

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Спеціалізована вчена рада К 64.051.11

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Поцелуєв Сергій Іванович

(прізвище, ім'я, по батькові)

УДК 537.84

(індекс)

ДИСЕРТАЦІЯ

Багатопараметричне збудження поверхневих і внутрішніх хвиль

у магнітних рідинах

(назва дисертації)

01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми

(шифр і назва спеціальності)

прикладна математика

(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

С. І. Поцелуєв

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник Пацегон Микола Федорович, доктор фізико-математичних наук, професор

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

Харків – 2017

АНОТАЦІЯ

Поцелуєв С. І. Багатопараметричне збудження поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.05 «Механіка рідини, газу та плазми». – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2017.

У вступі обґрунтовано актуальність досліджуваної проблеми, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

У першому розділі проведено аналіз основних результатів досліджень стійкості рівноважних станів рідин, які мають вільну поверхню або поверхню розділу. Виписано основну систему рівнянь ферогідродинаміки ізотропно намагнічуваних середовищ, яка вперше була отримана Й. Л. Нойрінгером та Р. Е. Розенцвейгом [89] (1964), а її узагальнення на випадок середовищ, які нелінійно намагнічуються і поляризуються, та її термодинамічне обґрунтування надав І. Є. Тарапов [104] (1972). Сформульовано граничні умови на поверхнях розділу. На основі проведеного аналізу літератури зроблено висновок про недостатньо повне дослідження виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах при параметричному впливі. За результатами огляду стану проблеми визначено мету роботи.

В другому розділі. досліджено задачі параметричної стійкості необмеженої вільної поверхні шарів нелінійно намагнічуваної рідини й динамічної стабілізації поверхневої нестійкості за допомогою осцилюючих магнітних і вібраційного полів.

В підрозділі 2.1 розглянуто необмежений шар магнітної рідини, над якою зверху знаходиться немагнітне середовище меншої густини, наприклад повітря, впливом якого на рух рідини надалі нехтуємо. Вважається, що нелінійно намагнічувана рідина перебуває в довільно орієнтованому до її горизонтальної поверхні

однорідному нестационарному магнітному полі, а також під впливом модульованого гравітаційного прискорення. Ферорідина вважається в'язкою, неелектропровідною, нестисливою та однорідною. У випадку нетеплопровідної рідини її рух буде адіабатичним (ізоентропійним), якщо початковий стан ферорідини є однорідним. Для областей, які займають повітря і в'язка нелінійно намагнічувана рідина виписана система рівнянь і граничних умов на поверхні розділу. Задачу сформульовано в термінах потенціалу напруженості магнітного поля. Для плоского випадку система рівнянь і граничних умов записана в термінах функції струму. Проведено лінеаризацію системи рівнянь і граничних умов поблизу рівноважного стану ферорідини з горизонтальною вільною поверхнею. У випадку загального закону намагнічування з умови адіабатичності руху знайдено зв'язок між збуреннями напруженості магнітного поля та збуреннями температури. Сформульована задача дозволяє дослідити питання параметричної нестійкості вільної поверхні магнітної рідини для випадку нелінійної залежності намагніченості від напруженості поля й температури та довільній орієнтації магнітного поля відносно горизонтальної поверхні рідини.

Знайдено розв'язки рівнянь для потенціалу напруженості магнітного поля та функції струму. Розв'язки сформульованої задачі відшукувались з використанням теорії Флоке. Розглянуто окремі випадки зовнішніх періодичних впливів. Задачу зведено до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно амплітуди збурення вільної поверхні. У випадку, коли магнітне поле складається зі стаціонарної та осцилюючої частин, матриця цієї системи є квадратичним пучком матриць, параметром якого є амплітуда коливань магнітного поля. В подальшому задачу зведено до лінійної спектральної задачі, де амплітуда параметричного впливу є власним значенням.

При проведенні чисельних розрахунків нескінченні матриці, які залежать від параметрів системи, обрізувались до розмірів, що забезпечували необхідну точність обчислень. Показник Флоке фіксувався на значеннях, які відповідають випадкам гармонічних або субгармонічних коливань системи. Варіюючи значення хвильових чисел збурень які виникають на вільній поверхні, розв'язувалась алге-

браїчна спектральна задача і визначались дійсні власні значення, які відповідають найменшій амплітуді параметричного збудження. Таким чином, у площині значень ключових параметрів (хвильове число, амплітуда періодичного впливу) будувалися нейтральні криві стійкості, які утворюють області ("язики"); значення параметрів поза (всередині) цих областей відповідають стійкості (нестійкості). Абсолютному мінімуму на перехідних кривих відповідає критична амплітуда параметричного збудження й критичне хвильове число, при яких настає нестійкість і виникають поверхневі хвилі.

У результаті розрахунків встановлено, що має місце механізм параметричної стабілізації нестійкості Розенцвейга у вертикальному магнітному полі за рахунок додавання періодичних коливань поля. Аналогічне підвищення порогу виникнення нестійкості Розенцвейга за рахунок механічних вібрацій шару було виявлено в роботі Г. В. Мюллера [88] (1998). Встановлено, що при співпадінні частот періодичних дій модульованого гравітаційного поля (вібрацій) та осцилюючого магнітного поля вони можуть компенсувати параметричний вплив один одного. При пропорційному відношенні частот цих параметричних дій ефект параметричної стабілізації проявляється значно слабше. Показано принципову можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні намагнічуваної рідини в результаті гармонічного збурення її температури за рахунок магнітокалоричного ефекту. При адіабатичності руху в результаті коливань температури виникають осциляції магнітного поля, які можуть призводити до збудження параметричної нестійкості.

В *підрозділі 2.2* розглядається необмежений у горизонтальному напрямку шар магнітної рідини скінченної товщини, який розташований на твердій немагнітній пластині й обмежений зверху повітрям, впливом якого на рух рідини нехтується. Вважається, що рідина перебуває в довільно орієнтованому до її вільної горизонтальної поверхні однорідному нестационарному магнітному полі, а пластина здійснює вертикальні гармонічні коливання. Введено неінерціальну систему координат яка, поступально рухається у вертикальному напрямі. Ферорідина вважається в'язкою, нестисливою, непровідною і для неї прийнятий ізотропний закон нама-

гнічування, який залежить тільки від густини рідини та напруженості магнітного поля. Аналогічно *підрозділу 2.1* задачу сформульовано у термінах потенціалу напруженості магнітного поля. У лінійному наближенні, використовуючи метод роботи К. Кумара [81] (1996) з системи рівнянь виключено всі компоненти швидкості рідини, окрім вертикальної. Сформульована задача дозволяє дослідити нестійкість вільної поверхні капілярної рідини з нелінійним законом намагнічування, враховуючи ефекти в'язкого тертя й скінченності глибини шару рідини.

Основні якісні особливості розв'язків задачі простежено для випадку лінійного закону намагнічування рідини. Знайдені розв'язки рівнянь для потенціалу напруженості магнітного поля у кожній з областей. Нахилене магнітне поле задано таким чином, щоб воно складалося з постійної й осцилюючої частин. За умови раціональності співвідношень частот електромагнітних і вібраційного впливів, задача зводиться до дослідження нескінченної системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів ряду Фур'є амплітуди збурень вільної поверхні ферорідини. Аналогічно *підрозділу 2.1*, задача зведена до знаходження розв'язків спектральної задачі, власним значенням якої є одна з амплітуд періодичної дії.

Досліджено відмінності вібраційного і електромагнітного механізмів у розвитку параметричної нестійкості вільної поверхні. На відміну від механічних вібрацій, ефективний вплив магнітного поля на стійкість вільної поверхні рідини пропорційний квадрату поля. Тому магнітне поле, що складається зі стаціонарної та осцилюючої частин, призводить до двочастотного параметричного впливу. Розглянуто окремо випадок нахиленого магнітного поля, що складається з постійної й коливної частин, при відсутності механічних вібрацій. Цей випадок цікавий тим, що стаціонарна складова горизонтального магнітного поля має стабілізуючий вплив на вільну поверхню, тоді як осцилююче горизонтальне поле може призводити до виникнення параметричної нестійкості (магнітної нестійкості Фарадея), тобто появи хвилястої структури на вільній поверхні рідини. А у вертикальному магнітному полі, окрім параметричної нестійкості, може виникати нестійкість з появою шпильастої форми вільної поверхні (квітка Розенцвейга), якщо напруженість поля перевищить критичне значення.

Встановлено, що на відміну від випадку механічних вібрацій, для тільки осцилюючого магнітного поля найнебезпечнішими є гармонічні коливання. З додаванням стаціонарного поля, починають проявлятися зони субгармонічної нестійкості. Збільшення стаціонарного поля може призводити до виникнення бікритичних точок, тобто коли одній критичній амплітуді поля відповідають два різних хвильових числа (гармонічних та субгармонічних коливань). Подальше збільшення постійної компоненти поля може призводити до того, що субгармонічні коливання стають більш небезпечними. Встановлено залежність критичної амплітуди магнітного поля і критичного хвильового числа від кута орієнтації поля. При відхиленні поля від вертикального або горизонтального положення для збудження нестійкості потрібно прикласти поле більшої амплітуди, оскільки вертикальна й горизонтальна складові магнітного поля можуть компенсувати дію один одного. Вплив стаціонарного магнітного поля на критичну амплітуду механічних вібрацій має більш складний характер і залежить не тільки від орієнтації магнітного поля, але й від товщини шару рідини.

У *підрозділі 2.3* розглянуто випадок ідеальної рідини. Задача параметричної стійкості сформульована в термінах потенціалів швидкості та напруженості магнітного поля. Узагальнено інтеграл Коші – Лагранжа при врахуванні магнітокалоричного ефекту. В лінійному наближенні задача зведена до дослідження рівняння Матьє-Хілла для амплітуди збурень вільної поверхні магнітної рідини. Результати про стійкість вільної поверхні у стаціонарному магнітному полі отримуються, як частковий випадок.

В третьому розділі досліджується нестійкість рівноваги і збудження хвиль на обмеженій поверхні розділу намагнічуваних рідин. В *підрозділі 3.1* розглянуто систему незмішуваних магнітних рідин, розділених горизонтальною пластиною з отвором, які знаходяться у стаціонарному вертикальному магнітному полі. Товщина пластини, що розділяє рідини, вважається малою в порівнянні з товщиною нижнього й верхнього шарів рідин. Це дозволяє ототожнювати пластину з її серединною поверхнею. Горизонтальна поверхня розділу й однорідне магнітне поле відповідають одному з можливих станів рівноваги рідин. Для описання руху рідин

поблизу цього рівноважного стану в лінійному наближенні задачу сформульовано в термінах потенціалу малих зміщень часток рідин та збурень потенціалу магнітного поля. При цьому вважається що контур поверхні розділу рідин, що збігається з гострим краєм пластини, у процесі коливань рідин залишається нерухомим. Докладно розглянуто випадок кругового отвору в пластині, що розділяє незмішувані рідини.

За допомогою перетворень Ганкеля задачу про власні коливання рідин зведено до інтегродиференціального рівняння зі спектральним параметром відносно мод коливань поверхні розділу рідин. Розв'язки отриманої спектральної задачі розшукувались з використанням методу Гальоркіна. Запропоновано метод побудови границі області стійкості в просторі фізичних параметрів системи. У випадку рідини, намагнічуваної за законом Ланжевена, проведено розрахунок границі області стійкості, визначено моди найшвидше зростаючих збурень. Встановлено, що при невеликих значеннях числа Бонда, що характеризує відношення гравітаційних сил до капілярних сил, найнебезпечнішими є вісесиметричні збурення або збурення по першій або другій гармоніках. В певному діапазоні значень числа Бонда рівною мірою можуть бути небезпечними вісесиметричні збурення і збурення по другій гармоніці, це пояснюється збігом спектрів власних значень задачі. З ростом значень числа Бонда при фіксованих значеннях інших параметрів збільшуються критичні значення індукції магнітного поля, які при цьому асимптотично зростають як корінь із числа Бонда.

В *підрозділі 3.2* розглянуто двошарову систему незмішуваних ферорідин, розташованих в соленоїді з ідеально провідною боковою стінкою. Вважається, що рідини перебувають під дією сил поверхневого натягу, гравітаційного поля та магнітного поля, яке спрямоване вертикально вгору. Розглянуто малі коливання нев'язких магнітних рідин поблизу рівноважного стану. В цьому випадку малі збурення рівноважного стану і подальшу еволюцію поверхні розділу визначають потенціальні складові поля швидкості рідини. Система рівнянь формулюється аналогічно *підрозділу 3.1*, при цьому замість умови нерухомості контуру поверхні розділу рідин приймається умова збереження кута змочування бічної стінки соле-

ноїда. З рівнянь і граничних умов отримано спектральну крайову задачу та знайдено її розв'язки (тобто власні значення і власні функції цієї задачі).

Сформульовано умову стійкості (нестійкості) рівноважного стану рідин. Показано, що зростання індукції магнітного поля неминуче призводить до виникнення від'ємних власних значень, а отже, до нестійкості рівноважного стану рідин. Розглянуто процеси виникнення і зростання впорядкованих структур вільної поверхні магнітної рідини на прикладі циліндра з прямокутним та круговим поперечними перерізами. Побудовано границю області стійкості в просторі безрозмірних параметрів системи. Показано, що область значень параметрів, які відповідають нестійким рівноважним станам, розбивається на зони, кожна з яких характеризується цілком визначеною модою найшвидше зростаючих збурень. Зміна індукції магнітного поля, що викликає перехід фізичних параметрів з однієї зони в іншу, супроводжуються якісною перебудовою форм поверхні розділу ферорідин. Зі збільшенням числа Бонда вплив бічних стінок соленоїда слабшає, а критичні значення індукції магнітного поля наближаються до значень, які відповідають випадку необмеженої поверхні розділу рідин.

В четвертому розділі досліджено виникнення об'ємного параметричного резонансу в намагнічуваних середовищах. Розглянуто одномірні нестационарні рухи намагнічуваного середовища. Показано, що рівняння руху ідеальної ферорідини, або в'язкої ферорідини у відсутності теплопровідності приводяться до виду рівнянь одномірної газової динаміки зі спеціальними рівняннями стану. Немагнітне середовище, яке описується цими рівняннями стану, надалі називається ефективним немагнітним середовищем, що відповідає вихідному намагнічуваному середовищу. Після лінеаризації рівнянь руху отримано рівняння для потенціалу швидкості. Розглянуто модель ідеального парамагнетика, намагніченість якого визначається рівнянням Ланжевена для випадку слабого поля. У цьому випадку, зокрема, встановлено, що складові магнітного поля, перепендикулярні напрямку поширення хвилі, не впливають на швидкість поширення звуку. Крім того, швидкість поширення звуку уздовж напрямку магнітного поля більша, ніж у відсутності поля. У випадку нестационарного магнітного поля рівняння для потенціалу

швидкості зведено до рівняння Матьє-Хілла. Використовуючи метод Уїттекера в першому наближенні для потенціалу швидкості отримано періодичний розв'язок, який відповідає потенціалу хвиль малої амплітуди, збуджуваних в результаті виникнення об'ємної параметричної нестійкості намагнічуваного середовища. Встановлено параметри виникаючих акустичних хвиль, вплив стаціонарної й осцилюючої компонент магнітного поля на дисперсність звуку та швидкість його поширення. Побудовано нейтральні криві, що утворюють вузькі області нестійкості, які відповідають появі ультразвукових коливань у магнітній рідині. Встановлено, що збільшення стаціонарної складової магнітного поля призводить до зменшення критичної амплітуди коливань поля, при якій збуджується об'ємний параметричний резонанс.

Ключові слова: ферогідродинаміка, магнітна рідина, стійкість рівноваги, параметричний резонанс, внутрішні та поверхневі хвилі.

ABSTRACT

A thesis on the degree of Candidate of Science (PhD) on specialty 01.02.05 "Mechanics of fluid, gas and plasma". – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2017.

In the introduction the actuality of studied problems and the connection with academic programs, plans and themes are given. The aim, problems and methods of research are formulated. Scientific novelty and practical significance of results were determined. The information about publications, personal contribution and the approbation of results was provided.

In the first section the main results of research on the stability of equilibrium states of fluid interface or free surface were analyzed. The basic system of ferrohydrodynamic equations for isotropic magnetizable medium was written. It was initially obtained by J. L. Neuringer, R. E. Rozensweig [89] (1964) and its generalization for the case of nonlinear magnetizable and polarizable medium and its thermodynamic rationale were provided by I. E. Tarapov [104] (1972). Boundary conditions at the fluid interface were formulated. The appearance of internal and surface waves in magnetic

fluids wasn't completely studied. This conclusion can be based on the analysis of existing literature. During the review of the problem a purpose of work was determined.

In the second section the problem of parametric stability of unbounded free surface of nonlinear magnetizable fluid layers and dynamic stabilization of surface instability using oscillating magnetic and vibrating fields were studied.

In *subsection 2.1* the unbounded magnetic fluid layer is considered. On the top of fluid is nonmagnetic medium of lower density, such as air, which influence on the movement of fluid is neglected. Nonlinear magnetizable fluid is in an arbitrarily oriented to its horizontal free surface unsteady homogeneous magnetic field and under the influence of modulated gravitational acceleration. Viscous, nonconducting, incompressible and homogeneous ferrofluid is considered. If the initial state of ferrofluid is uniform, the motion of non-heatconducting fluid is adiabatic (isentropic). For regions, occupied by the air and viscous nonlinear magnetizable fluid, the system of equations and boundary conditions at the fluid interface is written. The problem is formulated in the term of magnetic field potential. In the flat case the system of equations and boundary conditions is written in the term of two-dimensional stream function. Linearized system of equations and boundary conditions near equilibrium state of horizontal free surface of ferrofluid was considered. In the case of general law of magnetization from the adiabatic condition a ratio between magnetic field disturbances and perturbations of temperature was found. Formulated problem allows studying parametric stability of free surface of ferrofluid in the case of nonlinear dependence of magnetization from the field strength and the temperature at arbitrary orientation of magnetic field relative to the horizontal free surface.

The solution of equations for the magnetic field potential and stream function was found. The solution of formulated problem was sought using Floquet theory. Several specific cases of external periodic influences were considered. The problem is reduced to an infinite system of algebraic equations for perturbation amplitude of the free surface. In the case of magnetic field, which consists of stationary and oscillating portions, the matrix of this system is the quadratic pencil of matrices, whose parameter

is the amplitude of magnetic field. In a further the problem is reduced to the linear spectral problem where the amplitude of the parametric influence is an eigenvalue.

At numerical calculations infinite matrices, which depend on the system parameters, were cut to the size that provides the necessary accuracy of calculations. Floquet exponent was fixed at values that correspond to the case of harmonic or subharmonic oscillations. By varying the wave number of disturbances, which occur on the free surface, the algebraic spectral problem was solved and real eigenvalues, that correspond to the smallest amplitude of parametric excitation, were determined. In the plane of values of key parameters (wave number, amplitude periodic action) marginal stability curves were constructed. Neutral curves distinguish regions ("tongues"), parameter values outside (inside) of these regions correspond to the stability (instability). Absolute minimum on marginal curves corresponds to the critical amplitude of parametric excitation and the critical wavenumber at which instability occurs and surface waves appear.

As a result of calculations it is determined, that there is a stabilization mechanism of Rosensweig instability in vertical magnetic field by adding periodic oscillations of the field. A similar increase in the threshold of occurrence of Rosensweig instability due to mechanical vibration of fluid layer was found by H. W. Muller [88] (1998). It was found that at coincidence of frequencies of modulated gravitational field (vibrations) and of oscillating magnetic field, they can compensate the parametric influence of each other. At proportional ratio of frequencies of these periodic actions the effect of parametric stabilization appears much weaker. The principal possibility of excitation of parametric instability of fluid free surface as a result of harmonic perturbation of the temperature due to magnetocaloric effect is shown. At adiabaticity of motion as a result of temperature fluctuations, oscillations of the magnetic field occur, that can lead to excitation of parametric instability.

In *subsection 2.2* the unbounded in horizontal direction magnetic fluid layer of finite depth is considered. Ferrofluid layer is located on a solid nonmagnetic plate and bounded from above by air, which impact on the fluid motion is neglected. Magnetic fluid is in an arbitrarily oriented to its horizontal free surface unsteady homogeneous

magnetic field and the solid plate performs vertical harmonic vibrations. Non-inertial coordinate system, which is moving in a vertical direction, is introduced. Ferrofluid is considered viscous, incompressible and nonconductive. For magnetic fluid the isotropic law of magnetization that depends on the fluid density and magnetic field strength is accepted. Similarly to *subsection 2.1* the problem is formulated in the term of magnetic field potential. In the linear approximation using the method of K. Kumar [81] (1996) from the system of equations all components of fluid velocity except vertical part are excluded. Formulated problem allows studying the stability of free surface of capillary fluid with nonlinear magnetization law, taking into account the effects of viscous dissipation and finite depth of the layer.

The main qualitative characteristic of solutions was studied for the case of linear law of fluid magnetization. The solution of equations for the magnetic field potential in each region was found. Tilted magnetic field, which consists of constant and oscillating parts, was considered. Assuming the rationality ratio of frequencies of electromagnetic and vibration effects, the problem is reduced to the study of infinite system of linear equations for the coefficients of the Fourier amplitude of perturbations of the free surface. Similarly to *subsection 2.1* the problem is reduced to finding solutions of the spectral problem, which eigenvalue is one of amplitudes of the periodic action.

