\end{cases}\quad B_p=\begin{cases} 1, & p\in(0,2],\\ 2^{\frac12}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac1p}, & p\in[2,\infty),\end{cases}$$

Следовательно, для $p\in[1,p_0]$ мы имеем $C_2(L_p(\mu))\geq 2^{\frac12-\frac1p}$, для $p\in[p_0,2]$ мы имеем $C_2(L_p(\mu))\geq 2^{\frac12}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac1p}$, и для $p\in[2,\infty)$ мы имеем $T_2(L_p(\mu))\leq 2^{\frac12}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac1p}$. На основании следствия 4.1, принимая во внимание ход доказательства леммы 4.1, получаем требуемое. □

Замечание 4.3. В подразделах 4.1, 4.2 и 4.3 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет обозначать канонический базис ℓ_p, $p\in[1,\infty)$, т.е. $e_n=(\delta_i^n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Всюду далее будем считать, что функция Орлича Φ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, т.е.

$$\limsup_{t\to0}\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)}<\infty.$$

Тогда $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует симметричный базис ℓ_Φ [102, с. 138] .

Определение 4.10. [141][с. 530] Разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства X называется ℓ_Φ-бесселевым (∞-бесселевым), если сходимость $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ в X, где $x_n \in \mathfrak{M}_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, влечет сходимость $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| e_n$ в ℓ_Φ (в c_0).

Определение 4.11. [141][с. 531] Разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства X называется ℓ_Φ-гильбертовым (∞-гильбертовым), если сходимость $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| e_n$ в ℓ_Φ (в c_0) влечет сходимость $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ в X, где $x_n \in \mathfrak{M}_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

В частном случае, когда $\ell_\Phi = \ell_p,\ p \in [1, \infty)$, используются термины p-бесселево, соответственно, p-гильбертово разложение Шаудера. Разложение Шаудера, которое является p-бесселевым и p-гильбертовым одновременно, называется ℓ_p-разложением, если $p < \infty$, и c_0-разложением при $p = \infty$ [141, с. 531]. Все ℓ_Φ-бесселевы и ℓ_Φ-гильбертовы разложения Шаудера имеют следующую характеризацию.

Теорема 4.3. [141, теорема 15.16] Для разложения Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в X справедливы следующие утверждения.

(i) $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ℓ_Φ-бесселевым (∞-бесселевым) в том и только том случае, если существует константа $c > 0$, такая, что

$$c \left\| \sum_{j=0}^{n} \|x_j\| e_j \right\|_{\ell_\Phi(c_0)} \le \left\| \sum_{j=0}^{n} x_j \right\|$$

верно для всех конечных последовательностей $x_j \in \mathfrak{M}_j \ \ j = 0, \dots, n.$

(ii) $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ℓ_Φ-гильбертовым (∞-гильбертовым) в том и только том случае, если существует константа $C > 0$, такая, что

$$C \left\| \sum_{j=0}^{n} \|x_j\| e_j \right\|_{\ell_\Phi(c_0)} \ge \left\| \sum_{j=0}^{n} x_j \right\|$$

верно для всех конечных последовательностей $x_j \in \mathfrak{M}_j \ \ j = 0, \dots, n.$

Замечание 4.4. Комбинируя теорему 4.3 с теоремой 4.2, получим, что разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H является безусловным в том и только том случае, если $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_2-разложение.

Отметим, что замечание 4.4 следует из [119] и в той или иной форме было ранее установлено в [9, 97, 104]. Подобная ситуация относительно связи $\ell_p(c_0)$-разложений с безусловными разложениями для случая банаховых пространств – это, скорее, исключение, нежели правило. Комбинируя теорему 4.3 с теоремой 4.1, мы видим, что всякое ℓ_p-разложение или всякое c_0-разложение является безусловным, но обратное, вообще говоря, неверно. Среди исключений оказываются пространства ℓ_1 и c_0. А именно, применение теоремы 15.19 из [141] приводит к следующему.

Предложение 4.3. (i) Разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в ℓ_1 является безусловным в том и только том случае, если $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_1-разложение. (ii) Разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в c_0 является безусловным в том и только том случае, если $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – c_0-разложение.

Теорема 4.4. Пусть X – банахово пространство с безусловным разложением Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Предположим, что X имеет тип или инфратип Орлича-Радемахера Φ, и X имеет котип или M-котип Орлича-Радемахера Ψ. Тогда $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Φ-гильбертово и ℓ_Ψ-бесселево.

Эта теорема следует из комбинации леммы 4.1 с теоремой 4.3.

Для безусловных разложений Шаудера в пространствах с классическими геометрическими характеристиками типа, котипа, инфратипа и M-котипа мы имеем следствие из теоремы 4.4.

Следствие 4.2. Пусть X – банахово пространство с безусловным разложением Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Предположим, что X имеет тип или инфратип p, и X имеет котип или M-котип q. Тогда $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – p-гильбертово и q-бесселево.

Принимая во внимание формулировку теоремы 1.7, мы выводим из следствия 4.2 следующий результат об устойчивости произвольного безусловного разложения Шаудера в любом банаховом пространстве, им обладающим.

Следствие 4.3. Пусть X имеет котип q или M-котип q, и пусть X имеет безусловное разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда справедливы утверждения I и II теоремы 1.7.

4.2. Распространение теоремы Като и разложения Шаудера-Орлича

Для формулировки результатов нам понадобится следующее.

Определение 4.12. Будем говорить, что разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в X с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Ψ-гильбертово (или, соответственно, ∞-гильбертово) с константой C, если для всех $x \in X$ имеет место

$$\|x\| \leq C \cdot \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \Psi\left(\frac{\|P_n x\|}{\rho}\right) \leq 1 \right\},$$

$$\text{или, соответственно,} \quad \|x\| \leq C \cdot \sup_{n \geq 0} \|P_n x\|.$$

Для того, чтобы далее единообразно работать с ℓ_Ψ-гильбертовыми и ∞-гильбертовыми разложениями Шаудера, мы будем использовать следующее обозначение: $\|\!| \cdot |\!\| = \| \cdot \|_{\ell_\Psi}$, если $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Ψ-гильбертово разложение Шаудера, и $\|\!| \cdot |\!\| = \| \cdot \|_{c_0}$, если $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ∞-гильбертово.

Одной из основных целей раздела 4 является следующее распространение теоремы Като 1.6 на случай ℓ_Ψ-гильбертовых (∞-гильбертовых) разложений Шаудера в пространствах Орлича ℓ_Φ.

Теорема 4.5. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Ψ-гильбертово (∞-гильбертово) разложение Шаудера с константой C и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве Орлича ℓ_Φ, причем для всякого $x = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T \in \ell_\Phi$ имеем

$$P_0 x = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 0, 0, \dots)^T.$$

Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в ℓ_Φ, удовлетворяющих $J_n J_m = \delta_n^m J_n$ для $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что выполнено условие

$$\dim P_0 = \dim J_0 = m < \infty, \tag{4.14}$$

и для всех $x \in \ell_\Phi$ справедливо

$$\left\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\| e_n \right\| \right\| \leq \varsigma \|x\|, \tag{4.15}$$

где $\varsigma \in \left[0, C^{-1}\right)$. Тогда $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{J_n(\ell_\Phi)\}_{n=0}^{\infty}$ – изоморфные разложения Шаудера пространства ℓ_Φ.

Доказательство. Доказательство в целом аналогично доказательству теоремы Като в работе [93]. Сконструируем оператор S в ℓ_Φ по формуле

$$Sx = \sum_{n=0}^{\infty} P_n J_n x. \tag{4.16}$$

Чтобы показать, что ряд в правой части (4.16) сходится, мы покажем, что

$$x - Sx = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x - Sx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_n - P_n J_n\right) x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(P_n - J_n\right) x$$

сходится. В самом деле, так как $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ℓ_Ψ-гильбертово (∞-гильбертово) разложение Шаудера с константой C и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, для всякого $x \in \ell_\Phi$ и каждого $N \in \mathbb{Z}_+$ мы имеем, в силу (4.15), что

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=k}^{k+N} P_n \left(P_n - J_n\right) x \right\| &\leq C \left\| \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left\| P_j \left(\sum_{n=k}^{k+N} P_n \left(P_n - J_n\right) x \right) \right\| e_j \right\| \right\| \\ &= C \left\| \left\| \sum_{n=k}^{k+N} \|P_n(J_n - P_n)x\| e_n \right\| \right\|\end{aligned}$$

стремится к нулю, когда $k \to \infty$.

Рассмотрим оператор $R = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n \left(P_n - J_n\right) = I - P_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n J_n$. Поскольку

$$\begin{aligned}\|Rx\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n \left(P_n - J_n\right) x \right\| \\ &\leq C \left\| \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left\| P_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n \left(P_n - J_n\right) x \right) \right\| e_j \right\| \right\| \leq C\varsigma \|x\|\end{aligned}$$

в силу (4.15), мы имеем $\|R\| < 1$. Далее мы отмечаем, что, так как $S = P_0 J_0 + I - P_0 - R$, то $\|S\| < \|J_0\| + 3 < \infty$. Теперь (4.16) влечет

$$SJ_n = \sum_{j=0}^{\infty} P_j J_j J_n = P_n J_n = \sum_{j=0}^{\infty} P_n P_j J_j = P_n S.$$

Таким образом, теорема будет доказана, если мы покажем, что S – непрерывно обратим. С этой целью рассмотрим

$$\widetilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n J_n = I - P_0 - R. \tag{4.17}$$

Так как $\dim P_0 = m < \infty$, в силу определения проектора P_0 мы получаем, что $(I - P_0)$ – фредгольмовый оператор с

$$\text{nul}\,(I - P_0) = m, \quad \text{ind}\,(I - P_0) = 0, \quad \gamma\,(I - P_0) = 1,$$

где $\text{nul}\,T$ – степень вырождения, $\text{ind}\,T$ – индекс, и $\gamma\,(T)$ – приведенный минимальный модуль оператора T (подробнее см. [92, Глава IV, §5.1]).

Действительно, сперва мы отмечаем, что $\text{nul}\,(I - P_0) = \dim P_0 = m$,

$$\begin{aligned}\text{def}\,(I - P_0) &= \dim \ell_\Phi / Im\,(I - P_0) = \dim \ell_\Phi / \overline{Im\,(I - P_0)} \\ &= \dim \text{coker}\,(I - P_0) = \dim\,(Im\,(I - P_0))^\perp = m,\end{aligned}$$

$\text{ind}\,(I - P_0) = \text{nul}\,(I - P_0) - \text{def}\,(I - P_0) = 0$, где $\text{def}\,T$ обозначает дефект оператора T, см. [92, с. 29], [5].

Во-вторых, поскольку для каждого $x = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T \in \ell_\Phi$

$$\begin{aligned}\inf_{v \in \ker(I - P_0)} \|x - v\| &= \inf_{v \in Im P_0} \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{|a_n - v_n|}{\rho} \right) \le 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=m}^{\infty} \Phi\left(\frac{|a_n|}{\rho} \right) \le 1 \right\} = \|\,(I - P_0)\,x\|,\end{aligned}$$

где $v = (v_0, v_1, v_2, \dots)^T \in Im P_0$, мы получаем, что $\gamma\,(I - P_0) =$

$$\sup \left\{ \gamma : \ \|\,(I - P_0)\,x\| \ge \gamma \inf_{v \in \ker(I - P_0)} \|x - v\|, \ x \in D\,(I - P_0) = \ell_\Phi \right\} = 1.$$

Условие $\|R\| < 1 = \gamma\,(I - P_0)$ влечет, что $\widetilde{S} = (I - P_0) - R$ также фредгольмовый оператор с

$$\text{nul}\,\widetilde{S} \le \text{nul}\,(I - P_0) = m, \quad \text{ind}\,\widetilde{S} = \text{ind}\,(I - P_0) = 0 \tag{4.18}$$

(см. [92, Глава IV, Теорема 5.22]). Так как $S = P_0J_0 + \widetilde{S}$, где P_0J_0 – компактный оператор, то S – также фредгольмов и $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} \widetilde{S} = 0$ (см. [92, Глава IV, Теорема 5.26]). Следовательно, $\operatorname{nul} S = \operatorname{def} S$, и S будет непрерывно обратимым в ℓ_Φ тогда и только тогда, когда $\operatorname{nul} S = \operatorname{def} S = 0$. Таким образом, достаточно доказать, что $\operatorname{nul} S = 0$.

Для этого, сперва покажем, что

$$\ker \widetilde{S} = ImJ_0. \tag{4.19}$$

Если $x \in ImJ_0$, т.е. $x = J_0y$, то $\widetilde{S}x = \widetilde{S}J_0y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_nJ_nJ_0y = 0$ и, следовательно, $x \in \ker \widetilde{S}$. С другой стороны, $\ker \widetilde{S} \subset ImJ_0$, поскольку $\ker \widetilde{S}$ и ImJ_0 – линейные подпространства, $\dim ImJ_0 = m$ и $\dim \ker \widetilde{S} \leq m$ на основании (4.18).

Теперь предположим, что $x \in \ker S$. Тогда,

$$0 = P_0Sx = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} P_nJ_nx = P_0J_0x$$

и $\widetilde{S}x = Sx - P_0J_0x = 0$. Следовательно, $x \in \ker \widetilde{S}$, $x = J_0y$ на основании (4.19) и, поэтому,

$$P_0x = P_0J_0y = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} P_nJ_nJ_0y = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} P_nJ_nx = 0.$$

В результате, $(I - R)x = (\widetilde{S} + P_0)x = 0.$ Поскольку $\|R\| < 1$, мы получаем $x = 0$. Таким образом, $\ker S = \{0\}$, $\operatorname{nul} S = 0$ и S – непрерывно обратим. Наконец, так как $J_n = S^{-1}P_nS,\ n \in \mathbb{Z}_+,$ то, на основании предложения 4.1, $\mathfrak{M}_n = SJ_n(\ell_\Phi),\ n \in \mathbb{Z}_+.$ Следовательно $\{J_n(\ell_\Phi)\}_{n=0}^{\infty}$ – также разложение Шаудера пространства ℓ_Φ, изоморфное $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$. □

Замечание 4.5. Всякое разложение Шаудера является 1- гильбертовым с константой 1. Действительно, если $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – разложение Шаудера в X с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, то для любого $x \in X$ верно $\|x\| = \left\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_nx\right\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|P_nx\|$.

На основании замечания 4.5 мы выводим из теоремы 4.5 следующее.

Следствие 4.4. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – разложение Шаудера в ℓ_Φ с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, такими, что для любого $x = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T \in \ell_\Phi$ имеем $P_0 x = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 0, 0, \dots)^T$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в ℓ_Φ, удовлетворяющих $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что выполняется условие (4.14) и для всех $x \in \ell_\Phi$ справедливо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\| \leq c\|x\|$, где c – константа, такая, что $0 \leq c < 1$. Тогда $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{J_n(\ell_\Phi)\}_{n=0}^{\infty}$ – изоморфные разложения Шаудера в ℓ_Φ.

Следствие 4.5. Пусть $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ограниченный базис ℓ_Φ с координатными функционалами $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, причем для любого $x = (a_0, a_1, a_2, \dots)^T \in \ell_\Phi$ имеем $\langle \phi_0^*, x\rangle \phi_0 = (a_0, 0, 0, \dots)^T$. Предположим, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в ℓ_Φ, удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \leq \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty$. Если для всякого $x \in \ell_\Phi$ выполнено $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle \phi_n^*, \psi_n\rangle - \langle \phi_n^*, x\rangle| \|\phi_n\| \leq c\|x\|$, где c – константа, такая, что $0 \leq c < 1$, то $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – изоморфные базисы в ℓ_Φ.

Пусть X – банахово пространство с разложением Шаудера. Введем следующее определение.

Определение 4.13. Разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ в X с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет называться разложением Шаудера-Орлича, если существует функция Орлича Φ, такая, что

$$\inf\left\{\rho > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{\|P_n x\|}{\rho}\right) \leq 1\right\} = \|x\| \quad \text{для всех } x \in X. \tag{4.20}$$

Пример 4.1. Пространство Орлича ℓ_Φ, где Φ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, обладает разложением Шаудера-Орлича. Действительно, в качестве такого разложения можно взять $\{\mathfrak{M}_n = Lin\{e_n\}\}_{n=0}^{\infty}$.

Замечание 4.6. В силу обобщенного равенства Парсеваля мы замечаем, что разложение Шаудера в гильбертовом пространстве H является ортогональным тогда и только тогда, когда оно является разложением Шаудера-Орлича с функцией Орлича $\Phi(t) = t^2$. В связи с этим, понятие разложения Шаудера-Орлича может рассматриваться как естественное обобщение понятия ортогонального разложения Шаудера на случай пространств Банаха.

Для ℓ_Ψ-гильбертовых (∞-гильбертовых) разложений Шаудера в пространствах, обладающих разложениями Шаудера-Орлича, мы имеем следующую теорему устойчивости.

Теорема 4.6. Пусть X имеет разложение Шаудера-Орлича $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^\infty$ с проекторами $\{F_n\}_{n=0}^\infty$, где $\dim F_0 < \infty$, и пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ – ℓ_Ψ-гильбертово (∞-гильбертово) разложение Шаудера в X с константой C и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, где $P_0 = F_0$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность ненулевых проекторов в X, причем $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что выполнено (4.14) и для всех $x \in X$ мы имеем

$$\left|\left|\left|\sum_{n=1}^\infty \|P_n(J_n - P_n)x\| e_n\right|\right|\right| \leq \varsigma \|x\|, \tag{4.21}$$

где $\varsigma \in \left[0, C^{-1}\right)$. Тогда $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{J_n X\}_{n=0}^\infty$ – изоморфные разложения Шаудера в X.

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.5. Мы только отметим, что, так как X имеет разложение Шаудера-Орлича $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^\infty$ с проекторами $\{F_n\}_{n=0}^\infty$, то существует функция Орлича Φ, такая, что для каждого $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in \ker(I-P_0)} \|x-v\| &= \inf_{v \in ImF_0} \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{\|F_n(x-v)\|}{\rho}\right) \le 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\|F_n(x-F_0x)\|}{\rho}\right) \le 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{\|F_n(x-F_0x)\|}{\rho}\right) \le 1 \right\} \\
&= \|(I-P_0)x\|.
\end{aligned}$$

Поэтому, как и в доказательстве теоремы 4.5, $\gamma\,(I-P_0) = 1$. □

Замечание 4.7. Подчеркнем, что условие ℓ_Ψ-гильбертовости разложения Шаудера, которое имеет большое значение для теорем 4.5 и 4.6, не является чересчур строгим. В самом деле, уже произвольное разложение Шаудера – 1-гильбертово. Более того, всякое разложение Шаудера в равномерно выпуклом банаховом пространстве X, соответствующее любому ограниченному базису в X, является p-гильбертовым для некоторого $p > 1$. Более подробно, пусть $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ограниченный базис равномерно выпуклого банахова пространства X. Определим проекторы $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ формулой $P_n x = \langle \phi_n^*, x\rangle \phi_n$, $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}_+,$ где $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty} \subset X^*$ – последовательность, удовлетворяющая $\langle \phi_n^*, \phi_m\rangle = \delta_n^m$. Тогда найдется $p > 1$, зависящее от $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и от модуля выпуклости пространства X, такое, что $\{P_n X\}_{n=0}^{\infty}$ – p-гильбертово разложение Шаудера в X, см. [12].