The difference between electromagnetic and vibration mechanism in the appearance of parametric instability of free surface is studied. In contrast to mechanical vibrations the effective magnetic field influence on the stability of the free surface of ferrofluid is proportional to the square of the field. Therefore the magnetic field, consisting of stationary and oscillating parts, leads to the two-frequency parametric action. The tilted non-stationary magnetic field was considered as a partial case. This case is interesting because the stationary part of horizontal magnetic field has a stabilizing effect on the free surface, while the horizontal oscillating field can lead to the emergence of parametric instability (magnetic Faraday instability), i.e. to the appearance of waves on the free surface of the fluid. In the vertical magnetic field except the parametric instability, can emerge the sharp-pointed shape of the free surface (Rosenzweig flower), if the field strength exceeds the critical value.

It is shown that unlike the case of mechanical vibrations for pure oscillating magnetic field the most dangerous are harmonic oscillations. The addition of stationary field leads to appear of regions of subharmonic instability. The increase of stationary field can leads to the emergence of bicritical points, when one critical amplitude corresponds to two different wavenumbers (of harmonic and subharmonic oscillations). Further increasing of constant component of magnetic field can leads to the result where subharmonic oscillations become more dangerous. The dependence of the critical amplitude of magnetic field and the critical wavenumber on the angle of field orientation is determined. When the field is deflected from vertical or horizontal position for the excitation of instability it is necessary to apply field of greater amplitude, because vertical and horizontal components of the magnetic field can compensate each other's action. The influence of stationary magnetic field on the critical amplitude of mechanical vibrations is more complicated and depends not only on the field orientation, but also on the thickness of the fluid layer.

In *subsection 2.3* the case of an ideal fluid is considered. The problem of parametric stability is formulated in terms of velocity potential and the potential of magnetic field strength. The Cauchy-Lagrange integral is generalized taking into account the magnetocaloric effect. In the linear approximation the problem is reduced to the study of Mathieu-Hill equation for the amplitude of perturbations of the free surface of the magnetic fluid. The result of the stability analyses of the free surface in a stationary magnetic field is obtained as a particular case.

In the third section the instability of equilibrium state and the excitation of surface waves in a bounded interface between magnetic fluids are studied.

In the *subsection 3.1* a system of immiscible magnetic fluids, separated by a horizontal plate with a hole, in a stationary vertical magnetic field is considered. The thickness of the plate that separates the fluids is considered small compared to the depth of the lower and upper layers of fluids. This allows identifying the plate with its median surface. Horizontal interface and uniform magnetic field correspond to one of possible states of equilibrium of the fluids. To describe the motion of fluids near this equilibrium state in the linear approximation the problem can be formulated in terms

of the displacement potential and the potential of magnetic field strength. It is assumed that surface contour, which coincides with the sharp edge of the plate during fluid oscillations remains motionless. The case of a circular hole in the plate that separates immiscible fluid is considered in detail. By using Hankel transformation the problem of natural oscillations of fluid is reduced to integro-differential equation with spectral parameter relative to oscillation modes of the interface between fluids. The solution of spectral problem was sought using Galerkin method. The calculation method of boundary of stability region in the space of physical parameters of the system is proposed. For the fluid magnetizing according to Langevin law the boundary of stability is calculated. The most rapidly growing perturbations modes are determined. It is found that for small value of Bond number, which characterizes the ratio of gravitational force to capillary force, the most dangerous are axisymmetric perturbation or disturbance by the first or second harmonics. In a certain range of values of Bond number equally dangerous can be axisymmetric perturbation and disturbance by the second harmonic. This is due to the coincidence of the spectrum of eigenvalue problem. With increasing of values of the Bond number (at fixed values of other parameters) critical values of the magnetic field induction also grow. They increase asymptotically as the root of the Bond number.

In *subsection 3.2* a two-layer system of immiscible ferrofluids located in the solenoid with a perfectly conducting side walls is considered. The system of fluids is under the action of surface tension, gravitational and magnetic fields, which are directed vertically. Small oscillations of inviscid magnetic fluids near equilibrium state are considered. In this case the small perturbation of equilibrium state and the further evolution of fluid interface are determined by potential components of the velocity field. The system of equations is formulated similarly to *subsection 3.1*, but instead of immobility condition for surface contour it is accepted the condition for preserving of contact angle on the side wall of the solenoid. From the system of equations and boundary conditions the spectral boundary problem is obtained. Its solutions, i.e. eigenvalues and eigenfunctions of this problem, are found.

The condition of stability (instability) of equilibrium state of the fluids is formulated. It is shown that the growth of the magnetic field inevitably leads to appearance of negative eigenvalues and therefore to instability of equilibrium state. The process of emergence and growth of ordered structures of the free surface of magnetic fluid on the example of a cylinder with rectangular and circular cross-sections is considered. The boundary of stability in the space of dimensionless parameters of the system is determined. It is shown that the range of parameter values that correspond to unstable equilibrium state is divided into zones, each of which is characterized by a quite defined mode of the fastest growing perturbations. The change in magnetic field induction that causes transition of physical parameters from one zone to another is accompanied by qualitative reconstruction of shapes of fluid interface. With an increasing of Bond number the influence of solenoid side walls become weaker and the critical value of magnetic field approaching to the value that corresponds to the case of unbounded fluid interface.

In the fourth section the emergence of volumetric parametric resonance in magnetizable medium is studied. One-dimensional unsteady motions of magnetizable medium are considered. It is shown that equations of motion for an ideal ferrofluid or viscous magnetic fluid in the absence of heat-conduction can be reduced to form of equations of one-dimensional gas dynamics with the special equation of state. Non-magnetic medium that is described by these equations of state is called effective non-magnetic medium corresponding to original magnetizable medium. After linearization of equations of motion the equation for velocity potential is obtained. The model of ideal paramagnet, which magnetization is determined by Langevin equation for a weak magnetic field, is considered. For this case in particular it is determined that magnetic field components, which are perpendicular to the direction of wave propagation, do not affect on the speed of sound. Moreover the speed of sound propagation along the direction of magnetic field is greater than in the absence of the field. In the case of non-stationary magnetic field the equation for velocity potential is reduced to the Mathieu-Hill equation. Using the Whittaker method in a first approximation for the velocity potential it is obtained the periodic solution, which corresponds to potential of small-

amplitude waves, excited as a result of volumetric parametric instability in magnetizable fluid. Parameters of emerging acoustic waves, the impact of stationary and oscillating magnetic fields on the dispersion of sound and speed of its propagation are determined. Marginal stability curves, that form narrow unstable regions corresponding to ultrasonic oscillations in ferrofluid, are obtained. The increase of stationary component of magnetic field leads to a decrease of critical amplitude at which volumetric parametric resonance is excited.

Keywords: ferrohydrodynamics, ferrofluids, equilibrium stability, parametric resonance, internal and surface waves.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / Н.Ф. Пацегон, С.И. Поцелуев // Прикладная гидромеханика. – 2014. – Т. 16 (88), № 3. – С. 36–51.
2. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности слоя вязкой феррожидкости при воздействии переменного магнитного поля и механических вибраций / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Техническая механика. – 2016. – № 2. – С. 71–84.
3. Borysov I. D. Instability of equilibrium and appearance of ordered spatial structures on the free surface of ferrofluid / I. D. Borysov, S. I. Potseluev and T. Yu. Yatsenko // Magnetohydrodynamics. – 2014. – Vol. 50, №.1. – P. 3–12.
4. Борисов И. Д. Неустойчивость Розенцвейга в двухслойной системе несмешивающихся намагничивающихся жидкостей / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка». – 2016. – Т. 84. – С. 46–60.
5. Patsegon N. F. The volumetric parametric resonance in magnetizable medium / N. F. Patsegon, S. I. Potseluev // Вісник Харківського національного універси-

- тету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка». – 2015. – Т. 81.– С. 20 – 35.
6. Potseluiiev S. I. Parametric instability of ferrofluid layer free surface in oscillating magnetic fields / S. I. Potseluiiev // *Mechanics. Researches and Innovations*. – 2016. – Vol. 9. – P. 6 – 13.
 7. Potseluiiev S. I. Parametrical instability of the free surface of nonlinear magnetizable fluid / S. I. Potseluiiev, N.F. Patsegon // *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*. – Харьков: «Апостроф», 2011.–С. 104–119.
 8. Potseluiiev S. I. Parametric oscillations of two-layer system of immiscible ferrofluids / S. I. Potseluiiev // *5th International conference of young scientist on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. Book of abstracts*. – Kyiv, 2016. – P. 119.
 9. Patsegon M. Interfacial stability of the ferrofluid in a constant and oscillating magnetic fields / M. Patsegon, I. Borisov, S. Potseluiiev // *International conference «DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY»*. Book of abstracts. – Kharkiv, 2016. – P. 26.
 10. Patsegon N. F. Parametric instability of ferrofluid in oscillating magnetic fields / N. F. Patsegon, S. I. Potseluiiev // *Современные проблемы естественных наук. Сборник тезисов докладов междунар. конф. «Тараповские чтения-2016»*. – Харьков: «Цифровая типография №1», 2016. – С. 77.
 11. Борисов І. Д. Нестійкість рівноваги, еволюція вільної поверхні магнітної рідини в за критичному магнітному полі / І. Д. Борисов, С. І. Поцелуєв, Ю. І. Руднєв // *Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки»*. Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 42.
 12. Пацегон Н. Ф. Об'ємний параметричний резонанс у магнітних рідинах стосовно збудження акустичних коливань / Н. Ф. Пацегон, С. І. Поцелуєв // *Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки»*. Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 99.

13. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 103.
14. Борисов И. Д. Равновесные формы свободной поверхности намагничивающейся жидкости и их устойчивость / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев, Ю. И. Руднев // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 28 – 29.
15. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 62 – 63.
16. Поцелуев С. И. Параметрическая неустойчивость свободной поверхности нелинейно намагничивающейся жидкости / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». Тезисы докладов международной конференции. – Харьков: «Апостроф», 2011. – С. 91 – 92.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	21
ВСТУП.....	22
РОЗДІЛ 1 ЗАГАЛЬНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ ХВИЛЬОВИХ РУХІВ РІДИН У ЗМІННИХ ПОЛЯХ РІЗНОЇ ПРИРОДИ.....	27
1.1 Огляд робіт по стійкості рівноважних станів рідин.....	28
1.2 Основні рівняння ферогідродинаміки і умови на поверхні розділу рідин.....	33
1.3 Висновки розділу.....	39
РОЗДІЛ 2 ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬ НА НЕОБМЕЖЕНІЙ ВІЛЬНІЙ ПО- ВЕРХНІ ШАРУ ФЕРОМАГНІТНОЇ РІДИНИ У ЗМІННИХ МАГНІТ- НИХ І ВІБРАЦІЙНОМУ ПОЛЯХ.....	41
2.1 Необмежений шар в'язкої капілярної нелінійно намагнічуваної рідини.....	41
2.2 Шар в'язкої нелінійно намагнічуваної рідини скінченної глибини...	67
2.3 Випадок ідеальної рідини.....	81
2.4 Основні висновки і результати розділу.....	92
РОЗДІЛ 3 НЕСТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ І ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬ НА ОБМЕЖЕНІЙ ПОВЕРХНІ РОЗДІЛУ НАМАГНІЧУВАНИХ РІДИН.....	93
3.1 Двошарова система магнітних рідин, розділених тонкої горизонта- льною пластиною з круговим отвором.....	93
3.2 Нестійкість рівноваги двошарової системи намагнічуваних рідин, розташованих у циліндричному соленоїді.....	107
3.3 Параметричне збудження хвиль на поверхні розділу намагнічуваних рідин в нестационарному магнітному полі.....	118
3.4 Висновки розділу.....	121

РОЗДІЛ 4 ОБ'ЄМНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС В НАМАГНІ- ЧУВАНИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	123
4.1 Ефективне немагнітне середовище, що відповідає намагнічуваному середовищу.....	123
4.2 Збудження ультразвукових коливань нестационарним однорідним магнітним полем.....	126
4.3 Основні висновки розділу.....	137
ВИСНОВКИ.....	139
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	141
ДОДАТКИ.....	151

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ρ – густина середовища,

\vec{v} – швидкість середовища,

μ – магнітна проникність,

M – намагніченість середовища,

\vec{B} індукція магнітного поля,

\vec{H} – напруженість магнітного поля,

g – гравітаційне прискорення,

p_0 – механічний тиск,

$\psi^{(\rho)}$ – магнітострикційний тиск,

ν – кінематична в'язкість,

η – динамічна в'язкість,

S – масова щільність ентропії,

c_v – теплоємність,

k_B – константа Больцмана,

T – температура середовища,

θ – кут орієнтації магнітного поля,

p_{jk} – тензор напружень,

δ_{jk} – символ Кронекера,

$\langle \dots \rangle$ – стрибок величин, взятих у дужки, на поверхнях розділу.

По повторюваних індексах проводиться підсумовування в межах їх зміни.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Зовнішнє магнітне поле є ефективним засобом впливу на рух намагнічуваних рідин завдяки наявностіponderomotorних сил і енергетичному обміну між полем і рідиною. Магнітні рідини є одним із перших представників нанотехнологічних середовищ. Вони є штучно синтезованими колоїдами, що складаються з ферочасток із характерним лінійним розміром порядку 10 нм, покритих шаром поверхнево-активної речовини, і рідини-носія, вибір якої залежить від практичного призначення. Властивостям ферорідин та їх застосуванню присвячено монографії Р. Розенцвейга [42](1989); В. Г. Баштового, Б. М. Берковського, А. М. Вісловіча [6](1985); Е. Я. Блума, М. М. Майорова, А. О. Цеберса [8] (1989); С. Такетомі, С. Тікадзумі [47] (1993); В. М. Полуніна [37] 2008, [38] (2012); С. Оденбаха й ін. [69] (2009) та наведена в них бібліографія. Магнітні рідини використовуються у вузлах тертя для герметизації та змащення, у сепараторах кольорових металів, у герметизуючих обладнаннях, в акустичних динаміках для демпфування мембрани, у тепломасообмінниках та в багатьох інших інженерно-технічних пристроях. Проте багато перспективних застосувань ферорідин знаходяться на стадії лабораторних досліджень. Тому для моделювання різних фізичних процесів у системах, що містять намагнічувані рідини, перспективними для розгляду є шари ферорідин, які контактують із твердими, рідкими й газоподібними середовищами. Широко відомий вплив механічних вібрацій на стійкість механічних систем, протікання механічних і тепломасобмінних процесів (В. В. Болотін [17], 1978). Набагато менше вивчений вплив ponderomotorних сил на параметричну стійкість розв'язків зв'язаних задач електродинаміки та механіки суцільних середовищ.

У зв'язку з поширеністю в техніці періодичних впливів (коливання температури, механічні вібрації, звукові та електромагнітні поля і т.д.), дослідження збудження поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах при дії однорідних нестационарних полів різної природи є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі прикладної математики та кафедрі теоретичної та прикладної механіки Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна в рамках держбюджетних тем: «Комбінаційні резонанси, біфуркації та параметрична стабілізація в механічних системах» (2012 – 2014 рр., № 0112U001313), «Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів дослідження хвильових рухів континуальних систем ускладненої структури» (2015 – 2016 рр., № 115U000480), «Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи» (2016 – 2017 рр., № 0116U000823).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є дослідження умов виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у шарах намагнічуваних рідин, взаємодіючих із зовнішнім магнітним та вібраційним полями. Для досягнення мети в дисертаційній роботі було вирішено наступні *задачі*:

1. Сформулювати задачу параметричної стійкості необмеженої вільної поверхні шару в'язкої капілярної ферорідини з найбільш загальним ізотропним законом намагнічування при впливі механічних вібрацій та довільно орієнтованого відносно горизонтальної поверхні нестационарного магнітного поля.

2. Описати процедуру побудови областей нестійкості, що відповідають збудженню поверхневих хвиль, в просторі ключових фізичних параметрів розглянутої системи при спільному впливі магнітних та інерційних сил, які змінюються за гармонічними законами з різними амплітудами та частотами.

3. Проаналізувати відмінності між параметричним збудженням хвильових рухів вільної поверхні ферорідини в осцилюючому магнітному полі та при механічних вібраціях. Дослідити спільний вплив цих періодичних збуджуючих сил на виникнення хвиль на вільній поверхні шару намагнічуваної рідини при різній орієнтації нестационарного магнітного поля.

4. Сформулювати задачу стійкості рівноважного стану двошарової систем незмішуваних магнітних рідин, розділених горизонтальною пластиною з отвором. Описати метод побудови границі області стійкості розглянутої системи в стаціонарному вертикальному магнітному полі. Для випадку кругового отвору провести

розрахунки границі області стійкості та мод найшвидше зростаючих збурень, що описують початкову стадію еволюції системи в закритичному магнітному полі.

5. Дослідити стійкість поверхні розділу намагнічуваних рідин, розташованих у соленоїді з круглим і прямокутним поперечними перерізами. Провести розрахунки границь областей стійкості у випадку стаціонарного та осцилюючого вертикального магнітного поля. Визначити моди та форми найшвидше зростаючих збурень поверхні.

6. Дослідити можливість виникнення об'ємного параметричного резонансу в намагнічуваних рідинах при періодичній дії нестационарного однорідного магнітного поля.

Об'єктом дослідження є гідродинамічні системи, заповнені магнітними рідинами, які мають поверхню розділу або вільну поверхню.

Предметом дослідження є виникнення поверхневих та внутрішніх хвиль в шарах ферорідин при впливі різних дестабілізуючих факторів, таких як механічні вібрації, стаціонарні та осцилюючі магнітні поля.

Методи дослідження. Для математичного моделювання об'єкта дослідження використовуються рівняння ферогідродинаміки (гідродинаміки неелектропровідних намагнічуваних рідин), методи теорії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, чисельні методи лінійної алгебри, аналітичні методи математичної фізики, асимптотичні методи, метод Бубнова-Гальоркіна.

Наукова новизна отриманих результатів

У роботі вперше отримано наступні результати:

– Показано, що магнітне поле, яке складається з постійної та осцилюючої частин, здійснює двочастотний параметричний вплив на стійкість вільної поверхні ферорідини. Додавання стаціонарної компоненти до тільки коливного магнітного поля призводить до виникнення додаткових областей нестійкості. Встановлено, що зміна кута орієнтації магнітного поля відносно горизонтальної вільної поверхні або збільшення стаціонарної складової магнітного поля можуть призво-

дити до виникнення бікритичних точок і переходу від гармонічних до субгармонічних коливань системи.

– Виявлено можливість стабілізації параметричної нестійкості вільної поверхні ферорідини при механічних вібраціях за рахунок накладання нестационарного магнітного поля. У випадку двочастотної параметричної дії проаналізований вплив відношень амплітуд і частот різних модуляцій на структуру областей нестійкості, перехід від субгармонічних до гармонічних коливань, виникнення додаткових областей нестійкості.

– Для нелінійно намагнічуваної рідини показано можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні в результаті гармонічного збурення температури за рахунок магнітокалоричного ефекту.

– Запропоновано чисельно-аналітичний метод побудови границі області стійкості для поверхні розділу двошарової системи намагнічуваних рідин, розділених тонкою пластиною з отвором, при впливі вертикального стаціонарного магнітного поля. Для випадку кругового отвору проведені розрахунки границі області стійкості, мод та форм найшвидше зростаючих збурень.

– Для двошарової системи магнітних рідин, розташованих у соленоїді з круглим і прямокутним поперечними перерізами, побудовано границі областей стійкості у вертикальному магнітному полі. Визначено моди найнебезпечніших збурень поверхні розділу для різних значень фізичних параметрів розглянутої системи.

– Обґрунтовано метод збудження ультразвукових хвиль нестационарним магнітним полем у результаті об'ємної параметричної нестійкості. Визначено параметри виникаючих акустичних хвиль, вплив осцилюючої частини магнітного поля на дисперсність звуку та швидкість його поширення.

Практична цінність отриманих результатів. На підставі рівнянь ферогідродинаміки запропоновано методи дослідження широкого класу задач стійкості рівноваги вільної поверхні або поверхні розділу намагнічуваних рідин. Отримані результати дослідження умов виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у магнітних рідинах в однорідних нестационарних полях різної природи становлять

практичний інтерес у зв'язку з використанням ферорідин у різних магнітооптичних пристроях, газоочисних, тепло- і масообмінних апаратах. Вони можуть знайти застосування при проектуванні відповідного обладнання для оцінки параметрів, які гарантують його надійність та ефективність роботи.

Особистий внесок здобувача. У спільних статтях співавторам належать постановки задач, підходи до їх розв'язку та обговорення результатів. Решта результатів отримані автором дисертації самостійно.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на: міжнародній конференції «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 17 – 22 квітня 2011 р.), міжнародній школі-конференції «Сучасні проблеми математики, механіки й інформатики» (Харків, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р.), міжнародній математичній конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій і математичні методи механіки» (Київ, 23 – 24 квітня 2014 р.), міжнародній конференції «Сучасні проблеми природничих наук» (Харків, 1 – 15 березня 2016 р.), міжнародній конференції «Диференціальні рівняння й теорія керування» (Харків, 26 – 28 вересня 2016 р.), 5-й міжнародній конференції для молодих учених «Диференціальні рівняння і їх застосування» (Київ, 9 – 11 листопада 2016 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в статтях [35,36,67,95,13,98,100] та в тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [99,91,94,15,34,40,14,41,39].