В случае, когда разложение Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ само является разложением Шаудера-Орлича с функцией Орлича $\Phi(t) = t^p$, мы получим из теоремы 4.6 следующий результат, аналогичный теореме 1.6 Като.

Следствие 4.6. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – разложение Шаудера-Орлича с функцией Орлича $\Phi(t) = t^p$ и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве ℓ_p, $1 \le p < \infty,$ причем $\dim P_0 < \infty$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в ℓ_p, удовлетворяющих (4.14), причем

$J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Если для всякого $x \in \ell_p$ справедливо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varsigma \|x\|, \text{ где } 0 \leq \varsigma < 1,$$

то $\{J_n(\ell_p)\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в ℓ_p, изоморфное $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

В заключение подраздела, выведем следствия из теоремы 4.6, аналогичные следствиям 4.4 и 4.5.

Следствие 4.7. Пусть X имеет разложение Шаудера-Орлича $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ с проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\dim F_0 < \infty$, и пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – разложение Шаудера в X с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $P_0 = F_0$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в X, причем $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что выполнено (4.14) и для всех $x \in X$ мы имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\| \leq c\|x\|$, где $c \in [0, 1)$. Тогда $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{J_n X\}_{n=0}^{\infty}$ – изоморфные разложения Шаудера в X.

Следствие 4.8. Пусть X имеет разложение Шаудера-Орлича $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\dim P_0 = 1$, и пусть $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ограниченный базис в X с биортогональной последовательностью $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей $\langle \phi_0^*, x \rangle \phi_0 = P_0 x$ для любого $x \in X$. Предположим, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в X, удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \leq \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty$. Если для всякого $x \in X$ справедливо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x \rangle \langle \phi_n^*, \psi_n \rangle - \langle \phi_n^*, x \rangle| \|\phi_n\| \leq c\|x\|$, где $c \in [0, 1)$, то $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – изоморфные базисы в пространстве X.

4.3. Устойчивость безусловных разложений Шаудера и симметричных базисов в пространствах ℓ_p, c_0, и гильбертовых пространствах

В данном подразделе получены результаты об устойчивости безусловных разложений и базисов Шаудера в пространствах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, c_0, а также в гильбертовых пространствах. Результаты выводятся на основании теорем 4.6, 4.4, и леммы 4.1. Также в подразделе получены результаты об устойчивости симметричных базисов в пространствах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, и c_0. Эти результаты применяются в подразделе 4.4 к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений.

Применим теорему 4.6 к исследованию устойчивости безусловных разложений и базисов Шаудера в гильбертовых пространствах. В силу теоремы 4.6, принимая во внимание замечания 4.1 и 4.2, мы получаем следующие результаты.

Следствие 4.9. Пусть H – гильбертово пространство с ортогональным разложением Шаудера $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\dim F_0 < \infty$, и пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в H с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем $P_0 = F_0$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в H, причем $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что имеет место условие (4.14) и для всех $x \in H$ мы имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \varsigma \|x\|,$$

где $\varsigma \in \left[0, \frac{1}{2M}\right)$. Тогда $\{J_n H\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в H, изоморфное $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Замечание 4.8. Следствие 4.9 можно вывести из теоремы Като 1.6. Однако, для этого необходимо задействовать доказательство центрального результата статьи [32] – теорему 7, а также привлекать замечание 4.2.

Для формулировки результатов, касающихся устойчивости безусловных базисов, нам потребуется следующее определение.

Определение 4.14. Скажем, что последовательность $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ в банаховом пространстве X (в пространстве Гильберта H) является безусловным базисом X (базисом Рисса в H) с константой M, если последовательность сответствующих одномерных подпространств $\{Lin\{\phi_n\}\}_{n=0}^{\infty}$ образует безусловное разложение Шаудера в X (в H) с константой M.

Из следствия 4.9 тривиальным образом выводится следующее.

Следствие 4.10. Пусть $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – базис Рисса в H с константой M и биортогональной последовательностью $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, причем $\phi_0 = \phi_0^*$ и $\|\phi_0\| = 1$. Предположим, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в H, удовлетворяющая $0 < \inf_n \|\psi_n\| \leq \sup_n \|\psi_n\| < \infty$. Если для всякого $x \in H$ справедливо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \psi_n^* \rangle \langle \psi_n, \phi_n^* \rangle - \langle x, \phi_n^* \rangle|^2 \|\phi_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varsigma \|x\|,$$

где $\varsigma \in [0, (2M)^{-1})$, то $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – также базис Рисса в H.

Теперь применим теорему 4.6 к исследованию устойчивости безусловных разложений и базисов Шаудера в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 4.7. Пусть $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – разложение Шаудера-Орлича с функцией Орлича $\Phi(t) = t^p$ и проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, причем $\dim F_0 < \infty$. Предположим, что $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера с константой M и проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ в ℓ_p, где $P_0 = F_0$. Также предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в ℓ_p, удовлетворяющих (4.14), причем $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, пусть для каждого $x \in \ell_p$ справедливо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varsigma_1 \|x\|, \text{ где } 0 \leq \varsigma_1 < \frac{1}{2M}, \tag{4.22}$$

когда $1 \le p \le 2$, либо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(J_n - P_n)x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \varsigma_2(p)\|x\|, \text{ где } 0 \le \varsigma_2(p) < \frac{1}{\sqrt{8}M}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.23}$$

когда $p \ge 2$. Тогда $\{J_n(\ell_p)\}_{n=0}^{\infty}$ – также безусловное разложение Шаудера в ℓ_p, изоморфное $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 4.7 следует из теоремы 4.6, предложения 4.2 и замечания 4.1.

В случае, когда $\dim \mathfrak{M}_n = 1,\ n \in \mathbb{Z}_+,$ теорема 4.7 приводит к следующему результату об устойчивости безусловных базисов в ℓ_p.

Следствие 4.11. Пусть $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ограниченный безусловный базис ℓ_p, $1 \le p < \infty$, с константой M и биртогональной последовательностью $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty} \subset \ell_p^*$, такой, что для всех $x \in \ell_p$ имеем $\langle \phi_0^*, x\rangle \phi_0 = F_0 x$, где $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ – проекторы разложения Шаудера-Орлича в ℓ_p с функцией Орлича $\Phi(t) = t^p$. Предположим, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в ℓ_p, удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \le \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty.$

Если для каждого $x \in \ell_p$ справедливо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle \phi_n^*, \psi_n\rangle - \langle \phi_n^*, x\rangle|^p \, \|\phi_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varsigma_1 \|x\|, \text{ где } 0 \le \varsigma_1 < \frac{1}{2M},$$

когда $1 \le p \le 2$, либо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle \phi_n^*, \psi_n\rangle - \langle \phi_n^*, x\rangle|^2 \, \|\phi_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \varsigma_2(p) \|x\|,$$

где $0 \le \varsigma_2(p) < \frac{1}{\sqrt{8}M}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{-\frac{1}{p}}$, когда $p \ge 2,$ то $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – также безусловный базис ℓ_p, изоморфный $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

На основании замечания 2.5 мы выводим из следствия 4.11 следующий результат об устойчивости симметричных базисов в ℓ_p.

Предложение 4.4. Пусть $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис ℓ_p, $1 \le p < \infty$, с константой M и биртогональной последовательностью $\{\phi_n^*\}_{n=0}^{\infty} \subset$

ℓ_p^*, такой, что для всех $x \in \ell_p$ имеем $\langle \phi_0^*, x\rangle \phi_0 = F_0 x$, где $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ – проекторы разложения Шаудера-Орлича в ℓ_p с функцией Орлича $\Phi(t) = t^p$. Предположим, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^\infty, \{\psi_n^*\}_{n=0}^\infty)$ – биортогональная система в ℓ_p, удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \le \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty$.

Если для каждого $x \in \ell_p$ справедливо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle \phi_n^*, \psi_n\rangle - \langle \phi_n^*, x\rangle|^p \, \|\phi_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varsigma_1 \|x\|, \text{ где } 0 \le \varsigma_1 < \frac{1}{2M},$$

когда $1 \le p \le 2$, либо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle \phi_n^*, \psi_n\rangle - \langle \phi_n^*, x\rangle|^2 \, \|\phi_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \varsigma_2(p) \|x\|,$$

где $0 \le \varsigma_2(p) < \frac{1}{\sqrt{8}M} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right)^{-\frac{1}{p}}$, когда $p \ge 2$, то $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ – также симметричный базис ℓ_p.

Легко видеть, что $\{Lin\{e_n\}\}_{n=0}^\infty$ – разложение Шаудера-Орлича пространства ℓ_p с функцией Орлича $\Phi(t) = t^p$. Комбинируя этот факт со следствием 4.6 и замечанием 2.5, получим следующий результат.

Предложение 4.5. Пусть $(\{\psi_n\}_{n=0}^\infty, \{\psi_n^*\}_{n=0}^\infty)$ – биортогональная система в ℓ_p, $1 \le p < \infty$, удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \le \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty$. Если для каждого $x \in \ell_p$ справедливо

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n^*, x\rangle \langle e_n^*, \psi_n\rangle - \langle e_n^*, x\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \varsigma \|x\|, \text{ где } 0 \le \varsigma < 1,$$

то $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ – симметричный базис ℓ_p.

Перейдем к формулировке аналогичных результатов в пространстве c_0. Поскольку, в силу предложения 4.3, всякое безусловное разложение Шаудера пространства c_0 является c_0-разложением, для каждого безусловного разложения Шаудера $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^\infty$ в c_0 с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ найдется константа $C > 0$, такая, что

$$\|x\| \le C \cdot \sup_{n \ge 0} \|P_n x\| \quad \text{для любого } x \in c_0. \tag{4.24}$$

На основании этого факта мы получаем из теоремы 4.6 следующие результаты об устойчивости безусловных разложений Шаудера в c_0.