Структура й об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 107 найменувань на 10 сторінках. Робота включає 25 рисунків, загальний обсяг дисертації 154 сторінки. На захист виносяться результати, які сформульовано в розділах 2, 3 та 4.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ ХВИЛЬОВИХ РУХІВ РІДИН У ЗМІННИХ ПОЛЯХ РІЗНОЇ ПРИРОДИ

Виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у рідинах є поширеним явищем у природі та різноманітних технологічних процесах. Теорія хвильових рухів рідин вивчається у чисельних монографіях, зокрема Г. Ламба [26] (1947), Л. М. Сретенського [46] (1977), Дж. Лайтхілла [25] (1981) та наведеній у них бібліографії. Хвильові рухи границі рідини (вільної поверхні або поверхні розділу незмішуваних рідин) утворюються при порушенні рівноважного стану під впливом зовнішніх сил та характеризуються коливаннями окремих часточок рідини. При цьому гравітаційно-капілярні сили намагаються відновити рівновагу поверхні рідини. Для довгохвильових збурень (метрового порядку) більший вплив мають гравітаційні сили. Тому якщо якимось чином вивести поверхню рідини з горизонтального положення сила тяжіння буде намагатися її повернути до рівноважного стану, так виникають гравітаційні хвилі. Дрібні хвилі (брижі) утворюються при домінуванні сил поверхневого натягу (капілярних сил) та мають сантиметровий порядок довжини хвиль. В природі можна спостерігати багато випадків хвильових рухів рідини, наприклад, морські хвилі під дією вітру; приливні хвилі виникають за рахунок тяжіння рідини до Сонця та Місяця. Поверхневі хвилі також можуть утворюватись при русі твердих тіл в рідині, наприклад, так виникають корабельні хвилі. Внутрішні хвилі можуть утворюватись в стискуваних рідинах, наприклад, при невеликому перепаді густини за рахунок зміни тиску, температури або солоності рідини при збільшенні її глибини. На відміну від поверхневих хвиль які розвиваються на границі і лише звідси передаються всередину рідини, внутрішні хвилі мають місце в усьому об'ємі рідини.

Наведені приклади свідчать про велику різноманітність хвильових рухів рідини. Виникаючі хвилі можуть бути довгими або короткими, малої або скінченної амплітуди, біжучими або стоячими. Їх дослідження становить великий інтерес для

гідродинамічних систем, оскільки вони можуть суттєво впливати на характер різноманітних технологічних процесів, що містять об'єми рідин.

1.1 Огляд робіт по стійкості рівноважних станів рідин

Сучасний стан досліджень хвильових рухів рідин описаний у монографії Р. А. Ібрагіма [78] та наведеній в ній бібліографії. Перші дослідження стоячих хвиль на поверхні рідини належать М. Фарадею [71] (1831), який провів велику кількість експериментів з ємностями, заповненими рідиною, при наявності вертикальних механічних вібрацій. Зокрема ним було виявлено, що при певній частоті коливань контейнера з рідиною, на вільній поверхні виникають хвилі з половиною частотою коливань (субгармонічні коливання) або тієї ж частоти (гармонічні коливання). Ці результати були також підтвержені Д. Релеєм (Стреттом). Теорія цього явища, яке в подальшому отримало назву «параметричний резонанс», була розвинена Т. Бенжаміном і Ф. Урселом [64] (1954) і незалежно Н. Н. Мойсеєвим [29] (1954), [30] (1965). Ними було показано, що вираз для амплітуди збурення поверхні ідеальної рідини в лінійному наближенні зводиться до рівняння Матьє, яке є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку з періодичними коефіцієнтами. Про розв'язки цього рівняння можна дізнатись з монографії Н. МакЛахлана [85] (1951).

Існування резонансних частот при яких горизонтальна поверхня рідини стає нестійкою досліджувалось в роботах Л. М. Сретенського [45] (1951); В. В. Болотіна [9, 10] (1956), [17] (1978); Ф. Л. Черноусько [53] (1966), [54] (1968); В. Г. Неволіна [32] (1977), С. Я. Секерж-Зеньковича [43] (1990).

В монографії Д. В. Любимова, Т. П. Любимової, А. А. Черепанова [28] (2003) задача стійкості поверхні розділу двох ньютонівських незмішуваних в'язких рідин під дією періодичних коливань була зведена до інтегродиференціального рівняння для амплітуди збурень поверхні, що викликало певні труднощі в її дослідженні. У лінійному наближенні вона була вирішена в роботі К. Кумара та Л. С. Такермана [82] (1994), де з використанням теорії Флоке був за-

пропонований метод зведення її до задачі на власні значення для матриці нескінченного порядку і побудови нейтральних кривих стійкості.

У роботах О. В. Авраменко, В. В. Нарядового, І. Т. Селезова [57] (2016), [1] (2017) проведено аналіз нелінійних процесів у двошаровій системі незмішуваних рідин. Нижня рідина контактує з твердим дном, а верхня має вільну поверхню. Методом багатомасштабних розвинень встановлено форми вільної поверхні та поверхні розділу рідин в залежності від геометричних та фізичних параметрів розглянутої системи. Обчислено енергію хвильового руху, яку переносять внутрішня і поверхнева хвилі.

Комплексні проблеми механіки рідини, газу та твердого деформівного тіла розглянуто в роботах К. В. Аврамова та ін. [3] (2010), [2] (2014), [58] (2017). Наведено підходи та методи розв'язання задач нелінійної динаміки механічних систем. Аналітичними та чисельними методами досліджено періодичні та хаотичні коливання, їх стійкість та біфуркації.

З появою магнітних рідин, які вперше були синтезовані в 1960-х роках, з'явилися нові можливості параметричного впливу на шари цих рідин. Сам термін “магнітні рідини” був запропонований М. І. Шліомісом [55] (1974), але в літературі також зустрічаються терміни: ферорідини, феромагнітні колоїди, намагнічувані рідини та інші. Магнітні рідини представляють собою штучну стійку колоїдну суспензію однодомених магнітних частинок в рідині-носії. Технологічна і наукова важливість цих середовищ спирається на можливість прямого керування їх положенням та контролю їх поведінки за допомогою зовнішнього магнітного поля.

Про проблеми, які виникають в технічних застосуваннях ферогідродинаміки, можна дізнатись звернувшись до монографій Р. Розенцвейга [42] (1989), В. Є. Фертмана [52] (1988); С. Такетомі, С. Тікадзумі [47] (1993), С. Оденбаха й ін. [69] (2009). Значний внесок у розвиток гідродинаміки середовищ з ускладненими властивостями зробили українські вчені. У Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна цей напрямок досліджень був заснований І. Є. Тараповим. Його роботи стали продовженням основоположних праць акаде-

міка Л. І. Сєдова [44]. І. Є. Тараповим було сформульовано і розглянуто задачі магнітогідрадинамічного змашення [48], розроблено математичну модель ізотропного середовища, яке взаємодіє з електромагнітним полем, для загальних законів поляризації і намагнічування [51]. М. Ф. Пацегон продовжив дослідження І. Є. Тарапова в області гідродинаміки намагнічуваних середовищ, пов'язане з вивченням процесів самоорганізації при зміні мікроструктури магнітних рідин [33, 93].

Окрім параметричного впливу на поверхню магнітної рідини нестационарним магнітним полем окремої уваги заслуговують стійкість рівноважних станів ферорідин в стаціонарному полі. Виникнення упорядкованих просторових конфігурацій вільної поверхні магнітної рідини є цікавим прикладом процесів самоорганізації у фізичних системах. Ці процеси привертають увагу дослідників протягом багатьох років. Серед експериментальних та теоретичних досліджень варто відзначити роботи Ю. Д. Баркова [5] (1977); В. Г. Баштового, М. С. Кракова, А. Г. Рекса [7] (1985); А. Гайлітіса [72] (1969), [73] (1977); І. Д. Борисова [12] (1976), [66] (1983), [11] (2003), [65] (2010).

Процеси виникнення й росту просторових структур вільної поверхні розглядаються як прояви нестійкості початкового рівноважного стану магнітної рідини й переходу до нового стійкого стану. При цьому в якості початкового стану найчастіше обирають необмежені горизонтальні шари ферорідин в однорідному магнітнім полі. Найбільш розглянутою системою є необмежений у горизонтальному напрямку шар магнітної рідини, що контактує зверху з рідким або газоподібним немагнітним середовищем, а знизу обмежений твердою стінкою.

Перші дослідження стійкості вільної поверхні намагнічуваної рідини в стаціонарному вертикальному магнітному полі належать Р. Розенцвейгу [70] (1967). Він виявив, що однорідне стаціонарне магнітне поле, прикладене перпендикулярно до плаского шару магнітної рідини, викликає спонтанне виникнення на її поверхні впорядкованої структури з гострих піків (квітка Розенцвейга), коли величина поля перевищує критичне значення. Зі збільшенням магнітного поля горизонтальна вільна поверхня магнітної рідини, втрачаючи стійкість, змінюється впорядко-

ваною структурою конусоподібних піків з гексагональним розташуванням усередині кювети з рідиною.

Дослідженню нестійкості Розенцвейга присвячено велику кількість теоретичних і експериментальних робіт; бібліографію цих робіт і основні результати можна знайти, звернувшись до монографій Р. Розенцвейга [42] (1989); Е. Я. Блума, М. М. Майорова, А. О. Цеберса [8] (1989); С. Оденбаха та ін. [69] (2009). У роботах Б. Абу, Дж. Е. Вестфре, С. Ру [56] (2000); К. Гольвіцера, Г. Матіса, Р. Ріхтера [75] (2007); Х. Кнілінга та ін. [80] (2007); А. Ланге та ін. [83] (2007), [102] (2009); виконаних останнім часом, уточнено критичні значення індукції поля, з перевищенням яких на початково плоскій поверхні магнітної рідини утворюються просторові структури; визначено інкременти найбільш швидко зростаючих збурень; проведено порівняння теоретичних результатів з результатами експериментів і чисельного моделювання.

В сильному магнітному полі тонкі шари ферорідини можуть розпадатися на окремі краплі, розташовані у вузлах гексагональних решіток. Специфічні особливості розпаду тонких шарів магнітних рідин досліджувалися в роботах Ю. М. Диканського, А. Р. Закиняна, Л. С. Мкртчяна [19] (2010); К. А. Бушуєвої, К. Г. Костарева, А. В. Лебедева [16] (2011); В. М. Коровіна [22](2013).

Під нестійкістю Релея-Тейлора зазвичай розуміється нестійкість горизонтального шару важкої рідини, яка розташована над шаром більш легкої рідини або газу. Лінійна теорія нестійкості Релея-Тейлора для нев'язкої рідини була розвинена Г. Тейлором [103] (1950), а потім узагальнена на випадок в'язкої рідини з урахуванням поверхневого натягу в роботах Р. Беллмана [63] (1954), К. Мікаеляна [87] (1996) та ін. Вплив горизонтального магнітного поля на нестійкість Релея-Тейлора в магнітних рідин розглядався в працях В. М. Коровіна [23] (2014); Д. Раннакера, А. Енжела [101] (2007); А. Полманна, Р. Ріхтера, І. Реберга [97] (2013). Теоретично й експериментально була доведена можливість стабілізації поверхні розділу незмішуваних рідин (верхній шар – більш важка намагнічувана рідина) магнітним полем, яке обертається в горизонтальній площині. Інший спосіб стабілізації нестійкості Релея-Тейлора за рахунок механічних вібрацій досліджу-

вався в роботах Г. Вольфа [107] (1969); Д. В. Любимова, Т. П. Любимової, А. А.с Черепанова [28] (2003).

Впливу постійного магнітного поля на стійкість вільної поверхні магнітної рідини при вертикальних вібраціях контейнера присвячені роботи Г. В. Мюллера [88] (1998); В. В. Мехоношина, А. Ланге [86] (2002). Показано, що механізм параметричного збудження може призводити до затримки збудження нестійкості Розенцвейга у вертикальному магнітному полі, тобто до збільшення критичного значення нормального поля. Виявлено, що накладання горизонтального до вільної поверхні стаціонарного магнітного поля може підвищити поріг збудження нестійкості Фарадея.

Збудження нестійкості плоского шару ферорідини періодичним тангенціальним до вільної поверхні магнітним полем експериментально досліджувалось в роботах М. П. Перрі, Т. Б. Джонса [96] (1975); А. Цеберса, М. М. Майорова [68] (1985); Дж. К. Бакрі та ін. [59] (1994). Проаналізовано якісну зміну структури вільної поверхні в закритичному магнітному полі.

У випадку ідеальної ферорідини рівняння для амплітуди малих збурень вільної поверхні при параметричному впливі періодичних магнітних полів зводиться до звичайного диференціального рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами. У монографії Е. Я. Блума, М. М. Майорова, А. О. Цеберса [8] (1989); визначено критичні значення напруженості магнітного поля при виникненні параметричної нестійкості вільної поверхні рідини в однорідному магнітному полі, яке обертається у вертикальній площині, а також у тільки осцилюючому нормальному або тангенціальному до вільної поверхні магнітних полях. Проаналізовано послідовність збудження магнітної нестійкості Фарадея та нестійкості Розенцвейга у вертикально осцилюючому магнітному полі.

Дослідженню стійкості поверхні розділу ферорідин у вертикальному магнітному полі, яке складається з постійної й осцилюючої частин, присвячені роботи Т. Мара, І. Реберга [84] (1998); Р. Баджая, С. К. Маліка [60] (2002); М. Хененберга та ін. [76] (2009), [77] (2010). Зокрема експериментально встановлено, що накладання осцилюючої компоненти до стаціонарного вертикального магнітного поля

може призводити до прискорення збудження нестійкості Розенцвейга. Показано, що рівняння для амплітуди малих періодичних збурень вільної поверхні зводиться до рівняння Хілла, що узагальнює рівняння Мат'є для тільки осцилюючих магнітних полів. Двочастотне параметричне збудження поверхневих хвиль вертикальним магнітним полем розглянуто в роботі Р. Баджая [61] (2003). Однак було знехтувано квадратом амплітуди коливань поля, оскільки вона вважалась значно меншою стаціонарної складової поля.

Основні результати по параметричному збудженню поверхневих хвиль були отримані на основі рівнянь ізотропно намагнічуваних рідин.

1.2 Основні рівняння ферогідродинаміки і умови на поверхні розділу рідин

Намагнічуване середовище разом з електромагнітним полем становлять замкнену термодинамічну систему. Тому рівняння динаміки середовищ, що намагнічуються, мають вигляд законів збереження [89, 104]:

1. Закон збереження маси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (1.1)$$

2. Закон збереження імпульсу

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k - p_{ik}), \quad (1.2)$$

3. Закон збереження енергії

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \rho \frac{v^2}{2}) = - \operatorname{div} \vec{J}_e, \quad (1.3)$$

4. Рівняння балансу ентропії

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \sigma = - \operatorname{div} \vec{J}_s + \sigma_s. \quad (1.4)$$

Тут введені позначення: ρ – густина середовища, \vec{v} – швидкість середовища, $\{p_{ik}\}$ – симетричний тензор напружень Коші, u, s – масові щільності внутрішньої енергії

та ентропії; \vec{J}_e, \vec{J}_s – вектори щільності потоків енергії та ентропії, σ_s – внутрішнє виробництво ентропії.

Рівняння (1.1) – (1.4) доповнюються рівняннями квазістаціонарної електродинаміки непровідних середовищ:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}. \quad (1.5)$$

У рівняннях (1.5) нехтується струмами зміщення, що еквівалентно основному допущенню ферогідродинаміки про однаковість порядків характерних частот і розмірів зміни електромагнітних і гідродинамічних величин.

Приймаючи гіпотезу локальної рівноваги, конкретизуємо середовище заданням тотожності Гіббса у вигляді:

$$du = Tds - pd \frac{1}{\rho} + \frac{\vec{H}}{4\pi} d \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right). \quad (1.6)$$

Тут: T – температура, p – тиск, \vec{H}, \vec{E} – напруженості магнітного й електричного полів, \vec{B} – магнітна індукція, \vec{M} – намагніченість.

Слід зазначити, що рівність (1.6) виконується незалежно від того ізотропно чи анізотропно намагнічується середовище [27].

Використовуючи методи нерівноважної термодинаміки [18], одержимо такі вирази для невідомих потоків у рівняннях (1.1) – (1.4):

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \frac{H_i B_k}{4\pi} + \tau_{ik}, \quad (1.7)$$

$$J_{ek} = \rho v_k \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^*, \vec{H}]_k - \frac{(\vec{v}\vec{H})B_k}{4\pi} - v_i \tau_{ik} + q_k,$$

$$\vec{J}_s = \rho s \vec{v} + \frac{\vec{q}}{T},$$

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \left(\tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \vec{q} \nabla T \right).$$

Тут: $\{\tau_{ik}\}$ – тензор в'язких напружень, \vec{q} – вектор щільності потоку тепла, $\vec{E}^* = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{B}]$ – напруженість електричного поля у власній для макродиференціала суцільного середовища системі відліку.

Задовольняючи другому закону термодинаміки, тобто нерівності $\sigma_s \geq 0$, у наближенні лінійної теорії Онзагера, одержуємо матеріальні рівняння:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T, \tau_{ik} = 2\eta v_{ik} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)v_{ee}\delta_{ik}, \kappa \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0, \quad (1.8)$$

де κ, η, ζ – відповідно коефіцієнти теплопровідності середовища, зсувної і об'ємної в'язкостей.

Рівняння (1.1) – (1.5) повинні бути доповнені рівняннями термодинамічного стану. Для їх одержання введемо термодинамічний потенціал f :

$$f = u - Ts - \frac{\vec{B}\vec{H}}{4\pi\rho}. \quad (1.9)$$

Тоді з рівняння Гіббса (1.6) одержимо

$$df = -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho - \frac{\vec{B}d\vec{H}}{4\pi\rho}.$$

Звідси:

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\rho, \vec{H}}, p = \rho^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{T, \vec{H}}, \vec{B} = 4\pi\rho \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{H}}\right)_{\rho, T}.$$

Таким чином

$$s = s(\rho, T, \vec{H}), p = p(\rho, T, \vec{H}), \vec{B} = \vec{B}(\rho, T, \vec{H})$$

– найбільш загальний вид рівнянь термодинамічного стану. Остання рівність визначає закон намагнічування середовища.

Для ізотропно намагнічених середовищ, рівняння стану такі:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}; \mu = \mu(\rho, T, H); \quad (1.10)$$

$$f = f^0(\rho, T) - \frac{1}{4\pi} \int_0^H \mu(\rho, T, H) H dH;$$

$$p = p^0(\rho, T) + \psi; s = s^0(\rho, T) + s^{(m)};$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_0^H [\mu - \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_{T,H}] H dH; s^{(m)} = \frac{1}{4\pi \rho} \int_0^H \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{\rho,H} H dH;$$

$$u = u^0(\rho, T) + \frac{BH}{4\pi \rho} - \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - T \mu_T) H dH.$$

Тут μ - магнітна проникність середовища; індексом “0” угорі відзначені термодинамічні функції середовища при відсутності поля. Ці функції задовольняють рівнянню Гіббса у відсутності поля

$$du^0 = T ds^0 - p^0 d \frac{1}{\rho}$$

і вважаються відомими.

Рівняння (1.1) – (1.5), (1.7) – (1.10) становлять замкнену систему рівнянь динаміки середовищ із рівноважною намагніченістю й записуються у вигляді [89,104]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\nabla p + M \nabla H + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v}, \\ \rho T \frac{ds}{dt} &= \kappa \Delta T + \tau_{ik}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H}, \mu = \mu(\rho, T, H). \\ p &= p^0(\rho, T) + \psi; \quad s = s^0(\rho, T) + s^{(m)} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Замість рівняння зміни ентропії в цій системі рівнянь можна використовувати еквівалентне йому, у силу **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, рівняння зміни енергії у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u + \rho \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - \frac{(\vec{B} \vec{H})}{4\pi \rho} \right) + \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]_k - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} - v_i \tau_{ik} \right].$$

Наведений підхід отримання рівнянь середовищ з рівноважною ізотропною намагнічені викладений у роботах [74], [95].

Граничні умови. Нехай

$$F(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0$$

поверхня сильного розриву в намагнічуваній рідині. Визначимо нормаль \vec{n} до цієї поверхні, спрямовану в область $z > \zeta$:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)}{(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)^{1/2}}.$$

Значення довільного параметра a середовища на поверхні розриву з боку позитивного напрямку нормалі будемо позначати a_1 , а з негативної сторони a_2 , так що

$$\langle a \rangle = a_1 - a_2$$

– стрибок величини a на поверхні розриву.

Відповідні умови включають:

1. Електродинамічні умови, які полягають у неперервності нормальної складової індукції магнітного поля й дотичних складових напруженості магнітного поля:

$$\langle B_n \rangle = \langle \vec{B} \rangle \cdot \vec{n} = 0; \langle \vec{H}_\tau \rangle = \vec{n} \times \langle \vec{H} \rangle = 0; \langle \vec{E}^* \rangle = 0; \langle E_n^* \rangle = 0. \quad (1.12)$$

\vec{E}^* –напруженість електричного поля в системі відліку, зв'язаній з елементом поверхні розриву.

2. Динамічні умови, які впливають із балансової форми основних рівнянь в інтегральній формі [49]:

2.1. Умова неперервності потоку маси:

$$\langle \rho(v_n - D) \rangle|_\Sigma = 0,$$

2.2. Умова балансу напружень на поверхні розриву:

$$\langle \rho v_i(v_n - D) - p_{ik} n_k \rangle|_\Sigma = -\alpha n_i \text{div} \vec{n}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Тут α – коефіцієнт поверхневого натягу, який вважається постійним.

2.3. Гранична умова балансу енергії на поверхні Σ :

$$\left\langle \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) (v_n - D) - p_{ik} v_i n_k - \frac{c}{4\pi} (\vec{E}^* \times \vec{H}) \cdot \vec{n} - q_k n_k \right\rangle = \varepsilon_s,$$

де ε_s – віднесена до одиниці площі поверхні Σ потужність поверхневих джерел енергії.

Тут:

$$D = -\frac{\partial F / \partial t}{|\nabla F|} = \frac{\zeta_t}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}$$

– швидкість поширення поверхні розриву Σ

3. Кінематичні умови мають вигляд

$$v_n|_{\Sigma} = D, \quad \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (1.13)$$

і виражають умови рівності нормальних складових швидкостей часток рідини на поверхні Σ швидкостям точок цієї поверхні та неперервність швидкості у випадку в'язких рідин. Перша із цих умов записується у вигляді

$$v_z - v_x \zeta_x - v_y \zeta_y = \zeta_t.$$

З урахуванням кінематичних умов (1.13), динамічні умови здобувають вид

$$\langle p_{ik} n_k \rangle = \alpha n_i \operatorname{div} \vec{n}, \quad (1.14)$$

$$\left\langle p_{ik} v_i n_k - \frac{c}{4\pi} (\vec{E}^* \times \vec{H}) \cdot \vec{n} + q_k n_k \right\rangle = -\varepsilon_s.$$

В силу умов для електромагнітного поля

$$\langle (\vec{E}^* \times \vec{H}) \cdot \vec{n} \rangle = 0.$$

Тому

$$\varepsilon_s = \alpha D \operatorname{div} \vec{n},$$

так що ε_s – потужність сил поверхневого натягу. Поклавши ε_s рівним зазначеному виразу, ми повністю задовольнимо граничній умові на поверхні Σ , що впливає з рівняння енергії у випадку ідеальної рідини. Відзначимо, що $\varepsilon_s = 0$ у випадку малих коливань рідини.

Трансформуємо умову (1.14) для напружень. З урахуванням вираження для компонентів тензора напружень

$$p_{jk} = -\left(p_0 + \phi^{(\rho)} + \frac{H^2}{8\pi} \right) \delta_{jk} + \frac{H_j B_k}{4\pi} + 2\eta v_{jk},$$

отримуємо

$$-\langle p \rangle n_i + \frac{B_n \langle H_i \rangle}{4\pi} = \alpha n_i \operatorname{div} \vec{n}.$$

У проекції на дотичну площину звідси одержимо $\langle \vec{H}_\tau \rangle = 0$, що виконується в силу (1.12). У проекції на нормаль звідси випливає

$$-\langle p_0 + \psi^{(\rho)} \rangle + \frac{B_n}{4\pi} \langle H_n \rangle - \left\langle \frac{H^2}{8\pi} \right\rangle = \alpha \operatorname{div} \vec{n}.$$

Оскільки

$$\langle H_n \rangle = 4\pi \langle M_n \rangle,$$

то

$$-\left\langle \frac{H^2}{8\pi} \right\rangle + \frac{B_n}{4\pi} \langle H_n \rangle = -\frac{(H_{n1} - H_{n2})(M_{n1} + M_{n2})}{2} = -2\pi \langle M_n^2 \rangle.$$

Таким чином, отримуємо

$$\langle p_0 + \psi^{(\rho)} + 2\pi M_n^2 \rangle = -\alpha \operatorname{div} \vec{n}. \quad (1.15)$$

В розділі 3 використовується система рівнянь в системі фізичних одиниць СІ. Для випадку непровідної нестискуваної рідини вона має вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \mu_0 M \nabla H + \rho \vec{g}, \quad (1.16)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \kappa \Delta T + \tau_{ik},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

1.3 Висновки розділу

З огляду літератури можна зробити висновок про достатньо повне вивчення виникнення нестійкості Фарадея та нестійкості Релея-Тейлора вільної поверхні або поверхні розділу рідин. Однак для ферорідин додатковим параметром є взаємодія з зовнішнім магнітним полем. Вплив магнітного поля на стійкість шарів

ферорідин є достатньо складним, оскільки рух намагнічуваних рідин може призводити до викривлення поля. Саме цим пояснюється різноманітність просторових структур, які виникають поверхні ферорідин в закритичному магнітному полі. Окрім того, значний інтерес викликає спільний вплив гравітаційних, капілярних, інерційних та електромагнітних сил на стійкість шарів намагнічуваних рідин.

На відміну від наведених вище робіт, у яких параметричне збудження має одну природу (або інерційну, або магнітну), у даній роботі розглядаються випадки, коли механічні вібрації та складові магнітного поля представляються у вигляді синусоїдальних процесів, частоти яких знаходяться у простому кратному співвідношенні. Це дозволяє проаналізувати вплив відношень амплітуд і частот різних параметричних впливів на зміну структури областей нестійкості, які відповідають виникненню поверхневих хвиль. Також розглядаються випадки впливу зовнішнього магнітного поля, яке складається зі стаціонарної й осцилюючої компонент, при довільній орієнтації поля, що раніше не досліджувалось. Окрім того, оскільки в лінійному наближенні рух однорідної нелінійно намагнічваної рідини є адіабатичним (ізоентропійним) при рівному нулю коефіцієнту теплопровідності, а не ізотермічним, як у наведених вище роботах, ми досліджуємо вплив температурних змін на границю областей нестійкості.

У більшості теоретичних робіт досліджується нестійкість необмеженої поверхні шарів ферорідин. Однак в реальних експериментах обмеженість поверхні розділу є одним з основних факторів, що визначають процеси переходу до нового рівноважного стану при втраті стійкості. У даній роботі досліджується вплив цього фактору на прикладі соленоїда з круговим і прямокутним поперечним перерізом, а також систем незмішуваних ферорідин, розділених тонкою горизонтальною пластиною з отвором.

Відомі результати з акустики магнітних рідин зводяться до вивчення впливу магнітного поля на швидкість поширення й поглинання акустичних коливань. В дисертаційній роботі досліджується можливість нових механізмів збудження ультразвукових коливань у магнітних рідинах при втраті стійкості однорідних стаціонарних станів рідини в змінному магнітному полі.

РОЗДІЛ 2

ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬ НА НЕОБМЕЖЕНІЙ ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ ШАРУ ФЕРОМАГНІТНОЇ РІДИНИ У ЗМІННИХ МАГНІТНИХ І ВІБРАЦІЙНОМУ ПОЛЯХ

Розглядаються задачі параметричної стійкості вільної поверхні нелінійно намагнічуваної рідини й динамічної стабілізації поверхневої нестійкості за допомогою осцилюючих магнітних і вібраційного полів. Вважається, що рідина знаходиться в довільно орієнтованому до її вільної поверхні магнітному полі, яке складається з постійної й осцилюючої частин, а також під впливом механічних вібрацій. Досліджується структура областей нестійкості для вільної поверхні ферорідини, яка параметрично збуджується полігармонічним впливом.

2.1 Необмежений шар в'язкої капілярної нелінійно намагнічуваної рідини

2.1.1 Постановка задачі. Розглядається необмежений шар магнітної рідини, над якою зверху знаходиться немагнітне середовище меншої густини, наприклад повітря (див. Рис. 2.1), впливом якого на рух рідини надалі нехтуємо. Вважається, що нелінійно намагнічувана рідина перебуває в довільно орієнтованому до її горизонтальної поверхні однорідному нестационарному магнітному полі, а також під впливом модульованого гравітаційного прискорення \vec{G} .

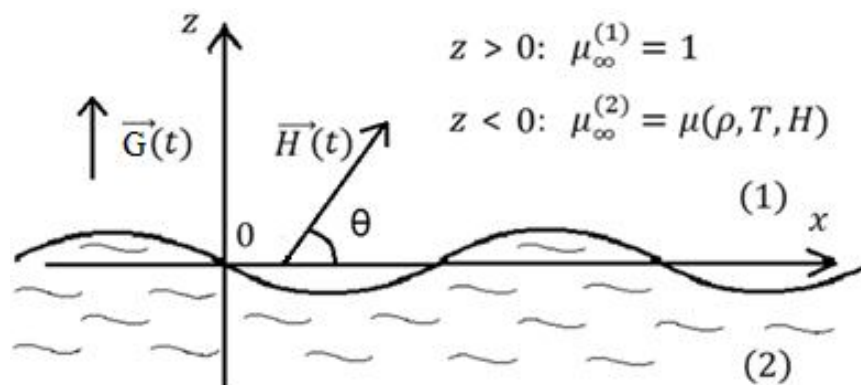


Рис. 2.1: Необмежений шар намагнічуваної рідини

$z = \zeta(x, y, t)$ – поверхня розділу двох напівнескінченних шарів, причому в стані відносної рівноваги $z = 0$ – рівняння рівноважної поверхні розділу. Ферорідина вважається в'язкою, неелектропровідною, нестисловою та однорідною.

У випадку нетеплопровідної рідини ($\kappa = 0$) й малих збурень ($v_{ik}v_{ik} \approx 0$) з рівняння зміни ентропії системи (1.11), отримуємо:

$$\frac{dS}{dt} = 0,$$

так що

$$S = S(\rho, T, H) = \text{const}$$

у кожній частинці рідини. Отже, рух рідини буде адіабатичним (ізоентропійним), якщо початковий стан ферорідина є однорідним.

Для областей, які займають повітря і в'язка нелінійно намагнічувана рідина система рівнянь (1.11) у випадку нетеплопровідної нестискуваної рідини у гравітаційному та магнітному полі, а також при вібраційному впливі приймає вигляд:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p_0 + \psi^{(\rho)}) + M\nabla H + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{G}, \quad (2.2)$$

$$S = S_0 + \frac{1}{\rho} \int_0^H \frac{\partial M}{\partial T} dH = \text{const}, \quad (2.3)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{H} = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{B} = \mu(\rho, T, H)\vec{H}, \quad \vec{M} = M(\rho, T, H)\frac{\vec{H}}{H}, \quad (2.5)$$

$$S_0 = c_v \ln T + \text{const}, \quad (2.6)$$

$$\psi^{(\rho)} = \int_0^H \left(M - \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} \right) dH, \quad (2.7)$$

де

$$\vec{G}(t) = (-g + \omega_g^2 a_g \cos(\omega_g t)) \vec{e}_z \quad (2.8)$$

– модульоване гравітаційне прискорення.

Граничні умови (1.12) – (1.14) в задачі про параметричну стійкість поверхні

розділу набувають вигляду:

$$v_n = D \quad \text{при} \quad z = \zeta, \quad (2.9)$$

$$\langle p_{jk} \tau_{1j} n_k \rangle = 0, \langle p_{jk} \tau_{2j} n_k \rangle = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta, \quad (2.10)$$

$$\langle p_0 + \phi^{(\rho)} + 2\pi M_n^2 \rangle = -\sigma \operatorname{div} \vec{n} \quad \text{при} \quad z = \zeta, \quad (2.11)$$

умови для електромагнітного поля:

$$\langle B_n \rangle = 0, \langle \vec{H}_\tau \rangle = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta, \quad (2.12)$$

граничні умови на нескінченності:

$$\vec{v}^{(i)} = 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

$$\vec{H}^{(i)} = \left(H_x, H_y, \frac{H_z}{\mu} \right) = \vec{H}_\infty^{(i)} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

де $\langle a \rangle = a^{(2)} - a^{(1)}$ – стрибок відповідних величин, $i = 1, 2$ – індекс середовища (1 – для повітря, 2 – для магнітної рідини).

Зовнішня нормаль і дотичні вектори до поверхні розділу мають вигляд:

$$\vec{n} = \frac{(-\zeta_x, -\zeta_y, 1)}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}, \quad \vec{\tau}_1 = \frac{(1, 0, \zeta_x)}{\sqrt{1 + \zeta_x^2}}, \quad \vec{\tau}_2 = \frac{(0, 1, \zeta_y)}{\sqrt{1 + \zeta_y^2}}.$$

Величини, що входять в (2.1) – (2.14) позначають: \vec{v} – швидкість середовища, ρ – густина, p_0 – механічний тиск, $\psi^{(\rho)}$ – магнітострикційний тиск, M – намагніченість середовища, μ – магнітна проникність, \vec{H} – напруженість магнітного поля, η – динамічна в'язкість, S – масова щільність ентропії, c_v – теплоємність, T – температура середовища, σ – коефіцієнт поверхневого натягу. По повторюваних індексах проводиться підсумовування в межах їх зміни.

2.1.2 Постановка задачі в термінах потенціалу напруженості магнітного поля. Інтеграл адіабатичності (2.3) дозволяє визначити температуру, як функцію напруженості магнітного поля:

$$T^{(i)} = T^{(i)}(\rho, H^{(i)}), \quad i = 1, 2.$$

Тому намагніченість у кожній з областей є функцією напруженості поля:

$$M = M(\rho, T(\rho, H), H) = \widetilde{M}(H).$$

Таким чином, пондеромоторна сила потенційна:

$$M \nabla H = \nabla \int_0^H \widetilde{M}(H) dH.$$

У розглянутому випадку, при наявності інтеграла адіабатичності руху, задача зводиться до дослідження руху рідини зі спеціальним рівнянням магнітного стану, у якому намагніченість може розглядатися тільки функцією густини середовища й напруженості магнітного поля.

В силу рівняння $\text{rot} \vec{H} = 0$, напруженість магнітного поля може бути представлена у вигляді:

$$\vec{H} = \nabla \Phi,$$

де Φ – потенціал напруженості магнітного поля. Тоді з рівняння $\text{div} \vec{B} = 0$ отримуємо:

$$\Delta \Phi = -4\pi \text{div} \left(\frac{M(\rho, T(|\nabla \Phi|), |\nabla \Phi|)}{|\nabla \Phi|} \nabla \Phi \right).$$

Граничні умови (2.12), (2.14) для електромагнітного поля приймуть вид:

при $z = \zeta(x, y, t)$:

$$\langle \mu \Phi_z \rangle = \zeta_x \langle \mu \Phi_x \rangle + \zeta_y \langle \mu \Phi_y \rangle \quad (2.15)$$

$$\langle \Phi_x \rangle + \zeta_x \langle \Phi_z \rangle = 0 \quad (2.16)$$

$$\langle \Phi_y \rangle + \zeta_y \langle \Phi_z \rangle = 0 \quad (2.17)$$

при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\nabla \Phi^{(i)} = \vec{H}_\infty^{(i)} \quad i=1,2 \quad (2.18)$$

2.1.3 Постановка задачі в термінах функції струму. Розглянемо плоский випадок:

$$v_x = v_x(x, z, t), \quad v_z = v_z(x, z, t).$$

Введемо функцію струму $\psi = \psi(x, z, t)$:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Тоді система рівнянь і граничних умов прийме вигляд:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Delta \psi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}\right) \Delta \psi = 0, \quad (2.19)$$

$$\Delta \Phi = -4\pi \operatorname{div} \left(\frac{M(\rho, T(|\nabla \Phi|), |\nabla \Phi|)}{|\nabla \Phi|} \nabla \Phi \right), \quad (2.20)$$

при $z = \zeta(x, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \zeta = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.21)$$

$$\langle p_0 + \psi^{(\rho)} + 2\pi M_n^2 \rangle = -\sigma \operatorname{div} \vec{n}, \quad (2.22)$$

$$\langle \mu \Phi_z \rangle = \zeta_x \langle \mu \Phi_x \rangle, \quad (2.23)$$

$$\langle \Phi_x \rangle + \zeta_x \langle \Phi_z \rangle = 0, \quad (2.24)$$

при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \Phi = \vec{H}_\infty, \quad (2.26)$$

де ν – кінематична в'язкість.

2.1.4 Лінеаризована постановка задачі. Однорідний рівноважний нестационарний стан визначається розв'язком:

$$\vec{v}_0 = 0, \quad \zeta_0 = 0, \quad \nabla \Phi_0^{(j)} = \vec{H}_\infty^{(j)}(t), \quad j = 1, 2.$$

$$H_{0x} = H_{\infty x}, \quad H_{0y} = H_{\infty y}, \quad \mu H_{0z} = H_{\infty z},$$

Позначимо $\vec{H}' = \nabla \Phi' = \nabla \Phi - \vec{H}_\infty$ – збурення магнітного поля. Для дослідження стійкості горизонтальної поверхні $z = 0$ лінеаризуємо сформульовану задачу, припускаючи що

$$\frac{k}{2\pi} |\zeta|, |\zeta_x|, \frac{|\vec{H}'|}{|\vec{H}_\infty|} \sim \varepsilon \ll 1,$$

де $\frac{2\pi}{k}$ – довжини хвиль, що виникають на вільній поверхні при втраті стійкості.

У випадку загального закону намагнічування (2.5) для збурення намагніченості однорідної нестисливої рідини отримуємо:

$$\vec{M}' = \left(\frac{M}{H} \vec{H} \right)' = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial M}{\partial H} + \frac{\partial M}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial H} - \frac{M}{H} \right) \vec{H} (\vec{H} \vec{H}') + \frac{M}{H} \vec{H}',$$

де коефіцієнти при збуреннях напруженості магнітного поля обчислюються в рівноважному стані, обумовленому значеннями параметрів при $|z| \rightarrow \infty$. З умови адіабатичності руху (2.3), враховуючи, що для нестисливої рідини виконується (2.6), одержуємо:

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -\frac{T}{c_v \rho} \frac{\partial M}{\partial T}.$$

Тому

$$\vec{M}' = \frac{1}{H^2} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_\infty - \frac{T}{c_v \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\infty^2 - \left(\frac{M}{H} \right)_\infty \right] (\vec{H}_\infty \vec{H}') \vec{H}_\infty + \frac{M_\infty}{H_\infty} \vec{H}'.$$

На вільній поверхні має місце умова відсутності дотичних напружень (у лінійному наближенні граничні умови знесені на незбурену поверхню):

$$p_{xz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Отже, отримуємо рівняння:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Нормальна компонента тензора напружень задовольняє формулі Лапласа. Нехтуючи величинами другого порядку малості можемо записати:

$$p_{zz} = \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Підставляючи значення компонентів тензора напруження, на вільній поверхні знаходимо:

$$p_0 = -\frac{H^2}{8\pi} - \phi^{(\rho)} + \frac{H_z B_z}{4\pi} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (2.27)$$

Застосовуючи операцію $\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}$ до рівняння руху (2.2), отримуємо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (p_0 + \phi^{(\rho)} - \rho G \zeta) = \left(\eta \Delta - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}.$$

Виключивши звідси тиск p_0 за допомогою (2.27), одержимо додаткову граничну умову на вільній поверхні.

Таким чином, лінеаризована задача для функції струму ψ й потенціалу напруженості поля Φ записується у вигляді:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)\Delta\psi = 0 \quad \text{при } z < 0, \quad (2.28)$$

$$\Delta\Phi^{(1)} = 0 \quad \text{при } z > 0, \quad (2.29)$$

$$\Delta\Phi = -c_\infty \vec{H}_\infty \nabla(\vec{H}_\infty \nabla\Phi) \quad \text{при } z < 0, \quad (2.30)$$

при $z = 0$:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \left(\eta\Delta - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = & -\sigma \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - 2\eta \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial z} - \rho G \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \\ & - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{(\mu-1)^2}{\mu} H_{0z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - H_{0x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{(\mu-1)(\mu + c_\infty H_{0z}^2)}{\mu} \vec{H}_0 \nabla \Phi \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\mu\Phi_z - \Phi_z^{(1)} + c_\infty H_{0z} (\vec{H}_0 \nabla\Phi) = (\vec{H}_0 \nabla\zeta)(\mu-1), \quad (2.33)$$

$$\Phi_x - \Phi_x^{(1)} + H_{0z} \zeta_x \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.35)$$

при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.36)$$

$$\nabla\Phi^{(1)} = 0, \quad \nabla\Phi = 0, \quad (2.37)$$

Тут введені позначення: $\Phi \equiv \Phi^{(2)}$,

$$c_\infty = \frac{4\pi}{\mu_\infty H_\infty^2} \left(\frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_\nu \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 - \frac{M}{H} \right)_\infty.$$

Сформульована задача дозволяє дослідити питання параметричної нестійкості вільної поверхні магнітної рідини для випадку нелінійної залежності намагніченості

від напруженості поля й температури та довільній орієнтації магнітного поля відносно горизонтальної поверхні рідини.

2.1.5 Метод розв'язку. Розв'язок задачі (2.28)–(2.37) відшукуємо у вигляді:

$$\psi(t, x, z) = \psi^0(t, z)e^{ikx}, \quad (2.38)$$

$$\zeta(t, x) = \zeta^0(t)e^{ikx}, \quad (2.39)$$

$$\Phi^{(1)} = c^{(1)}(t)\phi^{(1)}(z)e^{ikx}, \quad (2.40)$$

$$\Phi = c(t)\phi(z)e^{ikx}. \quad (2.41)$$

Розв'язуючи рівняння для потенціалу напруженості магнітного поля (2.29) – (2.30), отримуємо:

$$\Phi^{(1)} = c^{(1)}(t)e^{ikx-kz}, \quad (2.42)$$

$$\Phi = c(t)e^{ikx+\lambda z}, \quad (2.43)$$

де

$$\lambda = k \frac{-ic_\infty H_{0z} H_{0x} + \mu \sqrt{1 + c_\infty H_0^2}}{\mu \left(1 + c_\infty \frac{H_{0z}^2}{\mu} \right)}. \quad (2.44)$$

Відзначимо, що у випадку $\mu = const$: $\lambda = k$.