Предложение 4.6. Пусть $\{\mathfrak{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ разложение Шаудера в c_0 с проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\dim F_0 < \infty$, такое, что, для каждого $x \in c_0$,

$$\|x\| = \sup_{n \geq 0} \|F_n x\|. \tag{4.25}$$

Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в c_0 с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющее (4.24), причем $P_0 = F_0$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в c_0, удовлетворяющих (4.14), причем $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что для всякого $x \in c_0$ справедливо

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(J_n - P_n)x\| \leq \varsigma \|x\|, \text{ где } 0 \leq \varsigma < C^{-1}.$$

Тогда $\{J_n(c_0)\}_{n=0}^{\infty}$ – также безусловное разложение Шаудера в c_0, изоморфное $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Предложение 4.7. Пусть $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловное разложение Шаудера в c_0 с проекторами $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющее (4.25), причем $\dim P_0 < \infty$. Предположим, что $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность ненулевых проекторов в c_0, удовлетворяющих (4.14), причем $J_n J_m = \delta_n^m J_n$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Также предположим, что для всякого $x \in c_0$ справедливо

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(J_n - P_n)x\| \leq \varsigma \|x\|, \text{ где } 0 \leq \varsigma < 1.$$

Тогда $\{J_n(c_0)\}_{n=0}^{\infty}$ – также безусловное разложение Шаудера в c_0, изоморфное $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Так как $\{Lin\{e_n\}\}_{n=0}^{\infty}$ – разложение Шаудера пространства c_0 с проекторами $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющее (4.25), принимая во внимание единственность, с точностью до изоморфизма, симметричного базиса в c_0 (см. замечание 2.5), мы получим на основании предложения 4.7 следующий результат.

Предложение 4.8. Пусть $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в c_0, удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \leq \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty$. Если для каждого $x \in c_0$ справедливо

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle \psi_n^*, x\rangle\langle e_n^*, \psi_n\rangle - \langle e_n^*, x\rangle| \leq \varsigma\|x\|, \text{ где } 0 \leq \varsigma < 1,$$

то $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис c_0.

Применим полученные результаты к конструированию определенных классов симметричных базисов в пространствах ℓ_p и c_0. Известно, что, если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $H,$ то $\{\varphi_n + \frac{1}{n}\varphi_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Рисса H, см., например, [50]. Заметим, что этот факт также следует из теоремы 1.6. В дальнейшем будет показано, что подобные этому факты имеют место в случае симметричных базисов пространств ℓ_p и c_0, где вместо ортонормированного базиса можно рассматривать канонический базис. Положим $e_{-j} = 0$ для $j \in \mathbb{N}$ и рассмотрим системы векторов следующего вида,

$$\psi_n = e_n - \theta_{n-1}e_{n-1} + \theta_{n-1}\theta_{n-2}e_{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n-1}\theta_k \cdot e_0,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\psi_n^* = e_n + \overline{\theta}_n e_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Предложение 4.9. Пусть $|\theta_n| \leq c,\ n \in \mathbb{N},$ где $c < 1$. Тогда $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричные базисы пространств ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, и c_0.

Доказательство. Тривиальные вычисления показывают, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в ℓ_p, $1 \leq p < \infty,$ удовлетворяющая $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \leq \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty.$

Далее, легко видеть, что

$$\langle e_n^*, \psi_n\rangle = 1, \qquad \langle \psi_n^*, x\rangle = \langle e_n^*, x\rangle + \theta_n\langle e_{n+1}^*, x\rangle,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.26}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\psi_n^*,x\rangle\langle e_n^*,\psi_n\rangle-\langle e_n^*,x\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\theta_n\langle e_{n+1}^*,x\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_{n+1}^*,x\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le c\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\langle e_n^*,x\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}=c\|x\|.\end{aligned}$$

Применяя предложение 4.5, получаем, что $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис ℓ_p, $1\le p<\infty$. Поэтому, $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис $\overline{Lin}\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ в ℓ_q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (см. [140, предложение 22.5]).

Поскольку всякий базис рефлексивного пространства – натягивающий (см. [140, с. 278, пример 4.3]), мы получаем, что $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис всего ℓ_q, где $1<q<\infty$. Если же $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис ℓ_1, то $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис $\overline{Lin}\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}\subset\ell_\infty=\ell_1^*$. Поскольку $\overline{Lin}\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}=c_0$, то $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис пространства c_0.

Теперь рассмотрим $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty},\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ как систему в пространстве c_0. Ясно, что $(\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty},\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty})$ – биортогональная система в c_0, удовлетворяющая $0<\inf\limits_n\|\psi_n\|\le\sup\limits_n\|\psi_n\|<\infty$. Более того, для нее также верно (4.26). Стало быть,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|\langle\psi_n^*,x\rangle\langle e_n^*,\psi_n\rangle-\langle e_n^*,x\rangle|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|\theta_n\langle e_{n+1}^*,x\rangle|\le c\|x\|$$

и $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис пространства c_0 в силу предложения 4.8.

Далее, поскольку $(c_0)^*=\ell_1$, биортогональная последовательность $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ является симметричным базисом $\overline{Lin}\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\ell_1$ (см. [140, предложение 22.5]). Более того, c_0 имеет безусловный базис $(\{e_n\}_{n=0}^{\infty})$ и $(c_0)^*=\ell_1$ – сепарабельное пространство. Следовательно (см. [85, с. 278]), любой безусловный базис пространства c_0 – натягивающий. Таким образом и симметричный базис $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – натягивающий, а это значит, что $\overline{Lin}\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}=\ell_1$ и $\{\psi_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ – симметричный базис ℓ_1. $\square$

4.4. Устойчивость эволюционных уравнений в пространствах ℓ_p, c_0, и гильбертовых пространствах

Рассмотрим приложение полученных в подразделе 4.3 результатов по устойчивости симметричных базисов, а также результатов раздела 2, к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.27}$$

в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, и гильбертовых пространствах.

В банаховых пространствах различают три типа устойчивости эволюционных уравнений (4.27).

Определение 4.15. Эволюционное уравнение (4.27) называется:

- устойчивым, если оператор A порождает ограниченную C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, т.е. если существует $C > 0$, такое что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $\|T(t)\| \leq C,$ см. [27].
- экспоненциально устойчивым, если оператор A порождает C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ и существуют положительные константы C, γ, такие что $\|T(t)\| \leq Ce^{-\gamma t}$ для всех $t \geq 0$, см. [27, 126].
- асимптотически устойчивым, если оператор A генерирует асимптотически устойчивую C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, т.е. такую, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0$ для всякого $x \in X$, см. [66, 126]

Напомним, что, в силу предложения 2.2, в гильбертовом пространстве классы базисов Рисса и симметричных базисов совпадают. Следующее утверждение показывает, что устойчивость уравнений (4.27), в случае, когда A – симметрически-спектральный оператор в пространстве ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, либо в гильбертовом пространстве, полностью определяется поведением собственных чисел A на комплексной плоскости.

Предложение 4.10. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в пространстве ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, или в гильбертовом пространстве H, с собственными числами $\{\lambda_n\}_1^\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\Re(\lambda_n) \leq 0$, то эволюционное уравнение (4.27) – устойчиво.
2. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\Re(\lambda_n) \leq \alpha$, где $\alpha < 0$, то эволюционное уравнение (4.27) – экспоненциально устойчиво.
3. Если $p > 1$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\Re(\lambda_n) < 0$ и $\overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty} \cap i\mathbb{R}$ – не более, чем счетное множество, то эволюционное уравнение (4.27) – асимптотически устойчиво.

Доказательство. Прежде всего отметим, что, поскольку во всех трех случаях $\omega = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Re(\lambda_n) \leq 0$, то, в силу теоремы 2.1, замечания 2.8 и теоремы 2.3.5 из [53], оператор A генерирует C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ в соответствующем пространстве.

Доказательство пунктов 1 и 2 следует из теоремы 2.3.5 из [53] и теоремы 2.2 (из формулы для оценки нормы полугруппы (2.11)).

Докажем пункт 3. Пусть A – симметрически-спектральный оператор в X, где X – пространство ℓ_p, $1 < p < \infty$, или c_0, или гильбертово пространство H. Поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Re(\lambda_n) < 0$, из доказательства пункта 1 мы получаем, что A генерирует ограниченную C_0-полугруппу $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Так как $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – собственные числа A, то $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Далее, в силу предложений 2.5, 2.6 и следствий 2.1, 2.3 мы получаем, что, если $\{\psi_n\}_1^\infty \subset X$ – собственные векторы A и $X^* \supset \{\psi_n^*\}_1^\infty$ – биортогональная к $\{\psi_n\}_1^\infty$ последовательность, то

$$A^*y = \sum_{n=1}^\infty \overline{\lambda_n}\langle y, \psi_n\rangle \psi_n^*,\ y \in D(A^*),\ \text{где}$$

$$D(A^*) = \left\{ y \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle y, \psi_n \rangle|^2 < \infty \right\},$$

если $X = H$, и

$$A^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle \psi_n, y \rangle \psi_n^*, \ y \in D(A^*), \text{ где}$$

$$D(A^*) = \begin{cases} \left\{ y \in \ell_q : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q |\langle \psi_n, y \rangle|^q < \infty \right\}, \text{ если } X = \ell_p, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ \left\{ y \in \ell_1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |\langle \psi_n, y \rangle| < \infty \right\}, \text{ если } X = c_0, \end{cases}$$

A^* – симметрически-спектральный оператор в X^* и $\sigma_p(A^*) = \{\overline{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ (доказательство соответствующих результатов в случае пространства H аналогично доказательству для пространства ℓ_2). Условие 3 означает, что $\sigma_p(A^*) \cap \ i\mathbb{R} = \emptyset$ и $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ – не более, чем счетное множество. Доказательство завершается применением теоремы 1.2.

□

Замечание 4.9. Иными словами, условие 3 предложения 4.10 означает, что все собственные числа A должны иметь отрицательную действительную часть, однако они могут асимптотически приближаться к мнимой оси в окрестностях счетного количества точек этой оси и на бесконечности. К примеру, собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ могут вести себя следующим образом: $\lambda_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}} + i(5 + \frac{\sin n}{n})$, $\lambda_{2n} = -\frac{1}{n^2} + i \ln n$, $n \in \mathbb{N}$.

Результаты подраздела 4.3 об устойчивости симметричных базисов предоставляют достаточные условия того, чтобы некоторая минимальная, ограниченная последовательность в ℓ_p, $1 \le p < \infty$, c_0, или в H была симметричным базисом. Эти результаты можно использовать для проверки того, является ли замкнутый оператор A с простыми собственными числами $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ и соответствующими собственными векторами $\{\psi_n\}_1^{\infty}$ симметрически-спектральным оператором в том или ином пространстве. Таким образом мы приходим к следующему способу проверки эволюционных уравнений (4.27) на устойчивость в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, или в H.

Пусть нам дано эволюционное уравнение (4.27), где A – линейный, замкнутый оператор в ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, или в H, с простыми собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и соответствующими собственными векторами $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Основной трудностью применения предложения 4.10 является проверка того, что $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис. Одним из путей преодоления этой трудности является применение результатов подраздела 4.3, если нам априори известно, что $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет биортогональную последовательность $\{\psi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ и удовлетворяет $0 < \inf\limits_n \|\psi_n\| \leq \sup\limits_n \|\psi_n\| < \infty$. Можно применить результаты об устойчивости симметричных базисов, а именно, следствие 4.10 (для случая гильбертовых пространств), предложения 4.4 или 4.5 (для случая, когда A действует в пространстве ℓ_p, $1 \leq p < \infty$), либо предложение 4.8 (случай пространства c_0), а после этого можно применять предложение 4.10.

Применим этот способ к исследованию устойчивости конкретных систем вида (4.27). Для удобства, перенумеруем элементы канонического базиса, так что теперь $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – канонический базис ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

Пример 4.2. Зададим в пространстве последовательностей оператор $\mathcal{A}$, который действует на элементы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\mathcal{A}e_j = \lambda_j e_j + (\mathfrak{f}) \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)}{(n-1)!} e_n, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.28}$$

Предположим, что $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ – последовательность различных точек. Непосредственно проверяется, что для всякого натурального n,

$$\mathcal{A}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n,$$

где $\varphi_n = e_n + \frac{1}{n} e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность собственных векторов, соответствующая собственным числам $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Применяя предложение 4.9, получаем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – симметричный базис как пространства $\ell_p,\ 1 \le p < \infty$, так и c_0. Следовательно, на основании теоремы 2.1 и замечания 2.8 получаем, что $\mathcal{A}$ – симметрически-спектральный оператор в пространстве $\ell_p,\ 1 \le p < \infty$, если

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \in \ell_p : \ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p |c_n|^p < \infty \right\},$$

и в пространстве c_0, если

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \in c_0 : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n||c_n| < \infty \right\}.$$

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad t \ge 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.29}$$

где $\mathcal{A}$ – оператор вида (4.28) в пространстве $\ell_p,\ 1 \le p < \infty$, либо в пространстве c_0. Тогда для этого уравнения справедливы все 3 пункта утверждения 4.10.

В частности, если $\lambda_n = -n,\ n \in \mathbb{N},$ то уравнение (4.29) – экспоненциально устойчиво в пространствах $\ell_p,\ 1 \le p < \infty$, и c_0. Если $\lambda_n = -\frac{1}{n} + i(-1)^n \ln n,\ n \in \mathbb{N},$ то уравнение (4.29) – асимптотически устойчиво в пространствах $\ell_p,\ 1 < p < \infty$, и c_0.

4.5. Выводы к разделу

В разделе 4 теорема 1.6 (Т. Като [93]) о подобии последовательностей проекторов в гильбертовых пространствах распространена на случай ℓ_Ψ-гильбертовых (∞-гильбертовых) разложений Шаудера в банаховых пространствах. С этой целью в подразделе 4.2 было введено понятие разложения Шаудера-Орлича банахова пространства (определение 4.13) и найдены достаточные условия изоморфности данного разложения Шаудера некоторой последовательности ненулевых подпространств банахова пространства. Основными результатами, полученными в этом направлении, являются теоремы 4.5, 4.6, 4.7 и следствие 4.6.

В подразделе 4.1 введены обобщенные понятия типа, котипа, инфратипа и M-котипа банахова пространства (определения 4.6, 4.7, 4.8, 4.9) и найдены взаимосвязи этих геометрических характеристик со свойствами безусловных разложений Шаудера. Результаты применяются к исследованию свойств безусловных разложений Шаудера в пространствах $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, c_0, и в гильбертовых пространствах. В качестве приложения, мы получаем, что теорема устойчивости 1.7 (В. Н. Визитей [7]) справедлива для любого безусловного разложения Шаудера в X (см. следствие 4.3).

В подразделе 4.3 получены результаты об устойчивости безусловных разложений и базисов Шаудера в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, и в гильбертовых пространствах. Использованы наилучшие константы неравенства Хинчина, найденные в работе [71], для вывода результатов по устойчивости безусловных разложений и базисов Шаудера в пространствах $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$ (теорема 4.7, следствие 4.11 и предложение 4.4). Получены результаты об устойчивости симметричных базисов – предложения 4.4, 4.5, 4.8 и следствие 4.10. Эти результаты применяются для конструирования определенных классов симметричных базисов в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, и c_0 (предложение 4.9).

Наконец, в подразделе 4.4 мы рассматриваем приложения этих результатов, вместе с результатами раздела 2, к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений в $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, c_0, и в гильбертовых пространствах (см. предложение 4.10 и замечания после него).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено исследование корректности, а также устойчивости и асимптотического поведения решений линейных эволюционных уравнений в банаховых пространствах в зависимости от спектральных и базисных свойств соответствующих (неограниченных) операторов. Основные научные результаты диссертационной работы:

- Представлен класс генераторов C_0-групп с собственными числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$, удовлетворяющими условию (3.1) и полным, минимальным, но не образующим базис Шаудера семейством соответствующих собственных векторов. Класс представлен в специально сконструированных для этой цели гильбертовых пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, и банаховых пространствах $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$. В основе доказательства соответствующих результатов ключевую роль играет применение дискретного неравенства Харди (1.6). Полученные результаты позволили сделать выводы о корректности соответствующих задач Коши (0.1) и (3.19) в пространствах $H_k(\{e_n\})$, $k \in \mathbb{N}$, и $\ell_{p,k}(\{e_n\})$, $p > 1$, $k \in \mathbb{N}$, а также получить явные формулы их решений.

- Найдены формулы для резольвент генераторов сконструированных C_0-групп $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, оценки роста резольвент, доказано, что C_0-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ являются полиномиально ограниченными.

- Показано, что свойство оператора быть генератором C_0-группы существенным образом зависит от характера поведения спектра оператора на бесконечности. Найдены условия на поведение спектра оператора, при выполнении которых он не будет генерировать C_0-полугруппу в соответствующем пространстве. Выведены соответствующие следствия о некорректности задач Коши для уравнений вида (0.1).

- Введено понятие симметрически-спектрального оператора в банаховом пространстве, обобщающее понятие спектрального по Риссу оператора в гильбертовом пространстве. Показано, что симметрически-спектральные операторы в пространствах $\ell_p,\ 1 \le p < \infty,$ и c_0 обладают свойствами, аналогичными свойствам спектральных по Риссу операторов в гильбертовых пространствах. Установлен критерий корректности задач Коши (0.1) в этих пространствах. Получены результаты о свойствах сопряженных операторов к симметрически-спектральным в пространствах $\ell_p,\ 1 < p < \infty,$ и c_0, а также связи корректности задачи (0.1) с оператором A в X с корректностью задачи с оператором A^* в X^*.

- С целью изучения свойств безусловных разложений Шаудера в банаховых пространствах введены понятия типа, котипа, инфратипа и M-котипа Орлича-Радемахера банахова пространства, обобщающие классические понятия типа, котипа, инфратипа и M-котипа. Установлены свойства безусловных разложений Шаудера в зависимости от этих обобщенных характеристик банахова пространства. Показано, что геометрическая теорема устойчивости Визитея (теорема 1.7) верна для любого безусловного разложения Шаудера в произвольном банаховом пространстве.

- Введено понятие разложения Шаудера-Орлича, обобщающее понятие ортогонального разложения Шаудера пространства Гильберта на случай банаховых пространств. Получены аналоги теоремы Като (см. теорему 1.6) о подобии последовательностей проекторов в гильбертовом пространстве в случае ℓ_Ψ-гильбертовых (∞-гильбертовых) разложений Шаудера в пространствах последовательностей Орлича и в пространствах с разложениями Шаудера-Орлича.

- Использованы наилучшие константы неравенства Хинчина для вывода теорем устойчивости безусловных разложений Шаудера в пространствах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, и c_0. В качестве следствий выведены результаты об устойчивости безусловных и симметричных базисов в этих пространствах. Результаты применены к вопросу об устойчивости эволюционных уравнений (0.1) в $\ell_p,\ 1 \leq p < \infty$, c_0, а также в гильбертовых пространствах.