Використовуючи граничні умови для потенціалу напруженості магнітного поля (33), (34), знаходимо:

$$c(t) - c^{(1)}(t) = \frac{\mu - 1}{\mu} H_{0z} \zeta^0(t), \quad (2.45)$$

$$c(t) = \frac{\zeta^0(t)(\mu - 1) \left[iH_{0x}k + \frac{kH_{0z}}{\mu} \right]}{\lambda\mu + k + c_\infty H_{0z} \left[iH_{0x}k + \frac{\lambda H_{0z}}{\mu} \right]}. \quad (2.46)$$

Тоді гранична умова (2.32) буде мати вигляд:

$$\left(-\rho \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3\eta k^2 \right) i \frac{\partial \psi^0}{\partial z} = \rho G k \zeta^0 - \sigma k^3 \zeta^0 + F_M, \quad (2.47)$$

де

$$F_M = \frac{k}{4\pi} \left[\frac{(\mu-1)^2}{\mu} H_{0z} (\lambda c(t) - i\zeta^0 H_{0x} k) + c(t) \frac{(\mu-1)(\mu + c_\infty H_{0z}^2)}{\mu} \left(iH_{0x} k + \frac{\lambda H_{0z}}{\mu} \right) \right]. \quad (2.48)$$

Підставляючи вирази (2.44) – (2.46) в (2.48), одержимо:

$$F_M = \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\mu} \left(\frac{H_{0z}^2 \sqrt{1 + c_\infty H_0^2} - H_{0x}^2 \mu}{1 + \mu \sqrt{1 + c_\infty H_0^2}} \right). \quad (2.49)$$

Отже, умова (2.47) перетвориться до виду:

$$\left(-\rho \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 3\eta k^2 \right) i \frac{\partial \psi^0}{\partial z} = \rho G k \zeta^0 - \sigma k^3 \zeta^0 + \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\mu} \left(\frac{H_{0z}^2 \sqrt{1 + c_\infty H_0^2} - H_{0x}^2 \mu}{1 + \mu \sqrt{1 + c_\infty H_0^2}} \right). \quad (2.50)$$

З врахуванням (2.38), задача (2.28), (2.31), (2.35), (2.36) для функції струму прийме вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right] \psi^0 = 0, \quad (2.51)$$

$$\eta \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi^0 = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \zeta^0}{\partial t} = -ik\psi^0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2.53)$$

$$ik\psi^0 = 0, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (2.54)$$

Функції $H_{0x}(t), H_{0z}(t), G(t)$ вважаються періодичними із загальним періодом $\frac{2\pi}{\omega}$.

Розв'язок задачі (2.51)-(2.54) відшукуємо, використовуючи теорію Флоке:

$$\zeta^0(t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{in\omega t} \quad (2.55)$$

$$\psi^0(z, t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^0(z) e^{in\omega t}, \quad (2.56)$$

де $\gamma = s + i\alpha$ – показник Флоке.

Тоді з рівняння (2.51) отримуємо:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - q_n^2 \right) \psi_n^0 = 0, \quad (2.57)$$

де

$$q_n^2 = k^2 - \frac{s + i(\alpha + n\omega)}{\nu}.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.57) має вигляд:

$$\psi_n^0(z) = a_n e^{kz} + b_n e^{-kz} + c_n e^{q_n z} + d_n e^{-q_n z}. \quad (2.58)$$

Невідомі коефіцієнти визначаються із граничних умов (2.52) – (2.54):

$$b_n = 0, \quad d_n = 0,$$

$$a_n = \frac{i\nu}{k} (q_n^2 + k^2) \zeta_n^0,$$

$$c_n = -2ik\nu \zeta_n^0.$$

Остаточно для функції струму одержуємо:

$$\psi_n^0(z) = i\nu \left(\frac{q_n^2 + k^2}{k} \zeta_n^0 e^{kz} - 2k \zeta_n^0 e^{q_n z} \right). \quad (2.59)$$

Підставляючи вирази (2.55), (2.56), (2.59) в (2.50), отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 \left[-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2 \right] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \left(-\frac{\sigma k^3}{\rho} + G(t)k + \right. \\ & \left. + \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu} \frac{H_{0z}(t)^2 \sqrt{1+c_{1\infty}} - H_{0x}(t)^2 \mu}{1 + \mu\sqrt{1+c_{1\infty}}} \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

де

$$c_{1\infty} = \frac{4\pi}{\mu_\infty} \left(\frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_\nu \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 - \frac{M}{H} \right)_\infty.$$

Далі розглянемо окремі випадки зовнішніх періодичних впливів. При заданні конкретних функціональних залежностей $H_{0z}(t)$ і $H_{0x}(t)$, з (2.60) впливають рекурентні співвідношення відносно ζ_n^0 для розрахунку нейтральних кривих стійкості. Спочатку розглянемо випадок $\mu = const$. У всіх розрахунках використовувались типові значення параметрів рідини:

$$\nu = 0.1(\text{П}), \mu = 5, \sigma = 30\left(\frac{\text{ерг}}{\text{см}^2}\right), \rho = 1\left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right).$$

2.1.6 Випадок стаціонарного вертикального й осцилюючого горизонтального магнітних полів. Розглянемо випадок, коли зовнішнє магнітне поле складається з постійної вертикальної й осцилюючої горизонтальної частин, а гравітаційна модуляція відсутня:

$$G = -g, \quad H_{0z} = const, \quad H_{0x} = m_x \cos(\omega t). \quad (2.61)$$

Підставляючи вирази (2.61) в (2.60), одержуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 \left[-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2 \right] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \left(-\frac{\sigma k^3}{\rho} - gk + \right. \\ & \left. + \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho(\mu+1)} \left[\frac{H_{0z}^2}{\mu} - \frac{m_x^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Відзначимо, що для випадку $\mu = const : c_{1\infty} = 0$. Використовуючи рівність

$$m_x \cos \omega t = \frac{m_x}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

і перепозначаючи індекси підсумовування в (2.62) так, щоб показники експонент у рядах були однаковими, одержимо рекурентні співвідношення для коефіцієнтів ζ_n^0 ряду (2.55):

$$A_n \zeta_n^0 = m_x^2 \left(\zeta_n^0 + \frac{\zeta_{n-2}^0 + \zeta_{n+2}^0}{2} \right), \quad (2.63)$$

де

$$A_n = - \left(v^2 \left[-4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{8\pi\rho(\mu+1)}{(\mu-1)^2} + \frac{2H_{0z}^2}{\mu}.$$

Співвідношення (2.63) запишемо в матричному виді:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & A_{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & A_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \zeta_{-2}^0 \\ \zeta_{-1}^0 \\ \zeta_0^0 \\ \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix} = m_x^2 \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \zeta_{-2}^0 \\ \zeta_{-1}^0 \\ \zeta_0^0 \\ \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

або в символному вигляді:

$$A\zeta^0 = m_x^2 B\zeta^0,$$

де A – діагональна матриця з комплексними коефіцієнтами, B – матриця з трьома ненульовими діагоналями. обернувши матрицю A , отримаємо задачу на власні значення:

$$(A^{-1}B)\zeta^0 = \frac{1}{m_x^2}\zeta^0$$

Критерієм стійкості служить значення показника Флоке $\gamma = s + i\alpha$. При $s > 0$ ($s < 0$), розв'язок (2.55) буде зростати (убувати) із часом, що відповідає нестійкості (стійкості). Для побудови нейтральних кривих стійкості в площині (k, m_x) необхідно покласти $s = 0$, а також задати значення $\alpha = 0$ або $\alpha = 1/2$, що відповідає випадкам гармонічних і субгармонічних коливань. Матриці A й B обрізуються до розмірів, що забезпечують необхідну точність обчислень. Із власних значень обирається найбільше або декілька найбільших дійсних додатних власних значень $\frac{1}{m_x^2}$, що відповідають мінімальній амплітуді m_x . Описаний метод є до-

силь загальним і може бути використаний для побудови перехідних кривих стійкості у випадку довільного періодичного збудження [81, 82].

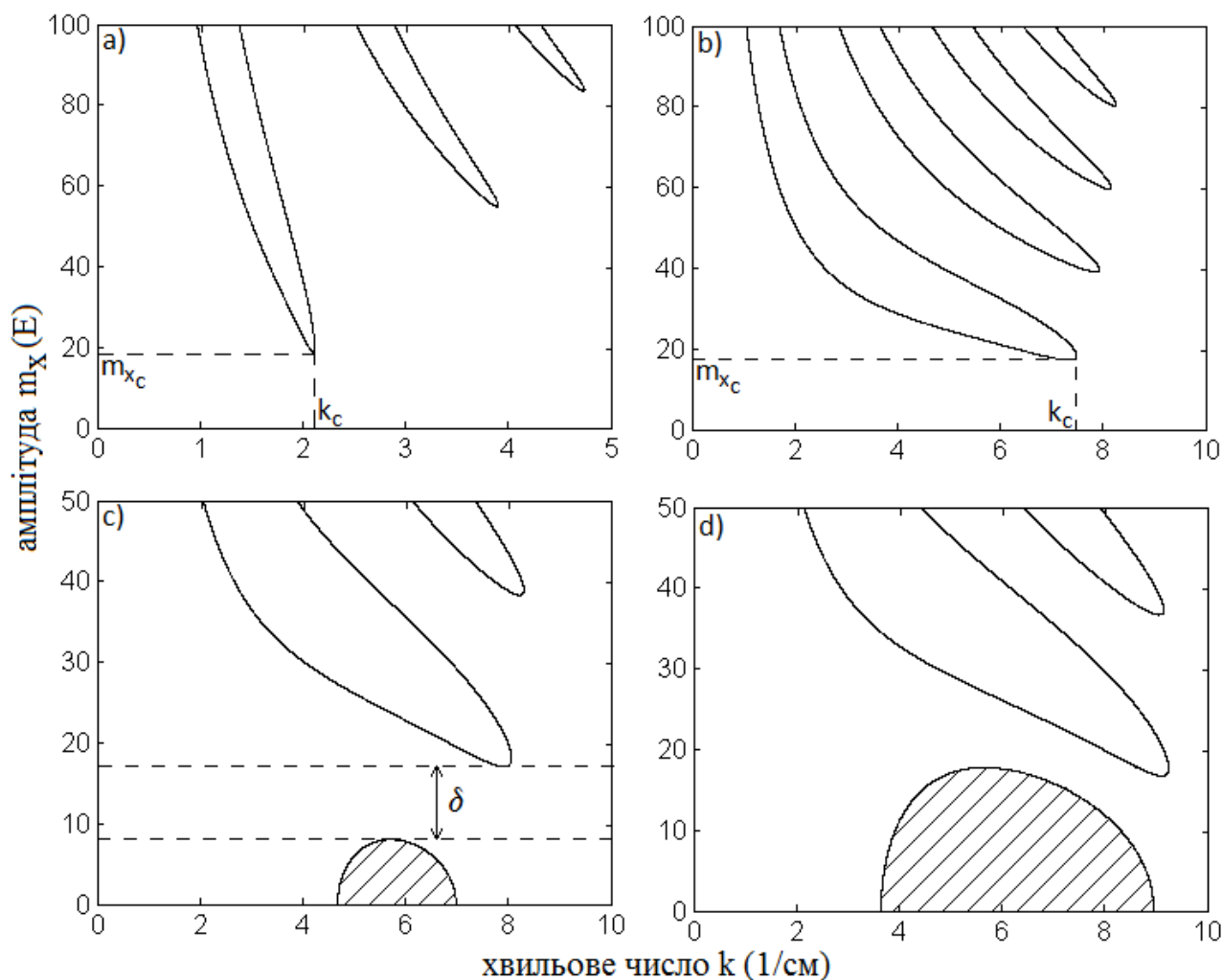


Рис. 2.2: Нейтральні криві стійкості $m_x(k)$ для різних величин

H_{0z} : a) $H_{0z} = 0$ b) $H_{0z} = 0.99H_R$, c) $H_{0z} = 1.01H_R$, d) $H_{0z} = 1.05H_R$ при частоті осцилюючого поля $\omega = 50(\text{Гц})$

Границі областей нестійкості для магнітного поля, яке складається з постійної вертикальної й осцилюючої горизонтальної частин, представлені на рис. 2.2.

На рис. 2.2.a) показані області параметричної нестійкості вільної поверхні ферорідини тільки в осцилюючому тангенціальному магнітному полі. Перехідні криві утворюють області ("язики"), значення параметрів усередині (поза) цих областей відповідають нестійкості (стійкості) вільної поверхні. Абсолютному мінімуму на нейтральних кривих відповідає критичне хвильове число k_c й критичне

значення амплітуди осцилюючого магнітного поля m_{xc} , при яких виникнення нестійкості і збуджуються поверхневі хвилі.

У результаті розрахунків виявлено, що для нобмеєженого шару рідини накладання вертикального стаціонарного магнітного поля, меншого критичного поля Розенцвейга, приводить до збільшення критичного хвильового числа k_c (див. рис. 2.2.b). Напруженість стаціонарного магнітного поля H_{0z} на рис. 2.2.b) менша критичного поля Розенцвейга H_R усього на 1%:

$$H_R^2 = \frac{8\pi\sqrt{\sigma\rho g}\mu(\mu+1)}{(\mu-1)^2}$$

Таким чином, додавання стаціонарного вертикального магнітного поля $H_{0z} < H_R$ до тільки осцилюючого горизонтального призводить до виникнення більш дрібномасштабних структур на вільній поверхні при втраті стійкості. При подальшому збільшенні напруженості вертикального магнітного поля починає розвиватися нестійкість Розенцвейга, що на рис. 2.2.c) і рис. 2.2.d) відображається виникненням додаткової (заштрихованої) області нестійкості. При цьому з рис. 2.2.c) видно, що для певного проміжку δ значень амплітуди параметричного збудження m_x всі хвильові числа k попадають в область стійкості. Таким чином, накладанням дотичного до вільної поверхні осцилюючого магнітного поля, заданої амплітуди й частоти, можна відсунути поріг збудження нестійкості Розенцвейга. Однак з рис. 2.2.d) видно, що така можливість існує, якщо напруженість вертикального магнітного не суттєво перевищує критичне поле Розенцвейга.

2.1.7 Випадок вертикального магнітного поля, яке складається з постійної й осцилюючої частин. Нехай параметричний вплив має вигляд:

$$G = -g, H_{0z} = H_{00z} + m_z \cos \omega t, H_{0x} = 0 \quad (2.64)$$

Розглянутий випадок, при вертикальній орієнтації магнітного поля відносно вільної поверхні рідини, цікавий тим, що окрім нестійкості щодо параметричних коливань, може спостерігатися виникнення нестійкості Розенцвейга з утворенням гостропікової форми вільної поверхні, навіть при відсутності стаціонарного поля

Рівняння (2.66) є рівнянням для квадратичного пучка матриць. Надалі зручно перейти до лінійної алгебраїчної задачі. Введенням вектор-стовпця $\xi^0 := m_z \zeta^0$, задача (2.66) зводиться до задачі на власні значення для матриці с збільшеним удвічі розміром:

$$\begin{pmatrix} -A^{-1}B & A^{-1}C \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix} = m_z \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

де I – одинична матриця, такого ж розміру як A , B і C .

На відміну від попереднього випадку власним значенням задачі (2.67) є амплітуда параметричного впливу m_z . Для побудови границь областей нестійкості на площині зміни параметрів (k, m_z) , необхідно знаходити найменше або кілька найменших додатних дійсних власних значень m_z задачі (2.67).

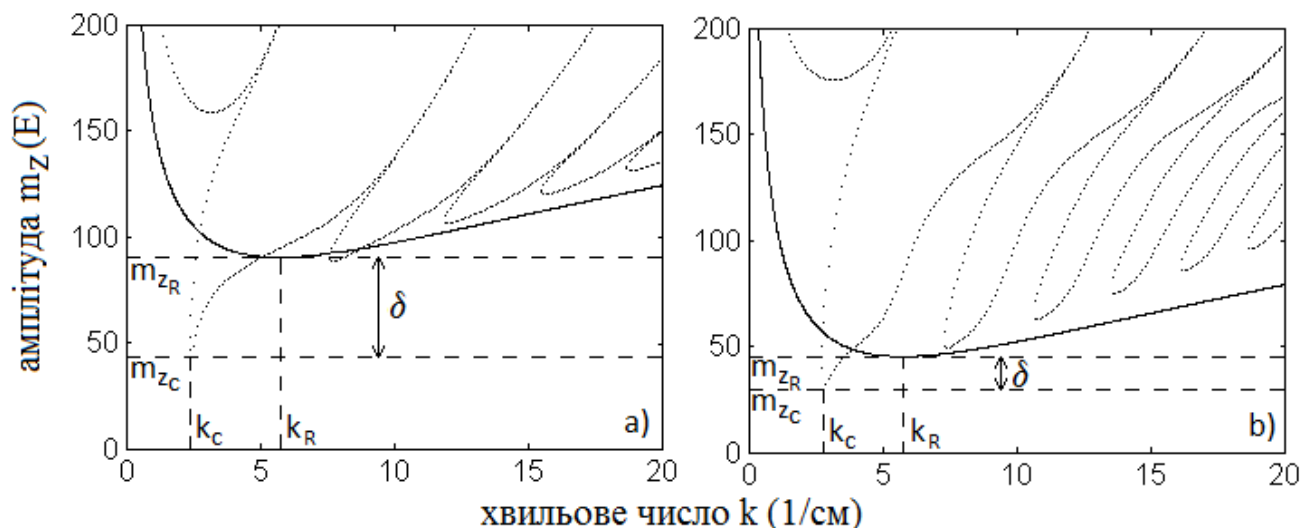


Рис. 2.3: Перехідні криві стійкості $m_z(k)$ для значень *a)* $H_{00z} = 0$, *b)* $H_{00z} = 0.5H_R$ при частоті осциляцій поля: $\omega \rightarrow 0$ (суцільні криві), $\omega = 50$ (Гц) (крапкові криві)

Області нестійкості вільної поверхні ферорідини тільки в осцилюючому вертикальному магнітному полі представлені на рис. 2.3.а). У низькочастотному наближенні (при $\omega \rightarrow 0$) критична амплітуда параметричного впливу наближається до критичного поля Розенцвейга ($m_{zC} \rightarrow H_R$), при цьому найнебезпечнішими є

збурення з довжиною хвильового вектора $k_R = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}$.

При високочастотному збудженні існує діапазон δ значень амплітуди змінного поля m_z , у якому утворюється тільки характерна для параметричних коливань хвиляста структура вільної поверхні. При подальшому збільшенні амплітуди змінного поля настає нестійкість Розенцвейга і формуються конусоподібні структури набагато більшої амплітуди. Відзначимо, що така послідовність розвитку нестійкостей у чисто осцилюючому вертикальному магнітному полі обговорювалася в монографії [8].

Додавання стаціонарної компоненти до тільки осцилюючого вертикального магнітного поля призводить як до зменшення критичної амплітуди m_{z_c} , необхідної для збудження параметричної нестійкості, так і до зменшення критичної амплітуди m_{z_R} виникнення нестійкості Розенцвейга у змінному полі (див. рис. 2.3.b). З іншого боку, за рахунок накладання осцилюючої добавки до постійного значення напруженості вертикального магнітного поля можна наблизити виникнення нестійкості Розенцвейга, що було експериментально підтверджено в роботі [84].

2.1.8 Випадок осцилюючого вертикального й стаціонарного горизонтального магнітних полів. У цьому випадку параметричний вплив має вигляд:

$$G = -g, H_{0z} = H_{00z} + m_z \cos \omega t, H_{0x} = 0. \quad (2.68)$$

Аналогічно попереднім випадкам, з (2.60) з використанням (2.68), отримуємо:

$$A_n \zeta_n^0 = m_z^2 \left(\zeta_n^0 + \frac{\zeta_{n-2}^0 + \zeta_{n+2}^0}{2} \right), \quad (2.69)$$

де

$$A_n = \left(v^2 \left[-4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{8\pi\mu(\mu+1)}{(\mu-1)^2} + 2\mu H_{0x}^2$$

Рекурентне співвідношення (2.69) запишемо в матричному виді:

$$(A^{-1}B)\zeta^0 = \frac{1}{m_z^2}\zeta^0, \quad (2.70)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & A_{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & A_{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Границя областей нестійкості на площині параметрів (k, m_z) будується, аналогічно раніше розглянутим випадкам, у результаті визначення власних значень задачі (2.70).