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и могут быть использованы в спектральной теории C_0-полугрупп, теории разложений и базисов Шаудера, геометрии пространств Банаха, а также в теории уравнений с запаздыванием. Результаты раздела 2 могут быть использованы для исследования устойчивости, стабилизации, управляемости и наблюдаемости линейных бесконечномерных управляемых систем в банаховых пространствах с симметричным базисом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Арлинский Ю. М. Замкнутые секториальные формы и однопараметрические полугруппы сжатий / Ю. М. Арлинский // Матем. заметки – 1997. – Т. 61, №5. – С. 643–654.
2. Арлинский Ю. М. Об одном классе сжатий в гильбертовом пространстве / Ю. М. Арлинский // Укр. мат. журн. – 1987. – Т. 39, №6. – С. 691–696.
3. Бабенко К. И. О сопряженных функциях / К. И. Бабенко // ДАН – 1948. – Т. 62, №2. – С. 157–160.
4. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Математика. Том IV, Уч. записки Моск. гос. ун-та. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1951. – № 148. – С. 69–107.
5. Билалов Б. Т. Некоторые вопросы базисов / Б. Т. Билалов, С. Г. Велиев – Баку : Элм, 2010. – 304 с.
6. Визитей В. Н. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка / В. Н. Визитей, А. С. Маркус // Матем. сб. – 1965. – Т. 66(108), №2. – С. 287–320.
7. Визитей В. Н. Об устойчивости базисов из подпространств в банаховом пространстве / В. Н. Визитей // Исследования по алгебре и математическому анализу, Молдавская Академия Наук. – Кишинев : Kartja Moldovenjaska, – 1965. – С. 32–44.
8. Гапошкин В. Ф. Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях / В. Ф. Гапошкин // Матем. сб. – 1958. – Т. 46(88), №3. – С. 359–372.

9. Гельфанд И. М. Замечание к работе Н. К. Бари “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве” / И. М. Гельфанд // Математика. Том IV, Уч. записки Моск. гос. ун-та. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1951. – № 148. – С. 224–225.

10. Гохберг И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн – Москва : Наука, 1965. – 448 с.

11. Гринблюм М. М. О представлении пространства типа B в виде прямой суммы подпространств / М. М. Гринблюм // ДАН – 1950. – Т. 70, №5. – С. 749–752.

12. Гурарий В. И. О базисах в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах / В. И. Гурарий, Н. И. Гурарий // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – Т. 35, №1. – С. 210–215.

13. Данфорд Н. Линейные операторы, Том 1: Общая Теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц; пер. с англ. Л. И. Головиной и Б. С. Митягина. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1962. – 895 с.

14. Данфорд Н. Линейные операторы, Том 3: Спектральные Операторы / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц ; пер. с англ. Р. С. Исмагилова и Б. С. Митягина. – Москва : Мир, 1974. – 661 с.

15. Зингер И. О банаховых пространствах с симметричным базисом / И. Зингер // Revue de math. pures et appl. – 1961. – Т. 6. – С. 159–166.

16. Кацнельсон В. Э. Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов / В. Э. Кацнельсон // Функц. анализ и его прил. – 1967. – Т. 1, №2. – С. 39–51.

17. Крейн М. Об одном свойстве базиса в пространстве Banach’а / М. Крейн, Д. Мильман, М. Рутман // Записки НИИ математики и

механики ХГУ и Харьковского математического общества. – 1940. – Т. 16, №4. – С. 106–110.

18. Любич Ю. И. Об одном классе операторов в банаховом пространстве / Ю. И. Любич // УМН – 1965. – Т. 20(126), №6. – С. 131–133.

19. Любич Ю. И. Об операторах с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев // Матем. сб. – 1962. – Т. 56(98), №4. – С. 433–468.

20. Любич Ю. И. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора / Ю. И. Любич // УМН – 1963. – Т. 18(109), №1. – С. 165–171.

21. Маркус А. С. О базисе из корневых векторов диссипативного оператора / А. С. Маркус // ДАН – 1960. – Т. 132, №3. – С. 524–527.

22. Марченко В. А. Симметрически-спектральные операторы в пространствах ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0 / В. А. Марченко // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Серія «Математика, прикладна математика і механіка» – 2013. – №1081. – С. 33–44.

23. Марченко В. А. Безусловная базисность системы собственных подпространств генератора сильно непрерывной группы / В. А. Марченко // Международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», посвященная 50-летию механико-математического факультета / Тезисы докладов. – 17-22 апреля, 2011. – Харьков. – С. 163.

24. Марченко В. А. К базисности Рисса спектрального семейства генератора C_0-группы в гильбертовом пространстве / В. А. Марченко // IV научная конференция для студентов и аспирантов «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» / Тезисы докладов. – 14-15 мая, 2010. – Харьков. – С. 16–17.

25. Марченко В. А. Симметрически-спектральные операторы и их свойства в пространствах ℓ_p / В. А. Марченко // IX международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» / Тезисы докладов. – 25-26 апреля, 2014. – Харьков. – С. 14–15.

26. Марченко В. А. Устойчивость безусловных разложений Шаудера в гильбертовых пространствах / В. А. Марченко // X международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» / Тезисы докладов. – 24-25 апреля, 2015. – Харьков. – С. 41–42.

27. Милославский А. И. Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений / А. И. Милославский // Сиб. мат. журнал – 1985. – Т. 26, №5. – С. 118–132.

28. Олевский А. М. Об операторах, производящих условные базисы в гильбертовом пространстве / А. М. Олевский // Матем. заметки – 1972. – Т. 12, №1. – С. 73–84.

29. Скляр Г. М. Нерівність Харді та конструкція генератора C_0-групи з власними векторами, що не утворюють базис / Г. М. Скляр, В. А. Марченко // Доповіді НАН України – 2015. – №9. – С. 13–17.

30. Скляр Г. М. Отсутствие максимальной асимптотики для некоторых линейных уравнений в банаховом пространстве / Г. М. Скляр // Доклады Академии Наук – 2010. – Т. 431, №4. – С. 464–467.

31. Скляр Г. М. Об асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве / Г. М. Скляр,

В. Я. Ширман // Теория функций, функциональный анализ и их приложения – 1982. – Т. 37. – С. 127–132.

32. Фаге М. К. Идемпотентные операторы и их спрямление / М. К. Фаге // ДАН – 1950. – Т. 73, №5. – С. 895–897.

33. Фаге М. К. Спрямление базисов в гильбертовом пространстве / М. К. Фаге // ДАН – 1950. – Т. 74, №6. – С. 1053–1056.

34. Фонг Ву К. К теореме об отображении спектров для однопараметрических групп операторов / Ву К. Фонг, Ю. И. Любич // Зап. научн. сем. ЛОМИ – 1989. – Т. 178. – С. 146–150.

35. Adduci J. Eigensystem of an L^2-perturbed harmonic oscillator is an unconditional basis / J. Adduci, B. Mityagin // Cent. Eur. J. Math. – 2012. – Vol. 10, №2. – P. 569–589.

36. Adduci J. Root system of a perturbation of a selfadjoint operator with discrete spectrum / J. Adduci, B. Mityagin // Integral Equations Operator Theory – 2012. – Vol. 73, №2. – P. 153–175.

37. Ahmad K. A note on equivalence of sequences of subspaces in Banach spaces / K. Ahmad // An. Stiint. Univ. "Ovidius" Constanta Ser. Mat. – 1989. – Vol. 27. – P. 9–12.

38. Allexandrov G. A separable space with no Schauder decomposition / G. Allexandrov, D. Kutzarova, A. Plichko // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 127, №9. – P. 2805–2806.

39. Almog Y. The stability of the normal state of superconductors in the presence of electric currents / Y. Almog // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – Vol. 40. – P. 824–850.

40. Altay B. On the space of p-summable difference sequences of order m, $(1 \leq p < \infty)$ / B. Altay // Studia Sci. Math. Hungar. – 2006. – Vol. 43, №4. – P. 387–402.

41. Arendt W. Tauberian Theorems and Stability of One-Parameter Semigroups / W. Arendt, C. J. K. Batty // Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – Vol. 306, №2. – P. 837–852.

42. Arendt W. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander – Basel : Birkhäuser, 2011. – 540 p. – (Monographs in Mathematics, Vol. 96).

43. Arlinskiĭ Y. Numerical range and quasi-sectorial contractions / Y. Arlinskiĭ, V. Zagrebnov // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – Vol. 366, №1. – P. 33–43.

44. Barnes B. Operators which satisfy polynomial growth conditions / B. Barnes // Pacific J. Math. – 1989. – Vol. 138, №2. – P. 209–219.

45. Başar F. On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings / F. Başar, B. Altay // Ukrainian Math. J. – 2003. – Vol. 55, №1. – P. 136–147.

46. Blower G. A maximal theorem for holomorphic semigroups / G. Blower, I. Doust // Q. J. Math. – 2005. – Vol. 56, №1. – P. 21–30.

47. Bonet J. Schauder decompositions and the Grothendieck and Dunford-Pettis properties in Köthe echelon spaces of infinite order / J. Bonet, W. J. Ricker // Positivity – 2007. – Vol. 11, №1. – P. 77–93.

48. Boyadzhiev K. Spectral theorem for unbounded strongly continuous groups on a Hilbert space / K. Boyadzhiev, R. DeLaubenfels // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – Vol. 120, №1. – P. 127–136.

49. Chadwick J. J. M. Schauder decompositions in non-separable Banach spaces / J. J. M. Chadwick, R. W. Cross // Bull. Aust. Math. Soc. – 1972. – Vol. 6, №1. – P. 133–144.

50. Cazassa P. G. Perturbation of operators and applications to frame theory / P. G. Cazassa, O. Christensen // J. Fourier Anal. Appl. – 1997. – Vol. 3, №5. – P. 543–557.

51. Clark C. On relatively bounded perturbations of ordinary differential operators / C. Clark // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 25, №1. – P. 59–70.

52. Clement P. Schauder decompositions and multiplier theorems / P. Clement, B. De Pagter, F. A. Sukochev, H. Witvliet // Studia Math. – 2000. – Vol. 138, №2. – P. 135–163.

53. Curtain R. F. An Introduction to Infnite-Dimensional Linear Systems Theory / R. F. Curtain, H. J. Zwart – New York : Springer-Verlag, 1995. – 698 p. – (Texts in Applied Mathematics, Vol. 21).