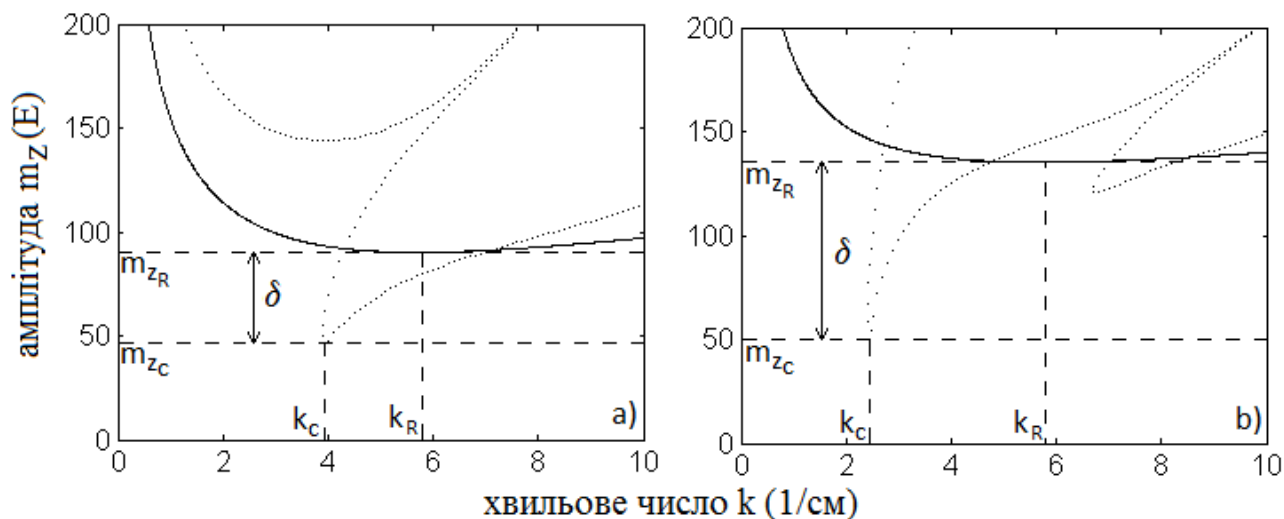


Рис. 3.4: Нейтральні криві стійкості $m_z(k)$ для значень *a*) $H_{0x} = 0$, *b*) $H_{0x} = 0.5H_R$ при частоті осциляцій поля: $\omega \rightarrow 0$ (суцільні криві), $\omega = 70$ (Гц) (крапкові криві)

У результаті розрахунків встановлено, що для необмеженого шару рідини додавання тангенціального до вільної поверхні стаціонарного магнітного поля до тільки осцилюючого вертикального, призводить до зменшення критичного хвильового числа k_c (див. рис. 2.4.a) і рис. 2.4.b), тобто до виникнення більш великомасштабних структур на вільній поверхні при втраті стійкості. Крім того, стаціонарна компонента дотичного до вільної поверхні магнітного поля відсуває поріг збудження нестійкості Роценцвейга в змінному магнітному полі, тобто призводить до збільшення критичного значення амплітуди нормального поля m_{zR} .

2.1.9 Випадок осцилюючих вертикального й горизонтального магнітних полів. Розглянемо параметричний вплив виду:

$$G = -g, \quad H_{0z} = m_z \cos n_z \omega t, \quad H_{0x} = m_x \cos n_x \omega t, \quad (2.71)$$

де n_z, n_x – натуральні числа. Аналогічно попереднім випадкам, з (2.60) з використанням (2.71), одержуємо рекурентне співвідношення:

$$A_n \zeta_n^0 = m_z^2 \left(\frac{\zeta_n^0}{\mu} + \frac{\zeta_{n-2n_z}^0 + \zeta_{n+2n_z}^0}{2\mu} \right) - m_x^2 \left(\zeta_n^0 + \frac{\zeta_{n-2n_x}^0 + \zeta_{n+2n_x}^0}{2} \right), \quad (2.72)$$

де

$$A_n = \left(v^2 \left[-4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} \right] + \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \frac{8\pi\rho(\mu+1)}{(\mu-1)^2}$$

Зафіксувавши одну з амплітуд m_z або m_x , з рекурентного співвідношення (2.72), отримаємо задачу на власні значення, розв'язок якої дозволить побудувати нейтральні криві стійкості на площині (k, m_x) або (k, m_z) відповідно. Залежно від значень n_z і n_x буде змінюватися структура матриць спектральної задачі. Як видно зі співвідношення (2.72), номери піддіагоналей матриць будуть відповідати значенням $-2n_z, 2n_z, -2n_x, 2n_x$.

Критичні значення напруженості магнітного поля при виникненні параметричної нестійкості вільної поверхні рідини в тільки осцилюючих дотичних або нормальних до вільної поверхні магнітних полях визначені в [8]:

$$m_{xc} = \frac{64\pi\eta n_x \omega (\mu+1)}{(\mu-1)^2} \quad m_{zc} = \frac{64\pi\eta n_z \omega (\mu+1)}{(\mu-1)^2}$$

Границі областей нестійкості у випадку магнітного поля, яке складається з тільки осцилюючої вертикальної й горизонтальної частин, представлені на рис. 2.5. При однакових частотах параметричного впливу за рахунок осцилюючого вертикального поля, амплітуда якого m_z не перевищує критичну m_{zc} , можна відсутності поріг настання параметричної нестійкості в тангенціальному магнітному полі (див. рис. 2.5.а), найнебезпечніше хвильове число при цьому практично не

змінюється. Якщо ж частота вертикального поля вдвічі більше частоти горизонтального, то при заданих параметрах (див. рис. 2.5.b)) може з'явитися бікритична ситуація, коли одній критичній амплітуді m_{xc} відповідають два різні хвильові числа k_{csg} (субгармонічне) і k_{cg} (гармонічне). Таким чином, може відбуватися перехід від субгармонічних до гармонічних коливань системи.

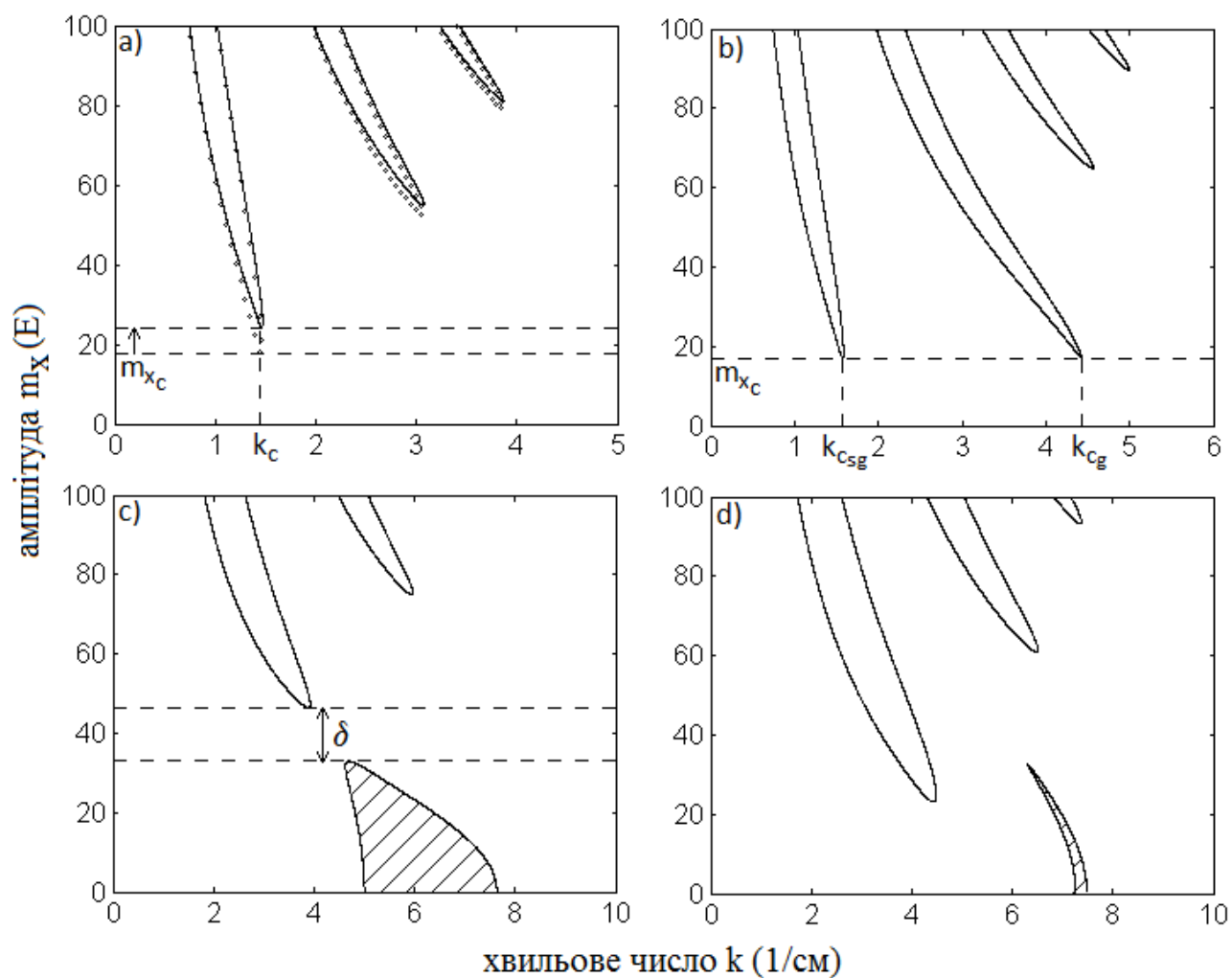


Рис. 2.5: Перехідні криві стійкості $m_x(k)$ для значень параметрів системи:

a) $n_x = 1, n_z = 1, m_z = 0$ (кружечки), $m_z = 0.97m_{zc}$ (суцільні криві); b) $n_x = 1, n_z = 2,$

$m_z = 0.93m_{zc}$; c) $n_x = 2, n_z = 2, m_z = H_R$; d) $n_x = 2, n_z = 3, m_z = 0.7H_R$;

при частоті $\omega = 40$ (Гц)

Результати розрахунків показали, що якщо амплітуда вертикального поля перевищує критичну (як m_{zc} такі m_{zR}), виникають додаткові (заштриховані) обла-

сті нестійкості (див. рис. 2.5.c) і рис.2.5.d)). При цьому для однакових частот параметричного впливу осцилюючим дотичним магнітним полем можна відсунути поріг настання нестійкості у вертикальному полі, тоді як при різних частотах це не завжди вдається (див. рис. 2.5.c) і рис.2.5.d)).

2.1.10. Випадок осцилюючого горизонтального магнітного поля при наявності механічних вібрацій. Нехай параметричний вплив має вигляд:

$$G = -g + a_g \cos(n_g \omega t), \quad H_{0z} = 0, \quad H_{0x} = m_x \cos(n_x \omega t), \quad (2.73)$$

де n_g, n_x – натуральні числа. Підставляючи вирази (2.73) в (2.60), одержуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} v^2 \left[-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2 \right] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho(\mu+1)} \frac{m_x^2}{2} [1 + \cos(2n_x \omega t)] + \right. \\ & \left. + k a_g \cos(n_g \omega t) - \frac{\sigma k^3}{\rho} - gk \right) \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \end{aligned} \quad (2.74)$$

З (2.74) впливає рекурентне співвідношення для коефіцієнтів ряду ζ_n^0 :

$$A_n \zeta_n^0 = a_g \frac{k}{2} (\zeta_{n-n_g}^0 + \zeta_{n+n_g}^0) - m_x^2 \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho(\mu+1)} \left(\frac{\zeta_n^0}{2} + \frac{\zeta_{n-2n_x}^0 + \zeta_{n+2n_x}^0}{4} \right), \quad (2.75)$$

де

$$A_n = v^2 \left[-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2 \right] + gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}.$$

Аналогічно попередньому випадку, зафіксувавши значення n_g й n_x , а також одну з амплітуд a_g або m_x , зі співвідношення (2.75), одержимо задачу на власні значення, розв'язок якої дозволить побудувати перехідні криві стійкості на площині (k, m_x) або (k, a_g) відповідно.

На рис. 2.6.a) зображені області параметричної нестійкості вільної поверхні ферорідини при модуляції гравітаційного прискорення з амплітудою a_g й частотою ω під час відсутності магнітного поля. При накладенні осцилюючого горизон-

нтального магнітного поля, заданої амплітуди m_x (меншої за критичну m_{xc}) і тієї ж частоти ω , критична амплітуда a_c збільшується (див. рис. 2.6.b). Таким чином, за допомогою дотичного до вільної поверхні магнітного поля можна відсунути поріг настання параметричної нестійкості при механічних вібраціях.

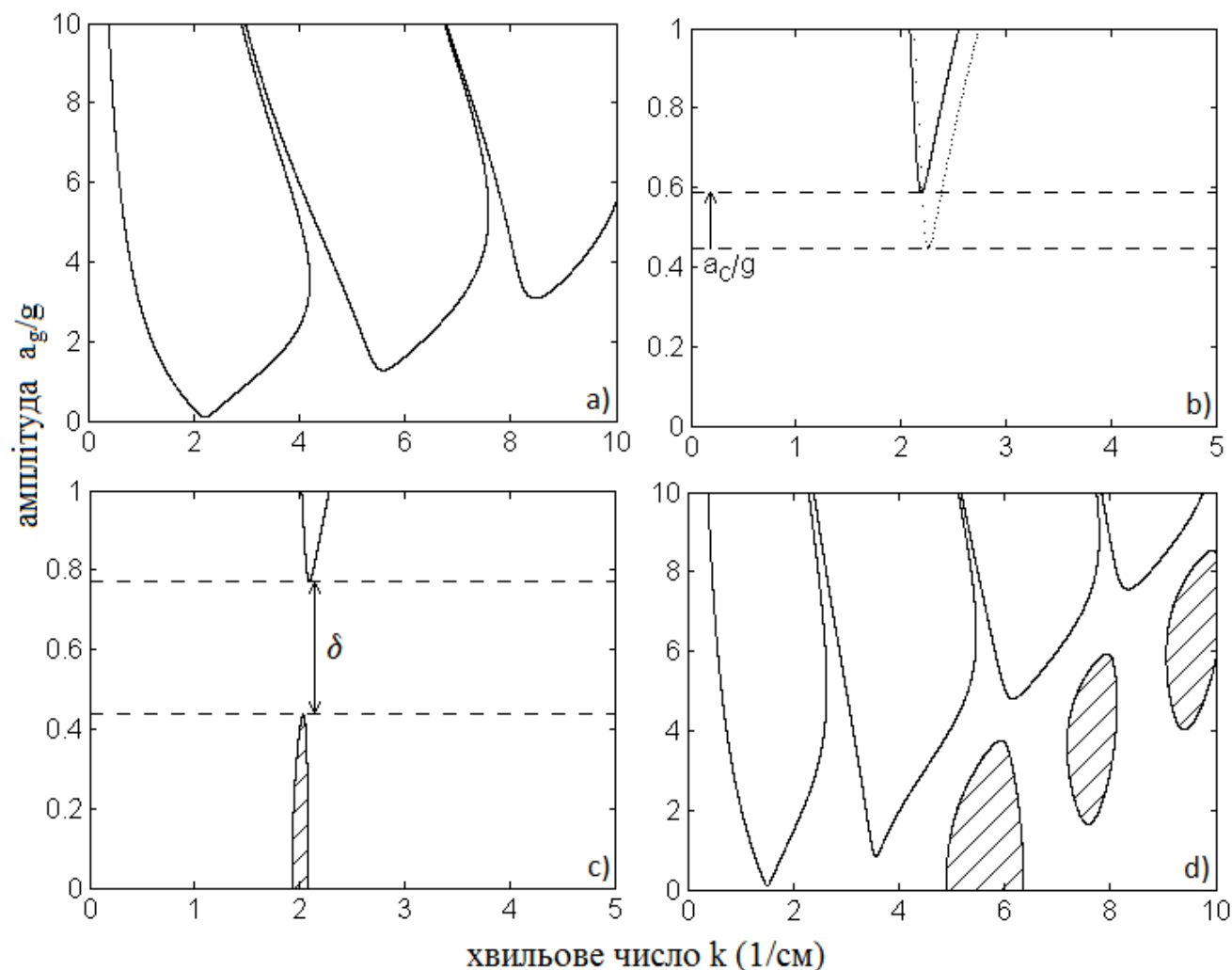


Рис. 2.6: Нейтральні криві стійкості $a(k)$ для значень параметрів системи:

- a)* $m_x = 0$; *b)* $n_g = n_x = 1$, $m_x = 0$ (крапкова крива), $m_x = 0.9m_{xc}$ (суцільна крива); *c)* $n_g = n_x = 1$, $m_x = 1.5m_{xc}$, *d)* $n_g = 2$, $n_x = 3$, $m_x = 2m_{xc}$ при частоті $\omega = 50$ (Гц)

У результаті розрахунків також виявлено, що якщо амплітуда горизонтального магнітного поля m_x перевищує критичну m_{xc} , виникають додаткові (заштриховані) області нестійкості (див. рис. 2.6.c) і рис.2.6.d). При цьому для однакових частот параметричного впливу за рахунок модуляції гравітаційного прискорення

можна відсунути поріг настання параметричної нестійкості в тангенціальному магнітному полі, тоді як для різних частот це не завжди вдається.

2.1.11 Збудження параметричної нестійкості в результаті гармонічного збурення температури за рахунок магнітокалоричного ефекту. Нехай θ – кут орієнтації магнітного поля (див. рис 2.1). Тоді при відсутності гравітаційної модуляції ($G = -g$) для найбільш загального ізотропного закону намагнічування (2.5) зі співвідношення (2.60) одержуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} v^2 \left[-4k^3 q_n + (k^2 + q_n^2)^2 \right] \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n^0 e^{[s+i(\alpha+n\omega)]t} \left(-\frac{\sigma k^3}{\rho} - gk + \frac{4\pi}{\rho} k^2 M^2 \left[\sin^2(\theta) - \frac{1}{1+r} \right] \right), \end{aligned} \quad (2.76)$$

де

$$r = \sqrt{\left(1 + 4\pi \frac{M}{H} \right) \left(1 + 4\pi \left[\frac{\partial M}{\partial H} - \frac{T}{c_v \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)^2 \right] \right)}$$

У якості моделі ідеального парамагнетика оберемо ферорідину, намагніченість якої можна описати формулою Ланжевена:

$$M = nm \left(\operatorname{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi} \right), \quad \xi = \frac{mH}{k_B T} \quad (2.77)$$

де n – число часток в одиниці об'єму феромагнітного колоїду, m – магнітний момент частки, k_B – постійна Больцмана.

Початкову ділянку кривої намагнічування (2.77), відповідну значенням напруженості магнітного поля $H \ll k_B T / m$ (тобто $\xi \ll 1$), можна вважати лінійним [4]:

$$M = \frac{nm\xi}{3} = \frac{nm^2 H}{3k_B T}$$

При наближенні до температури Кюрі T_K магнітного матеріалу ферочастинки її магнітний момент наближається до нуля за законом $m = m_0 \sqrt{T_K - T}$, отже,

намагніченість феромагнітного колоїду спадає до нуля пропорційно різниці $(T_k - T)$ [4, 6]:

$$M = C_K \left(\frac{T_k}{T} - 1 \right) H, \quad C_K = \frac{nm_0^2}{3k_B}$$

Особливий інтерес представляють речовини, температура Кюрі яких близька до кімнатної. До них відносять гадоліній і деякі сплави, наприклад, пермалой. Крім того за рахунок спеціальних полімерних поверхнево-активних добавок можна синтезувати фероколоїди з $T_K \sim 40^\circ C$, що дозволяє використовувати їх термо-чутливість у медичних цілях і в системах перетворення енергії [79].

Задамо напруженість магнітного поля таким чином, щоб вона містила постійну й коливну частини:

$$H = H_0 \left(1 + \frac{h}{H_0} \right), \quad h = \varepsilon_H H_0 \cos \omega t,$$

де $m_H = \varepsilon_H H_0$ – амплітуда осциляцій напруженості поля.