54. Curtain R. F. Spectral systems / R. F. Curtain // Internat. J. Control – 1984. – Vol. 39, №4. – P. 657–666.

55. Davies E. B. Linear Operators and Their Spectra / E. B. Davies – Cambridge : Cambridge University Press, 2007. – 419 p. – (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 106).

56. Davis W. J. Schauder decompositions in Banach spaces / W. J. Davis // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 74, №6. – P. 1083–1085.

57. De la Rosa M. Frequent hypercyclicity, chaos, and unconditional Schauder decompositions / M. De la Rosa, L. Frerick, S. Grivaux, A. Peris // Israel J. Math. – 2012. – Vol. 190, №1. – P. 389–399.

58. De Pagter B. Products of commuting Boolean algebras of projections and Banach space geometry / B. De Pagter, W. J. Ricker // Proc. Lond. Math. Soc. – 2005. – Vol. 91, №2. – P. 483–508.

59. Delattre C. Sturm-Liouville systems are Riesz-spectral systems / C. Delattre, D. Dochain, J. Winkin // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – 2003. – Vol. 13, №4. – P. 481–484.

60. Djakov P. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators / P. Djakov, B. Mityagin // Math. Nachr. – 2010. – Vol. 283, №3. – P. 443–462.

61. Djakov P. Bari-Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials / P. Djakov, B. Mityagin // Functional Analysis and Complex Analysis, Contemporary Mathematics. – Providence, RI : American Mathematical Society, 2009. – Vol. 481. – P. 59–80.

62. Djakov P. Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and $1D$ Dirac operators / P. Djakov, B. Mityagin // J. Funct. Anal. – 2012. – Vol. 263, №8. – P. 2300–2332.

63. Eisner T. A Note on Polynomially Growing C_0-Semigroups / T. Eisner, H. Zwart // Semigroup Forum – 2007. – Vol. 75, №2. – P. 438–445.

64. Eisner T. Polynomially Bounded C_0-Semigroups / T. Eisner // Semigroup Forum – 2005. – Vol. 70, №1. – P. 118–126.

65. Eisner T. Stability of Operators and Operator Semigroups / T. Eisner – Basel : Birkhäuser, 2010. – 204 p. – (Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 209).

66. Engel K. J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K. J. Engel, R. Nagel – New York : Springer-Verlag, 2000. – 589 p. – (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 194).

67. Garnett J. B. Bounded Analytic Functions / J. B. Garnett – New York : Springer-Verlag, 2007. – 463 p. – (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 236).

68. Goldstein J. A. The Energy Space and Norm Growth for Abstract Wave Equations / J. A. Goldstein, M. Wacker // Appl. Math. Lett. – 2003. – Vol. 16. – P. 767–772.

69. Guo B. Z. Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler–Bernoulli beam equation with variable coefficients / B. Z. Guo // SIAM J. Control Optim. – 2002. – Vol. 40, №6. – P. 1905–1923.

70. Guo B. Z. Riesz spectral systems / B. Z. Guo, H. Zwart – Preprint, University of Twente, the Netherlands, Nov 2001. – 22 p. – (Availiable at http://doc.utwente.nl/65781/1/1594.pdf).

71. Haagerup U. The best constants in the Khintchine inequality / U. Haagerup // Studia Math. – 1982. – Vol. 70. – P. 231–283.

72. Haase M. A decomposition theorem for generators of strongly continuous groups on Hilbert spaces / M. Haase // J. Operator Theory – 2004. – Vol. 52. – P. 21–37.

73. Haase M. The Functional Calculus for Sectorial Operators / M. Haase – Basel : Birkhäuser, 2006. – 394 p. – (Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 169).

74. Hadamard J. Le principe de Huygens / J. Hadamard // Bull. Soc. Math. France – 1924. – Vol. 52. – P. 610–640.

75. Hardy G. H. Inequalities / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1964. – 324 p.

76. Hardy G. H. Notes on a theorem of Hilbert / G. H. Hardy // Math. Z. – 1920. – Vol. 6, №3-4. – P. 314–317.

77. Headley V. B. On the distribution of the zeros of generalized Airy functions / V. B. Headley, V. K. Barwell // Math. Comp. – 1975. – Vol. 29, №131. – P. 863–877.

78. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen / D. Hilbert // Göttingen Nachr. – 1906. – Vol. 2. – P. 157–227.

79. Hughes E. Perturbation theorems for relative spectral problems / E. Hughes // Canad. J. Math. – 1972. – Vol. 24, №1. – P. 72–81.

80. Imaninezhad M. The continuous dual of the space $\ell_p(\Delta^n),\ (1 \leq p \leq \infty,\ n \in \mathbb{N})$ / M. Imaninezhad, M. Miri // Acta Math. Univ. Comenian. (N. S.) – 2010. – Vol. LXXIX, №2. – P. 273–280.

81. Jain P. K. Domination and equivalence of sequences of subspaces in dual spaces / P. K. Jain, K. Ahmad, S. M. Maskey // Czechoslovak Math. J. – 1986. – Vol. 36, №3. – P. 351–357.

82. Jain P. K. Schauder decompositions and best approximations in Banach spaces / P. K. Jain, K. Ahmad // Port. Math. – 1987. – Vol. 44, №1. – P. 25–39.

83. Jain P. K. Unconditional Schauder decompositions and best approximations in Banach spaces / P. K. Jain, K. Ahmad // Indian J. Pure Appl. Math. – 1981. – Vol. 12, №12. – P. 1456–1467.

84. Johnson W. B. Finite-dimensional Schauder decompositions in π_λ and dual π_λ spaces / W. B. Johnson // Illinois J. Math. – 1970. – Vol. 14, №4. – P. 642–647.

85. Johnson W. B. Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1 / W. B. Johnson, J. Lindenstrauss – Amsterdam : Elsevier, 2001. – 1005 p.

86. Johnson W. B. Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2 / W. B. Johnson, J. Lindenstrauss – Amsterdam : Elsevier, 2003. – 860 p.

87. Kadets M. I. Series in Banach Spaces, Conditional and Unconditional Convergence / M. I. Kadets, V. M. Kadets – Berlin : Birkhäuser, 1997. – 159 p. – (Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 94).

88. Kantorovitz S. Introduction to Modern Analysis / S. Kantorovitz – New York : Oxford University Press, 2003. – 434 p. – (Oxford Graduate Texts in Mathematics, Vol. 8).

89. Kantorovitz S. Semigroups of operators and spectral theory / S. Kantorovitz – Essex : Longman Group Limited, 1995. – 135 p. – (Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 330).

90. Kantorovitz S. Spectral Theory of Banach Space Operators / S. Kantorovitz – Berlin : Springer-Verlag, 1983. – 179 p. – (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1012).

91. Kantorovitz S. Topics in Operator Semigroups / S. Kantorovitz – Basel : Birkhäuser, 2010. – 266 p. – (Progress in Mathematics, Vol. 281).

92. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators / T. Kato – [2nd ed. (reprint)] – Berlin : Springer-Verlag, 1995. – 619 p. – (Classics in Mathematics).

93. Kato T. Similarity for sequences of projections / T. Kato // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73, №6. – P. 904–905.

94. Keown R. Biorthogonal systems in ℓ^p-spaces / R. Keown, C. Conatser // Canad. J. Math. – 1969. – Vol. 21, №3. – P. 625–638.

95. Kiselev V. On the Resolvent Estimates for the Generators of Strongly Continuous Groups in the Hilbert Spaces / V. Kiselev // Operator Methods in Ordinary and Partial Differential Equations, S. Kovalevsky Symposium, University of Stockholm, June 2000. – (Part II) – Basel : Birkhäuser, 2002. – P. 253–266. – (Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 132).

96. Komornik V. Fourier Series in Control Theory / V. Komornik, P. Loreti – New York : Springer-Verlag, 2005. – 226 p. – (Springer Monographs in Mathematics).

97. Köthe G. Linear Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen / G. Köthe, O. Toeplitz // J. Reine Angew. Math. – 1934. – Vol. 171. – P. 193–226.

98. Kufner A. The Prehistory of the Hardy Inequality / A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson // Amer. Math. Monthly – 2006. – Vol. 113, №8. – P. 715–732.

99. Kufner A. Weighted Inequalities of Hardy Type / A. Kufner, L.-E. Persson – Singapore : World Scientific, 2003. – 376 p.

100. Kuiper C. R. Connections between the Algebraic Riccati Equation and the Hamiltonian for Riesz-Spectral Systems / C. R. Kuiper, H. J. Zwart // JMSEC – 1996. – Vol. 6, №4. – P. 1–48.

101. Li P. On the Schrödinger Equation and the Eigenvalue Problem / P. Li, S.-T. Yau // Commun. Math. Phys. – 1983. – Vol. 88, №3. – P. 309–318.

102. Lindenstrauss J. Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri – [Reprint of the 1977 Ed.] – Berlin : Springer-Verlag, 1996. – 188 p.

103. Lindenstrauss J. Classical Banach Spaces II. Function Spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri – [Reprint of the 1979 Ed.] – Berlin : Springer-Verlag, 1996. – 239 p.

104. Lorch E. R. Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces / E. R. Lorch // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol. 45. – P. 564–569.

105. Lyubich Yu. I. Asymptotic stability of linear differential equation in Banach space / Yu. I. Lyubich, V. Q. Phong // Studia Math. – 1988. – Vol. 88. – P. 37–42.

106. Mackey G. W. Commutative Banach algebras : [Lecture notes (multigraphed) / edited by Blair A.]. / G. W. Mackey – Cambridge : Harvard University, 1952. – 95 p.

107. Malejki M. C_0-groups with Polynomial Growth / M. Malejki // Semigroup Forum – 2001. – Vol. 63, №3. – P. 305–320.

108. Marcus A. S. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils / A. S. Marcus – Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1988. – 250 p. – (Transl. Math. Monogr., Vol. 71).

109. Marchenko V. Isomorphic Schauder decompositions in certain Banach spaces / V. Marchenko // Cent. Eur. J. Math. – 2014. – Vol. 12, №11. – P. 1714–1732.