Тоді температура представляється у вигляді:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{T'}{T_0} \right), \quad T' = \varepsilon_T T_0 \cos \omega t,$$

де $m_T = \varepsilon_T T_0$ – амплітуда коливань температури. З інтеграла адіабатичності (2.3) знаходимо зв'язок між збуренням температури T' й напруженості магнітного поля h :

$$T' = -\frac{T_0}{c_v \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{H_0} h = \frac{C_K T_K H_0}{c_v \rho T_0} h \quad (2.78)$$

Величини $\varepsilon_H = \frac{m_H}{H_0}$ й $\varepsilon_T = \frac{m_T}{T_0}$ припускаються малими. Зберігаючи ε_H й ε_T першого порядку малості, одержуємо:

$$M^2 = a_0 + (a_H \varepsilon_H + a_T \varepsilon_T) \cos(\omega t) \quad (2.79)$$

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+\sqrt{b_0}} - \frac{b_H \varepsilon_H + b_T \varepsilon_T}{2\sqrt{b_0}(1+\sqrt{b_0})^2} \cos(\omega t), \quad (2.80)$$

де

$$a_0 = C_K^2 H_0^2 \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right)^2, a_H = 2a_0 \quad (2.81)$$

$$a_T = -C_K^2 H_0^2 \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \frac{T_K}{T_0} \quad (2.82)$$

$$b_0 = \left(1 + 4\pi C_K \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \right) \left(1 + 4\pi \left(C_K \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right) - \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \right) \right) \quad (2.83)$$

$$b_H = 4\pi \left(1 + 4\pi C_K \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \right) \left(-\frac{C_K T_K}{T_0} - \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \right) - 4\pi C_K \frac{T_K}{T_0} \left(1 + \right. \quad (2.84)$$

$$\left. + 4\pi \left(C_K \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right) - \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \right) \right)$$

$$b_T = 12\pi \left(1 + 4\pi C_K \left(\frac{T_K}{T_0} - 1 \right) \right) \frac{C_K^2 T_K^2 H_0^2}{c_v \rho T_0^3} \quad (2.85)$$

Підставляючи вирази (2.79)-(1.85) в (2.76), одержуємо рекурентне співвідношення:

$$\left(2v^2 \left[-4kq_n + \frac{(k^2 + q_n^2)^2}{k^2} + \frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k} \right] - 2d_0 \right) \zeta_n^0 = (d_H \varepsilon_H + d_T \varepsilon_T) (\zeta_{n-1}^0 + \zeta_{n+1}^0), \quad (2.86)$$

де

$$d_0 = \frac{4\pi}{\rho} a_0 \left(\sin^2(\theta) - \frac{1}{1 + \sqrt{b_0}} \right)$$

$$d_H = \frac{4\pi}{\rho} \left(a_H \left(\sin^2(\theta) - \frac{1}{1 + \sqrt{b_0}} \right) - \frac{b_H}{2\sqrt{b_0} (1 + \sqrt{b_0})^2} \right)$$

$$d_T = \frac{4\pi}{\rho} \left(a_T \left(\sin^2(\theta) - \frac{1}{1 + \sqrt{b_0}} \right) - \frac{b_T}{2\sqrt{b_0} (1 + \sqrt{b_0})^2} \right)$$

Зв'язок між амплітудами осциляцій температури m_T й напруженості магнітного

поля m_H , а, отже, між коефіцієнтами $\varepsilon_T = \frac{m_T}{T_0}$ й $\varepsilon_H = \frac{m_H}{H_0}$ знаходимо з виразу (2.78):

$$m_T = \frac{C_K T_K H_0}{c_v \rho T_0} m_H, \quad \varepsilon_T = \frac{C_K T_K H_0^2}{c_v \rho T_0^2} \varepsilon_H \quad (2.87)$$

Аналогічно раніше розглянутим випадкам, з формули (2.86) з використанням (2.87) одержимо задачу на власні значення, розв'язок якої дозволяє побудувати нейтральні криві стійкості на площині зміни параметрів (k, m_H) або (k, m_T) .

Для розрахунків використовувалися наступні значення параметрів рідини: $T_K = 300(K)$, $n = 10^{17}(\text{см}^{-3})$, $m_0 = 10^{-16} \left(\frac{\text{дин см}}{\text{Гс}} \right)$, $\nu = 0.1(\text{П})$, $\rho = 1 \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$,

$$\sigma = 30 \left(\frac{\text{ерг}}{\text{см}^2} \right), \quad c_v = 4.184 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{ерг}}{\text{см}^3 \text{К}} \right).$$

На рис. 2.7. показана принципова можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні намагнічуваної рідини в результаті гармонійного збурення її температури за рахунок магнітокалоричного ефекту. У результаті коливань температури виникають осциляції магнітного поля, які можуть призводити до збудження параметричної нестійкості.

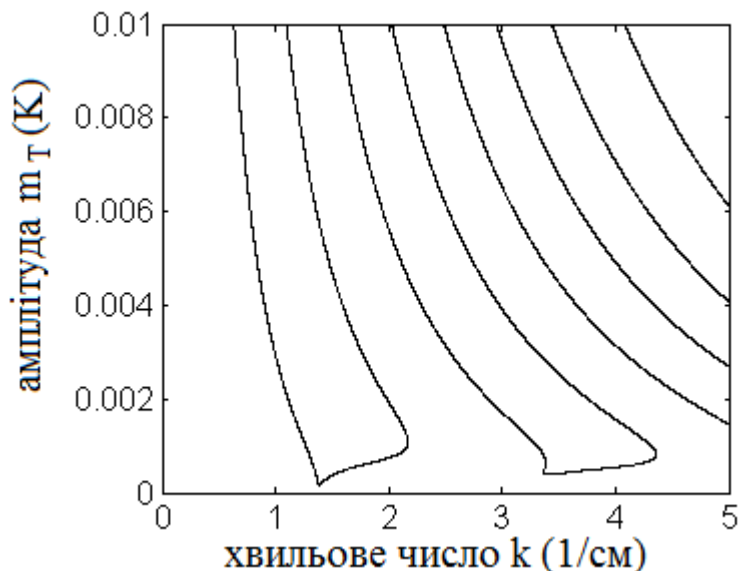


Рис. 2.7: Перехідні криві стійкості $m_T(k)$ для значень параметрів системи:

$$T_0 = 0.95 T_K, \quad \theta = 0, \quad H_0 = 100(\text{Е}), \quad \omega = 50(\text{Гц})$$

2.2 Шар в'язкої нелінійно намагнічуваної рідини скінченної глибини

2.2.1 Постановка задачі. Розглядається необмежений у горизонтальному напрямку шар магнітної рідини скінченної товщини h , розташований на твердій немагнітній пластині й обмежений зверху повітрям, впливом якого на рух рідини будемо нехтувати (див. рис. 2.8). Область, яку займає рідина в рівновазі, позначимо через Ω_1 , повітря – Ω_2 , тверда стінка – Ω_3 . Надалі нижні індекси при відповідних величинах будуть позначати області, до яких вони відносяться.

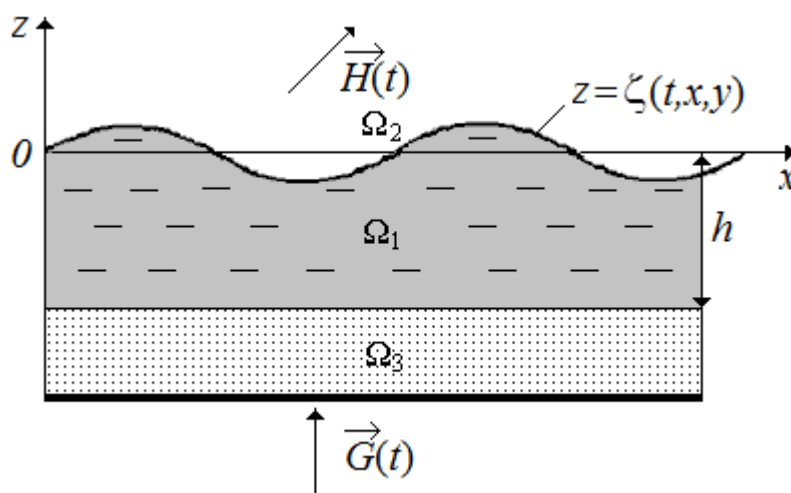


Рис. 2.8: Шар ферорідини з необмеженою вільною поверхнею

Вважається, що рідина перебуває в довільно орієнтованому до її вільної горизонтальної поверхні однорідному нестационарному магнітному полі $\vec{H}(t)$, а пластинка здійснює вертикальні гармонічні коливання з амплітудою a_g й частотою ω_g . Введемо неінерційну систему координат (x, y, z) , яка, поступально рухається у вертикальному напрямі, з початком у точці 0 на початково незбуреній поверхні $z = 0$ рідини; $z = \zeta(t, x, y)$ – рівняння збуреної вільної поверхні. Ферорідина вважається в'язкою, нестисливою, непровідною і для неї прийнятий ізотропний закон намагнічування $\mu_1 = \mu(\rho, H)$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$.

2.2.2 Математичне формулювання задачі. Система рівнянь (1.11) у даному випадку буде мати вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2.88)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p_0 + \phi^{(\rho)}) + M\nabla H + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{G}, \quad (2.89)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad (2.90)$$

$$\vec{B} = \mu(\rho, H)\vec{H}, \quad (2.91)$$

де

$$\phi^{(\rho)} = \int_0^H \left(M - \rho \frac{\partial M}{\partial \rho} \right) dH \quad (2.92)$$

$$\vec{G}(t) = (-g + \omega_g^2 a_g \cos(\omega_g t)) \vec{e}_z, \quad (2.93)$$

g – гравітаційне прискорення, \vec{e}_z – одиничний орт осі (z). Останній доданок рівняння (2.89) обумовлений наявністю вертикальних механічних вібрацій.

Система рівнянь (2.88) – (2.91) доповнюється граничними умовами, які включають:

кінематичну умову

$$v_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}} \quad \text{при} \quad z = \zeta; \quad (2.94)$$

умови балансу напруження на вільній поверхні

$$\langle p_{jk} \tau_{1j} n_k \rangle = 0, \langle p_{jk} \tau_{2j} n_k \rangle = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta, \quad (2.95)$$

$$\langle p_{nn} \rangle = -\sigma \operatorname{div} \vec{n} \quad \text{при} \quad z = \zeta; \quad (2.96)$$

Умову прилипання на твердій стінці

$$\vec{v} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h; \quad (2.97)$$

умови для електромагнітного поля

$$\langle \vec{B} \cdot \vec{n} \rangle = 0, \langle \vec{H} \cdot \vec{\tau} \rangle = 0 \quad \text{при} \quad z = \zeta, z = -h; \quad (2.98)$$

граничні умови на нескінченності

$$\vec{H} = \vec{H}_\infty \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.99)$$

Компоненти p_{jk} тензора напруження в'язкої нестискуваної ферорідини мають вигляд:

$$p_{jk} = - \left(p_0 + \psi^{(\rho)} + \frac{H^2}{8\pi} \right) \delta_{jk} + \frac{H_j B_k}{4\pi} + \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right). \quad (2.100)$$

В (2.88) – (2.100) введені наступні позначення: \vec{v} – швидкість середовища, ρ – густина, p_0 – механічний тиск, $\psi^{(\rho)}$ – магніострикційний тиск, M – намагніченість середовища, \vec{H} – напруженість магнітного поля, η – динамічна в'язкість, $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ – магнітна індукція, μ – магнітна проникність, σ – коефіцієнт поверхневого натягу, δ_{jk} – символ Кронекера, \vec{n} – зовнішня нормаль до вільної поверхні, $\vec{\tau}_1$ і $\vec{\tau}_2$ – дотичні вектори до вільної поверхні (τ_{1j} і τ_{2j} – їх компоненти), $\langle \dots \rangle$ – стрибок величин, взятих у дужки, на поверхнях розділу. По повторюваних індексах проводиться підсумовування в межах їх зміни.

У силу другого рівняння (2.90), напруженість магнітного поля представимо у вигляді $\vec{H} = \nabla\Phi$, де Φ – потенціал напруженості магнітного поля. Тоді з першого рівняння (2.6) одержуємо:

$$\Delta\Phi = -4\pi \operatorname{div} \left(\frac{M(\rho, T(|\nabla\Phi|), |\nabla\Phi|) \nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \right) \quad (2.101)$$

Граничні умови (2.98), (2.99) для електромагнітного поля приймуть вид:

$$\left\langle \mu \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\rangle = \zeta_x \left\langle \mu \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\rangle + \zeta_y \left\langle \mu \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\rangle \text{ при } z = \zeta, \quad (2.102)$$

$$\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\rangle + \zeta_x \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\rangle + \zeta_y \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\rangle = 0 \text{ при } z = \zeta, \quad (2.103)$$

$$\left\langle \mu \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad \langle \Phi \rangle = 0 \text{ при } z = -h, \quad (2.104)$$

$$\nabla\Phi^{(i)} = \vec{H}_\infty^{(i)} \quad i = 1, 3 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (2.105)$$

2.2.3 Лінеаризація основних рівнянь і граничних умов. Система (2.88) – (2.105) має розв'язок:

$$\vec{v}^0 = 0, \quad \zeta^0 = 0, \quad \nabla\Phi_1^0 = \vec{H}_0(t), \quad \nabla\Phi_j^0 = \vec{H}_{j\infty}(t), \quad j = 2, 3, \quad (2.106)$$

$$H_{0x} = H_{\infty x}, \quad H_{0y} = H_{\infty y}, \quad \mu H_{0z} = H_{\infty z},$$

який відповідає однорідному рівноважному стану ферорідини з горизонтальною вільною поверхнею, що перебуває в довільному на нескінченності магнітному полі.

Для дослідження стійкості горизонтальної поверхні лінеаризуємо сформульовану задачу. Малі відхилення від рівноважного стану (2.106) задамо у вигляді:

$$\zeta' = \zeta - \zeta^0, \quad v' = v - v^0, \quad \nabla\Phi' = \nabla\Phi - \vec{H}_0, \quad (2.107)$$

де штрихами позначені збурення відповідних величин. Припускаючи малість амплітуд хвиль у порівнянні з їхньою довжиною, а також малість збурення магнітного поля $|\vec{H}'| = |\nabla\Phi - \nabla\Phi^0|$ в порівнянні з $|\nabla\Phi^0|$, у випадку нелінійного закону намагнічування (2.91) для збурення намагніченості \vec{M}' однорідної нестисливої рідини одержимо:

$$\vec{M}' = \left(\frac{M}{H} \vec{H} \right)' = \frac{1}{H^2} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_0 - \left(\frac{M}{H} \right)_0 \right] (\vec{H}_0 \vec{H}') \vec{H}_0 + \frac{M_0}{H_0} \vec{H}'. \quad (2.108)$$

Тут коефіцієнти при збуреннях напруженості магнітного поля обчислюються в рівноважному стані (2.106), обумовленому значеннями параметрів ферорідини.

Задача для потенціалу напруженості магнітного поля (2.101) – (2.105) у лінійному наближенні записується у вигляді (штрихи над збуреними величинами надалі опускаються):

$$\Delta\Phi_j = 0 \text{ в } \Omega_j, \quad j = \overline{2,3} \quad (2.109)$$

$$\Delta\Phi_1 + c_0 \vec{H}_0 \nabla(\vec{H}_0 \nabla\Phi_1) = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (2.110)$$

$$\mu \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} + c_0 H_{0z} (\vec{H}_0 \nabla\Phi_1) = (\vec{H}_0 \nabla\zeta)(\mu - 1) \text{ при } z = 0, \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = \frac{(\mu - 1)}{\mu} H_{0z} \zeta_x, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = \frac{(\mu - 1)}{\mu} H_{0z} \zeta_y \text{ при } z = 0, \quad (2.112)$$

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \mu \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + c_0 H_{0z} (\vec{H}_0 \nabla \Phi_1) = 0 \quad \text{при } z = -h, \quad (2.113)$$

$$\nabla \Phi_j = 0, \quad j = 2, 3 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (2.114)$$

$$\text{де } c_0 = \frac{4\pi}{\mu H_0^2} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_0 - \left(\frac{M}{H} \right)_0 \right].$$

Застосувавши двічі операцію ротор до обох частин рівняння (2.89), після проектування на вісь z , одержимо рівняння для вертикальної компонента швидкості v_z :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Delta v_z = 0 \quad \text{при } -h < z < 0, \quad (2.115)$$

Граничні умови на твердій стінці наступні:

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h. \quad (2.116)$$

Перше є умовою прилипання для швидкості, а друге випливає з рівняння нерозривності (2.88) і рівностей $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ при $z = -h$.

У лінійному наближенні кінематична гранична умова (2.94) прийме вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z \quad \text{при } z = 0. \quad (2.117)$$

З умови відсутності дотичних напружень на вільній поверхні (2.95), одержуємо:

$$\eta \left(\Delta_\Gamma - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2.118)$$

де $\Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для нормальної компоненти тензора напруження (2.96), зневажаючи величинами другого порядку малості, можемо записати:

$$\langle p_{zz} \rangle = \sigma \Delta \zeta \quad \text{при } z = 0. \quad (2.119)$$

Звідси визначається тиск на вільній поверхні

$$p_0 = \left\langle -\frac{H^2}{8\pi} + \frac{H_z B_z}{4\pi} \right\rangle_{z=0} - \psi^{(\rho)} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} - \sigma \Delta \zeta, \quad (2.120)$$

$$-\left\langle \frac{H^2}{8\pi} \right\rangle + \frac{B_n}{4\pi} \langle H_n \rangle = -2\pi \langle M_n^2 \rangle.$$

Застосувавши оператор $\nabla_\Gamma = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$ до лінеаризованого рівняння руху (2.89), одержимо

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Delta_\Gamma \left[p_0 + \psi^{(\rho)} - \int_0^H M dH - \rho G \zeta \right]. \quad (2.121)$$

Використовуючи (2.120), виключимо звідси тиск p_0 і одержимо граничну умову, що замикає систему (2.109) – (2.118)

$$\begin{aligned} & \left(\rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta - 2\eta \Delta_\Gamma \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} = -(\rho G(t) + \sigma \Delta) \Delta_\Gamma \zeta - \\ & - \frac{1}{4\pi} \Delta_\Gamma \left\langle \frac{(\mu-1)^2}{\mu} H_{0z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \vec{H}_0 \nabla \zeta \right) + \frac{(\mu-1)(\mu + c_0 H_{0z}^2)}{\mu} (\vec{H}_0 \nabla \Phi) \right\rangle_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Сформульована задача дозволяє дослідити нестійкість вільної поверхні капілярної рідини з нелінійним законом намагнічування $\mu = \mu(\rho, H)$, враховуючи ефекти в'язкого тертя й скінченності глибини шару рідини.

2.2.4 Метод розв'язку. Розв'язок задачі (2.109) – (2.118), (2.122) відшукується у вигляді:

$$\begin{aligned} v_z(t, x, y, z) &= w(t, z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \zeta(t, x, y) = \xi(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \\ \Phi_j^0(t, x, y, z) &= \varphi_j(t, z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \vec{k} = (k_x, k_y), \quad \vec{r} = (x, y), \end{aligned} \quad (2.123)$$

де $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ – хвильове число збурень, які поширюються по вільній поверхні.

Основні якісні особливості цих розв'язків простежимо у випадку лінійного закону намагнічування рідини: $\mu = \text{const}$, тобто $c_0 = 0$.

Розв'язок задач для потенціалу магнітного поля (2.109), (2.110) у кожній з областей з врахуванням (2.123) будуть мати вигляд:

$$\phi_1 = a_1 e^{kz} + b_1 e^{-kz}, \quad \phi_2 = a_2 e^{-kz}, \quad \phi_3 = a_3 e^{kz}, \quad (2.124)$$

а невідомі коефіцієнти визначаються з граничних умов (2.111) – (2.114)

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(\mu-1)^2 e^{-kh} (H_{0z}/\mu + iH_\tau)\xi}{(\mu+1)^2 e^{kh} - (\mu-1)^2 e^{-kh}}, & b_1 &= \frac{(\mu-1)(\mu+1)e^{kh} (H_{0z}/\mu + iH_\tau)\xi}{(\mu+1)^2 e^{kh} - (\mu-1)^2 e^{-kh}}, \\
a_3 &= \frac{\left((\mu-1)^2 + (\mu-1)(\mu+1)\right)e^{kh} (H_{0z}/\mu + iH_\tau)\xi}{(\mu+1)^2 e^{kh} - (\mu-1)^2 e^{-kh}} & (2.125) \\
a_2 &= \frac{\left((\mu-1)^2 e^{-kh} - (\mu-1)(\mu+1)e^{kh}\right)H_{0z} + \left((\mu-1)^2 e^{-kh} + (\mu-1)(\mu+1)e^{kh}\right)iH_\tau}{(\mu+1)^2 e^{kh} - (\mu-1)^2 e^{-kh}} \xi.
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів (2.123) – (2.125) у граничну умову (2.122) одержимо:

$$\begin{aligned}
&\left(\rho \frac{\partial}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 3\eta k^2\right) \frac{\partial w}{\partial z} = \left(\rho G(t)k^2 - \sigma k^4 - \right. \\
&\left. - \frac{(\mu-1)^2 k^3}{4\pi((\mu^2+1)\text{th}(kh) + 2\mu)} \left[H_{0z}^2(t) \left(\text{th}(kh) + \frac{1}{\mu} \right) - H_{0\tau}^2(t) (\text{th}(kh) + \mu) \right] \right) \xi, & (2.126)
\end{aligned}$$

де $H_{0\tau} = (\vec{H}_0 \cdot \vec{k})/k$ – ефективна горизонтальна компонента напруженості магнітного поля.

Нехай θ – кут орієнтації магнітного поля, так що

$$H_{0z} = H_0 \sin(\theta), \quad H_{0\tau} = H_0 \cos(\theta). \quad (2.127)$$

Нахилене магнітне поле задамо таким чином, щоб воно складалося з постійної й осцилюючої частин

$$H_0(t) = H_{00} + m_H \cos(\omega_H t). \quad (2.128)$$

Частоту механічних вібрацій ω_g і осцилюючого магнітного поля ω_H запишемо у вигляді:

$$\omega_g = n_g \omega, \quad \omega_H = n_H \omega, \quad (2.129)$$

де n_g, n_H – цілі числа. Тоді права частина рівняння (2.126) буде періодичною функцією з періодом $2\pi/\omega$. Отже, збурення w й ξ можуть бути представлені у формі Флоке:

$$w(t, z) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(z) e^{in\omega t}, \quad \xi(t) = e^{\gamma t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t}, \quad (2.130)$$

де $\gamma = s + i\alpha$ показник Флоке.