110. Marchenko V. One special construction in the spectral theory of C_0-semigroups / V. Marchenko // International Conference Dynamical Systems and Their Applications / Abstracts. – June 22-26, 2015. – Kyiv, Ukraine. – P. 38.

111. Marchenko V. Spaces with Schauder-Orlicz decompositions and isomorphic Schauder decompositions / V. Marchenko // International Conference of Young Mathematicians / Abstracts. – June 3-6, 2015. – Kyiv, Ukraine. – P. 56.

112. Marchenko V. A. Stability of unconditional Schauder decompositions in Hilbert spaces / V. A. Marchenko // Visnyk of Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2014. – №1133. – P. 103–113.

113. Marchenko V. Stability of unconditional Schauder decompositions in ℓ_p spaces / V. Marchenko // Bull. Aust. Math. Soc. – 2015. – Vol. 92, №3. – P. 444–456.

114. Marchenko V. Stability theorem for unconditional Schauder decompositions in ℓ_p spaces / V. Marchenko // III International Conference Analysis and Mathematical Physics / Book of Abstracts. – June 15-19, 2015. – Kharkiv, Ukraine. – P. 29–30.

115. Milne-Thomson L. M. The Calculus of Finite Differences / L. M. Milne-Thomson – London : Macmillan And Co., Limited, 1933. – 590 p.

116. Mityagin B. Root system of singular perturbations of the harmonic oscillator type operators / B. Mityagin, P. Siegl // Lett. Math. Phys. – 2016. – Vol. 106, №2. – P. 147–167.

117. van Neerven J. The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators / J. van Neerven – Basel : Birkhäuser, 1996. – 241 p. – (Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 88).

118. Opic B. Hardy-type Inequalities / B. Opic, A. Kufner – Harlow : Longman Scientific and Technical, 1990. – 362 p. – (Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 219).

119. Orlicz W. Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen & Über unbedingte Convergenz in Funktionraümen / W. Orlicz // Studia Math. – 1933. – Vol. 4. – P. 27–37.

120. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy – New York : Springer-Verlag, 1983. – 282 p. – (Applied Mathematical Sciences, Vol. 44).

121. Puel J.-P. A regularity property for Schrödinger equations on bounded domains / Jean-Pierre Puel // Revista Matemática Complutense – 2013. – Vol. 26, №1. – P. 183–192.

122. Rabah R. Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems / R. Rabah, G. M. Sklyar, A. V. Rezounenko // C. R. Math. Acad. Sci. Paris – 2003. – Vol. 337, №1. – P. 19–24.

123. Rabah R. Observability and controllability for linear neutral type systems / R. Rabah, G. Sklyar // 21st International Symposium on Mathematical Theory of Network and Systems. – July 7-11, 2014. – Groningen, Netherlands. – P. 223–229. – (Availiable at https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00993286/document).

124. Rabah R. On strong regular stabilizability for linear neutral type systems / R. Rabah, G. M. Sklyar, A. V. Rezounenko // J. Differential Equations – 2008. – Vol. 245, №3. – P. 569–593.

125. Rabah R. On the Exact Controllability and Observability of Neutral Type Systems / R. Rabah, G. M. Sklyar, P. Yu. Barkhayev // Commun. Math. Anal. – 2014. – Vol. 17, №2. – P. 279–294.

126. Rabah R. Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space / R. Rabah, G. M. Sklyar, A. V. Rezounenko // J. Differential Equations – 2005. – Vol. 214, №2. – P. 391–428.

127. Rabah R. Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems / R. Rabah, G. M. Sklyar, P. Yu. Barkhayev // ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2012. – Vol. 18, №3. – P. 656–692.

128. Rabah R. The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach / R. Rabah, G. M. Sklyar // SIAM J. Control Optim. – 2007. – Vol. 46, №6. – P. 2148–2181.

129. Rabah R. The Exact Controllability Property of Neutral Type Systems by the Moment Problem Approach Revisited / R. Rabah, G. M. Sklyar, P. Yu. Barkhayev // 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems – TDS 2010. – June 7-9, 2010. – Prague, Czech Republic. – P. 171–176.

130. Rauch J. Partial Differential Equations, Corrected edition (January 9, 1997) / J. Rauch – New York : Springer-Verlag, 1991. – 266 p. – (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 128).

131. Read C. J. A Banach space with, up to equivalence, precisely two symmetric bases / C. J. Read // Israel J. Math. – 1981. – Vol. 40, №1. – P. 33–53.

132. Rebarber R. Robustness with respect to sampling for stabilization of Riesz spectral systems / R. Rebarber, S. Townley // IEEE Trans. Automatic Control – 2006. – Vol. 51, №9. – P. 1519–1522.

133. Retherford J. R. Basic sequences and the Paley-Wiener criterion / J. R. Retherford // Pacific J. Math. – 1964. – Vol. 14. – P. 1019–1027.

134. Retherford J. R. Some remarks on Schauder bases of subspaces / J. R. Retherford // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1966. – Vol. 11. – P. 787–792.

135. Sanders B. L. Decompositions and reflexivity in Banach spaces / B. L. Sanders // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 16, №2. – P. 204–208.

136. Sanders B. L. On the existence of [Schauder] decompositions in Banach spaces / B. L. Sanders // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 16, №5. – P. 987–990.

137. Sell G. R. Dynamics of Evolutionary Equations / G. R. Sell, Y. You – New York : Springer-Verlag, 2002. – 672 p. – (Applied Mathematical Sciences, Vol. 143).

138. Shaw S.-Y. Growth order and stability of semigroups and cosine operator functions / S.-Y. Shaw // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – Vol. 357, №2. – P. 340–348.

139. Shubov M. A. Spectral operators generated by damped hyperbolic equations / M. A. Shubov // Integral Equations Operator Theory – 1997. – Vol. 28, №3. – P. 358–372.

140. Singer I. Bases in Banach Spaces I / I. Singer – Berlin : Springer-Verlag, 1970. – 668 p.

141. Singer I. Bases in Banach Spaces II / I. Singer – Berlin : Springer-Verlag, 1981. – 880 p.

142. Sklyar G. Generators of linearly growing C_0-groups with simple purely imaginary eigenvalues / G. Sklyar, V. Marchenko // International V. Skorobohatko Mathematical Conference / Abstracts. – August 25-28, 2015. – Drohobych, Ukraine. – P. 154.

143. Sklyar G. Hardy inequality and an example of infinitesimal operator with non-Riesz basis family of eigenvectors / G. Sklyar, V. Marchenko // II International Conference Analysis and Mathematical Physics / Book of Abstracts. – June 16-20, 2014. – Kharkiv, Ukraine. – P. 42–43.

144. Sklyar G. M. Hardy inequality and the construction of infinitesimal operators with non-basis family of eigenvectors / G. M. Sklyar, V. Marchenko – Preprint arXiv.org, Cornell University Library, 3 Nov 2014. – 27 p. – (Availiable at http://arxiv.org/abs/1405.2731).

145. Sklyar K. V. Eigenvalues and eigenvectors assignment for neutral type systems / K. V. Sklyar, R. Rabah, G. M. Sklyar // C. R. Math. Acad. Sci. Paris – 2013. – Vol. 351, №3-4. – P. 91–95.

146. Sklyar K. V. Spectral Assignment for Neutral-Type Systems and Moment Problems / K. V. Sklyar, R. Rabah, G. M. Sklyar // SIAM J. Control Optim. – 2015. – Vol. 53, №2. – P. 845–873.

147. Sklyar G. M. On the maximal asymptotics for linear differential equations in Banach spaces / G. M. Sklyar // Taiwan. J. Math. – 2010. – Vol. 14, №6. – P. 2203–2217.

148. Sklyar G. M. Asymptotic growth of solutions of neutral type systems / G. M. Sklyar, P. Polak // Appl. Math. Optim. – 2013. – Vol. 67, №3. – P. 453–477.

149. Stone M. H. On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space / M. H. Stone // Ann. of Math. (2) – 1932. – Vol. 33, №3. – P. 643–648.

150. Toure K. A. Riesz basis and exponential stability for Euler-Bernoulli beams with variable coefficients and indefinite damping under a force control in position and velocity / K. A. Toure, A. Coulibaly, A. Kouassi // Electron. J. Differential Equations – 2015. – Vol. 2015, №54. – P. 1–20. – (Availiable at http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/54/toure.pdf).

151. Vallee O. Airy Functions and Applications to Physics / O. Vallee, M. Soares – London : Imperial College Press, 2004. – 196 p.

152. Wang J. M. Riesz basis property, exponential stability of variable coefficient Euler-Bernoulli beams with indefinite damping / J. M. Wang, G. Q. Xu, S. P. Yung // IMA J. Appl. Math. – 2005. – Vol. 70. – P. 459–477.

153. Wermer J. Commuting spectral measures on Hilbert space / J. Wermer // Pacific J. Math. – 1954. – Vol. 4, №3. – P. 355–361.

154. Wyss C. Riesz bases for p-subordinate perturbations of normal operators / C. Wyss // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 258, №1. – P. 208–240.

155. Xu G. Q. The expansion of a semigroup and a Riesz basis criterion / G. Q. Xu, S. P. Yung // J. Differential Equations – 2005. – Vol. 210, №1. – P. 1–24.

156. Xu G. Q. The Riesz basis property of a Timoshenko beam with boundary feedback and application / G. Q. Xu, D. X. Feng // IMA J. Appl. Math. – 2002. – Vol. 67, №4. – P. 357–370.

157. Zabczyk J. Mathematical Control Theory, An Introduction / J. Zabczyk – Basel : Birkhäuser, 2008. – 260 p. – (Modern Birkhäuser Classics).

158. Zwart H. Riesz basis for strongly continuous groups / H. Zwart // J. Differential Equations – 2010. – Vol. 249, №10. – P. 2397–2408.