Тоді гідродинамічна задача (2.115) приводиться до виду [81]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - q_n^2\right)w_n = 0 \quad \text{при} \quad -h < z < 0, \quad (2.131)$$

$$\text{де } q_n^2 = k^2 - \frac{s + i(\alpha + n)\omega}{\nu}.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.131) має вигляд:

$$w_n(z) = P_n \operatorname{ch}(kz) + Q_n \operatorname{sh}(kz) + R_n \operatorname{ch}(q_n z) + S_n \operatorname{sh}(q_n z), \quad (2.132)$$

а невідомі коефіцієнти визначаються із граничних умов (2.116) – (2.118)

$$P_n = \nu(q_n^2 + k^2)\xi_n, \quad R_n = -2\nu k^2 \xi_n, \quad (2.133)$$

$$S_n = \frac{(kP_n + R_n[k \operatorname{ch}(q_n h) \operatorname{ch}(kh) - q_n \operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{ch}(kh)])}{q_n \operatorname{ch}(q_n h) \operatorname{sh}(kh) - k \operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{ch}(kh)},$$

$$Q_n = \frac{R_n}{k}[q_n \operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{ch}(kh) - k \operatorname{ch}(q_n h) \operatorname{sh}(kh)] -$$

$$-\frac{S_n}{k}[q_n \operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{ch}(kh) - k \operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{sh}(kh)].$$

Підставляючи розв'язок гідродинамічної задачі (2.132), (2.133) у рівняння (2.126), одержимо:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \xi_n e^{[s+i(\alpha+n)\omega]t} = 0, \quad (2.134)$$

де

$$F_n = \frac{\nu^2}{q_n \operatorname{cth}(q_n h) - k \operatorname{cth}(kh)} \left\{ k(4q_n^2 k^2 + (q_n^2 + k^2)^2) - \right.$$

$$\left. -q_n \left[4k^4 + (q_n^2 + k^2)^2 \right] \operatorname{cth}(q_n h) \operatorname{cth}(kh) + \frac{4q_n k^2 (q_n^2 + k^2)}{\operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{sh}(kh)} \right\} - \rho G(t)k - \sigma k^3 + \quad (2.135)$$

$$+ \frac{(\mu - 1)^2 k^2 H_0^2(t)}{4\pi((\mu^2 + 1) \operatorname{th}(kh) + 2\mu)} \left[\sin^2(\theta) \left(\operatorname{th}(kh) + \frac{1}{\mu} \right) - \cos^2(\theta) (\operatorname{th}(kh) + \mu) \right].$$

Після підстановки виразів для $H_0(t)$ й $G(t)$ в (45), з рівності (2.134) одержимо рекурентне співвідношення відносно ξ_n для розрахунків нейтральних кривих стійкості.

2.2.5 Результати розрахунків. Відзначимо основні відмінності в параметричному впливі механічних вібрацій і осцилюючого магнітного поля. Механічні коливання входять у рівність (2.134) лінійно з коефіцієнтом k , тоді як магнітне поле вносить квадратичний вклад у розвиток нестійкості з коефіцієнтом k^2 . Таким чином, для випадку механічних вібрацій і коливань магнітного поля при втраті стійкості будуть виникати хвилі різної довжини; крім того, для магнітного поля має місце двочастотний параметричний вплив:

$$H_0^2(t) = H_{00}^2 + \frac{m_H^2}{2} + 2H_{00}m_H \cos(n_H \omega t) + \frac{m_H^2}{2} \cos(2n_H \omega t). \quad (2.136)$$

Підставивши вирази для $H_0(t)$ й $G(t)$ в (2.134), одержимо:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{[s+i(\alpha+n)\omega]t} \left((F_n^v - F_n^H H_{00}^2) \xi_n - F_n^H H_{00} m_H (\xi_{n-n_H} + \xi_{n+n_H}) - \frac{F_n^H m_H^2}{4} (2\xi_n + \xi_{n-2n_H} + \xi_{n+2n_H}) - \frac{k\omega_g^2 a_g}{2} (\xi_{n-n_g} + \xi_{n+n_g}) \right) = 0, \quad (2.137)$$

де

$$F_n^v = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{v^2}{q_n \operatorname{cth}(q_n h) - k \operatorname{cth}(kh)} \left\{ \frac{4q_n k^2 (q_n^2 + k^2)}{\operatorname{sh}(q_n h) \operatorname{sh}(kh)} - q_n \left[4k^4 + (q_n^2 + k^2)^2 \right] \operatorname{cth}(q_n h) \operatorname{cth}(kh) + k \left(4q_n^2 k^2 + (q_n^2 + k^2)^2 \right) \right\}, \quad (2.138)$$

$$F_n^H = \frac{(\mu - 1)^2 k^2 \left[\sin^2(\theta) \left(\operatorname{th}(kh) + \frac{1}{\mu} \right) - \cos^2(\theta) (\operatorname{th}(kh) + \mu) \right]}{4\pi\rho (\mu^2 + 1) \operatorname{th}(kh) + 2\mu}.$$

Вирази (2.137), (2.138) описують випадок спільного впливу механічних вібрацій і осцилюючого нахиленого магнітного поля з різними амплітудами й частотами. Зафіксувавши частину параметрів, з (2.137) можна одержати задачу на власні значення для однієї з амплітуд параметричного впливу.

Розглянемо окремо випадок впливу нахиленого магнітного поля, що складається з постійної й осцилюючої частин, при відсутності механічних вібрацій. Цей випадок цікавий тим, що стаціонарна складова горизонтального магнітного поля

має стабілізуючий вплив на вільну поверхню [106], тоді як осцилююче горизонтальне поле може призводити до виникнення параметричної нестійкості, тобто появи хвилястої структури на вільній поверхні рідини [8]. Як зазначалось раніше, у вертикальному магнітному полі, окрім параметричної нестійкості, може виникати нестійкість Розенцвейга, з утвором шпилястої форми вільної поверхні, якщо напруженість поля перевищує критичне значення [70] (при $h \rightarrow \infty$):

$$H_R^2 = \frac{8\pi\sqrt{\sigma\rho g}\mu(\mu+1)}{(\mu-1)^2}. \quad (2.139)$$

Тому, становить інтерес вивчення впливу нахиленого нестационарного магнітного поля на стійкість вільної поверхні ферорідини.

Оскільки коефіцієнти ряду Фур'є (2.137) дорівнюють нулю, то звідси випливають рекурентні співвідношення для невідомих коефіцієнтів ξ_n . Вводячи вектор-стовпець $\xi = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots)^T$, ці співвідношення можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$(m_H^2 C + m_H B + A)\xi = 0, \quad (2.140)$$

де A – діагональна матриця з елементами $A_{n,n} = F_n^v - F_n^H H_{00}^2$, а B й C – симетричні дво- і тридіагональні матриці з відмінними від нуля елементами (при $n_H = 1$, $\omega_H = \omega$):

$$B_{n,n-1} = B_{n-1,n} = -F_n^H H_{00}, \quad C_{n,n} = -\frac{F_n^H}{2}, \quad C_{n,n-2} = C_{n-2,n} = \frac{1}{2}C_{n,n}.$$

Надалі зручно перейти до лінійної алгебраїчної задачі. Введемо вектор-стовпець $\tilde{\xi} = m_H \xi$. Тоді задача (2.140) зводиться до задачі на власні значення для матриці зі збільшеним удвічі розміром:

$$\begin{pmatrix} -C^{-1}B & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \xi \end{pmatrix} = m_H \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (2.141)$$

де I – одинична матриця. Амплітуда осцилюючого магнітного поля m_H є власним значенням задачі (2.141).

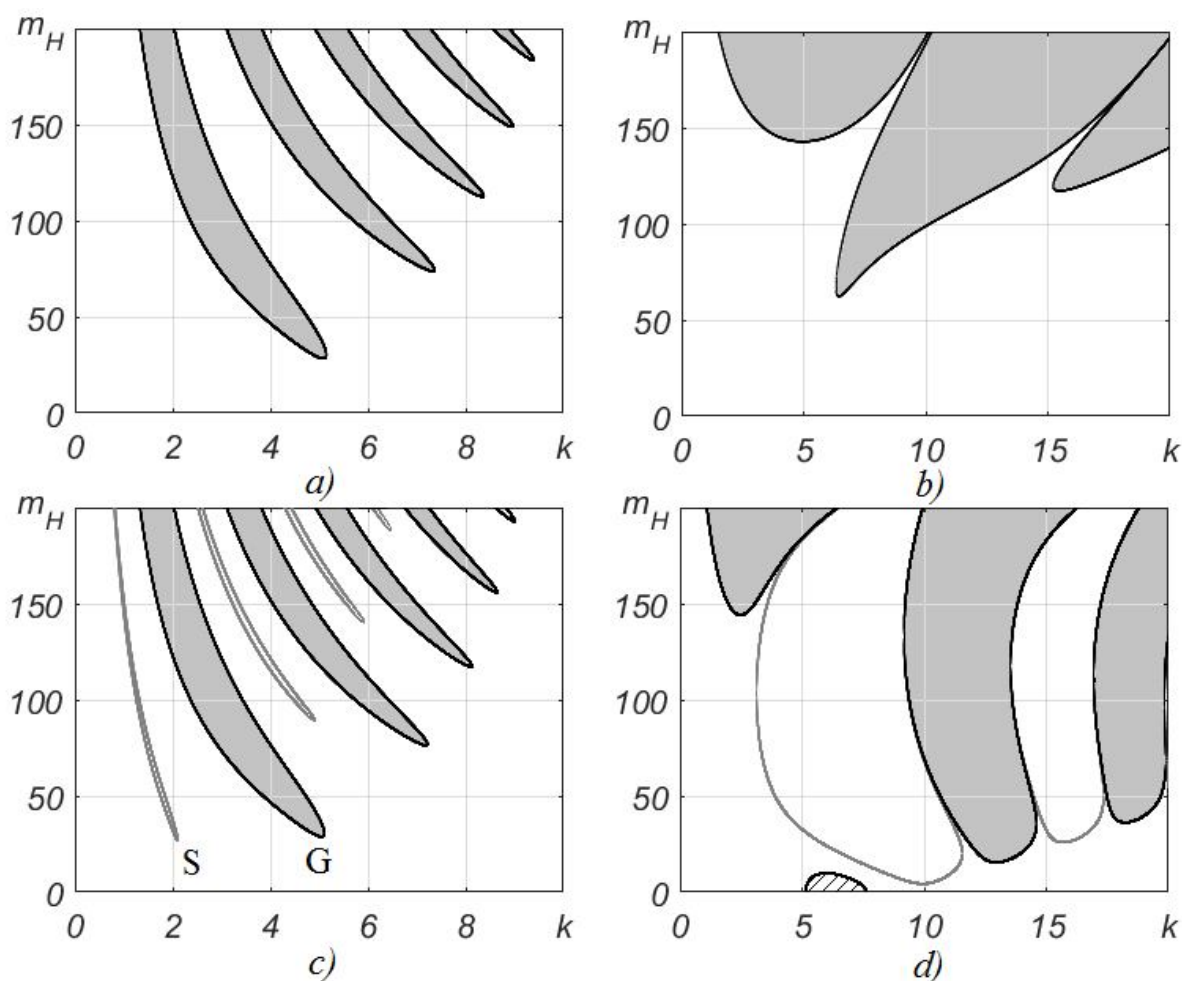


Рис. 2.9: Нейтральні криві стійкості для шару магнітної рідини в осцилюючому магнітному полі при значеннях параметрів: $h = 1$ см, $\omega = 100$ Гц, а) $H_{00} = 0$, $\theta = 0$; б) $H_{00} = 0$, $\theta = \pi/2$; в) $H_{00} = 4,5E$, $\theta = 0$; д) $H_{00} = 95E$, $\theta = \pi/2$.

Для розрахунків будемо використовувати метод робіт [81, 82]. Матриці A , B і C обрізуються до розмірів, що забезпечують необхідну точність обчислень. Показник Флоке $\gamma = s + i\alpha$ фіксується на значеннях $s = 0$ і $\alpha = 0$ ($\alpha = 1/2$), що відповідає випадку гармонічних (субгармонічних) коливань. При зміні параметра k розв'язується задача на власні значення (2.141) і визначається найменше або кілька найменших дійсних власних значень m_H . Таким чином, у площині (k, m_H) будуються нейтральні криві стійкості, які утворюють області ("язики"), значення параметрів поза (всередині) цих областей відповідають стійкості (нестійкості). Абсолютному мінімуму на перехідних кривих відповідає критична амплітуда m_{Hc}

й критичне хвильове число k_c , при яких настає нестійкість. Для розрахунків використовувалися типові для магнітних рідин значення параметрів [8]:

$$\nu = 0,1 \text{ П}; \quad \mu = 5; \quad \sigma = 30 \text{ ерг/см}^2; \quad \rho = 1,2 \text{ г/см}^3.$$

На відміну від випадку механічних вібрацій, для тільки осцилюючого магнітного поля найнебезпечнішими є гармонічні коливання. Ним відповідають області нестійкості, зафарбовані сірим кольором (див. рис. 2.9.a) і рис. 2.9.b). У цьому випадку має місце періодичний вплив (2.136) з однієї частотою $2\omega_H$ ($\omega_H = n_H \omega$). З додаванням стаціонарного поля H_{00} , оскільки воно входить в одну з амплітуд двочастотного параметричного впливу (2.136), починають проявлятися зони субгармонічної нестійкості (незафарбовані "язики" на рис. 2.9.c) і рис. 2.9.d).

Збільшення стаціонарного поля призводить до виникнення бікритичних точок (S і G на рис. 2.9.c), тобто одній критичній амплітуді поля відповідають два різних хвильових числа. Подальше збільшення поля H_{00} призводить до того, що субгармонічні коливання стають більш небезпечними. При цьому, якщо вертикальна компонента поля перевершує значення H_R , що визначається з (2.139), виникає додаткова (заштрихована) область, яка відповідає нестійкості Розенцвейга (див. Рис. 2.9.d).

Відзначимо, що параметричну нестійкість простіше збурити осцилюючим тангенціальним до вільної поверхні магнітним полем, тому що для цього потрібно прикласти поле меншої амплітуди, ніж для випадку перпендикулярного до поверхні поля, як це видно з рис. 2.9.a) і рис. 2.9.b). При цьому з (2.136), (2.139), випливає, що у випадку поля, нормального до поверхні, може спостерігатися перехід від магнітної нестійкості Фарадея до нестійкості Розенцвейга в тільки осцилюючому полі, якщо його амплітуда перевищить значення $m_H > \sqrt{2}H_R$ [8, 77].

Пунктирні криві на рис. 2.10 a) відповідають критичній амплітуді m_{Hsg} субгармонічної нестійкості, а суцільні – амплітуді m_{Hg} гармонічної нестійкості. Кружечками (зірочками) на рис. 2.10 b) позначені критичні хвильові числа гармонічної k_g (субгармонічної k_{sg}) нестійкості відповідно. З рис. 2.10.a) видно, що при

відхиленні поля від вертикального або горизонтального положення для збудження нестійкості потрібно прикласти поле більшої амплітуди m_{Hc} . При цьому вертикальна й горизонтальна складові магнітного поля можуть компенсувати дію один одного при орієнтації поля:

$$\theta_c = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + 2\mu \operatorname{th}(kh) + \mu^2} \right). \quad (2.142)$$

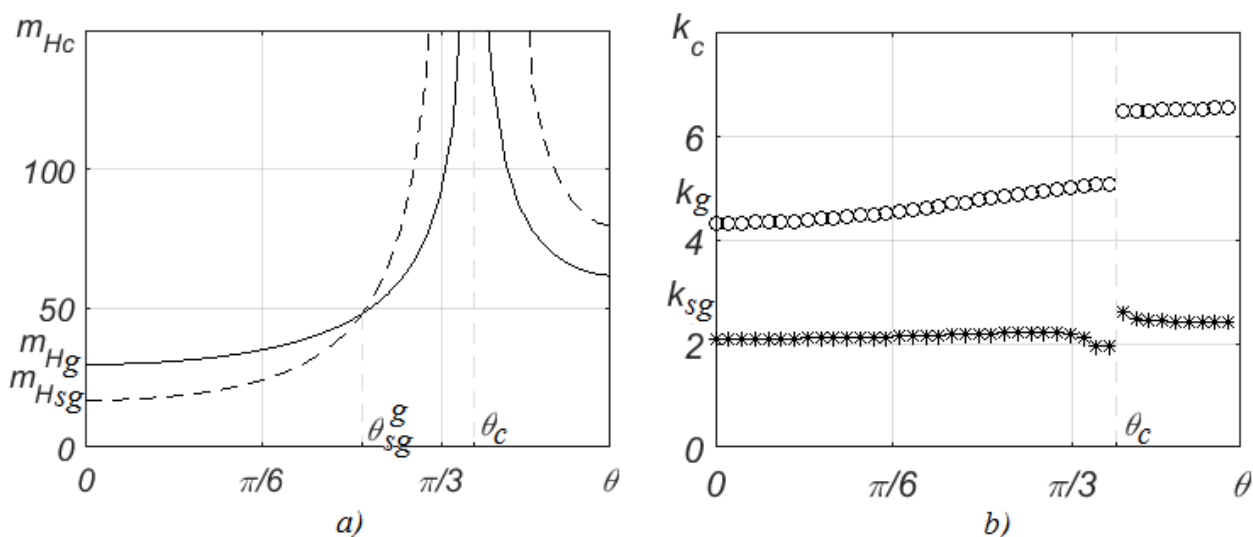


Рис. 2.10: Залежність критичної амплітуди магнітного поля (а) і критичного хвильового числа (б) від кута орієнтації поля при значеннях параметрів

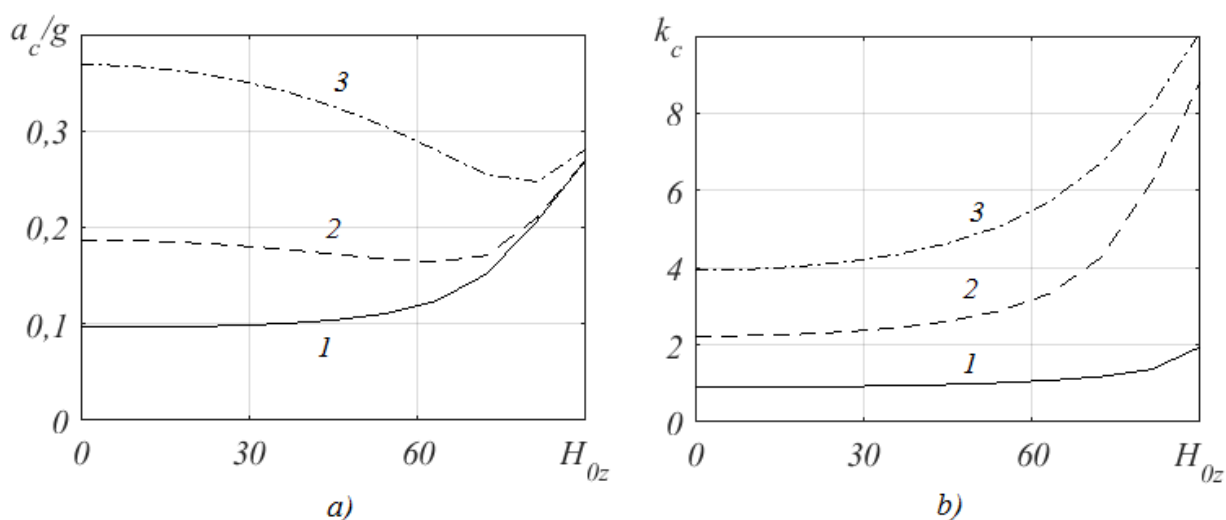
$$h = 1 \text{ см}, \omega = 100 \text{ Гц} \quad a) H_{00} = 7 \text{ Е}; \quad b) H_{00} = 20 \text{ Е}.$$

Зміна орієнтації поля також може привести до зміни мод коливань (див. рис. 2.10.а). При куті нахилу θ_{sg}^g виникають бікритичні точки, тобто критичні амплітуди m_{Hsg} й m_{Hg} збігаються. Тому поблизу цієї точки може здійснюватися перехід від гармонічних до субгармонічних коливань. Критичні хвильові числа при зміні орієнтації поля мало відрізняються від тих, що відповідають параметричній нестійкості в тільки вертикальному або горизонтальному полі. Однак, в точці θ_c відбувається стрибкоподібна зміна критичних хвильових чисел, що обумовлює зміну довжин виникаючих на поверхні хвиль (див. рис. 2.10.б).

Випадок вертикального магнітного поля, що складається з постійної й осцилюючої частин, розглядався в роботі [60], однак для спрощення вважалось, що

стаціонарне поле значно більше осцилюючого ($H_{0z} \gg m_H$), що зводилося до випадку одночастотного впливу.

У роботі [88] було показано, що за рахунок механічних вібрацій можна підвищити поріг виникнення нестійкості Розенцвейга в стаціонарному вертикальному магнітному полі. Однак вплив стаціонарного магнітного поля, зокрема похилого, на параметричну нестійкість при механічних вібраціях не був до кінця досліджений. З рис. 2.11.b) видно, що при вертикальній орієнтації магнітного поля збільшення напруженості $H_{0z} < H_R$ призводить до підвищення критичного хвильового числа k_c . Таким чином, при нестійкості Фарадея будуть виникати хвилі меншої довжини, ніж під час відсутності магнітного поля, що було підтверджено експериментально в роботі [62]. Горизонтальне стаціонарне магнітне поле має зворотній ефект, і збільшення його напруженості приводить до підвищення довжини хвиль при параметричній нестійкості.



a) $\omega = 100$ Гц; 1 – $h = 1$ см; 2 – $h = 0,5$ см; 3 – $h = 0,3$ см;

b) $h = 5$ см; 1 – $\omega = 60$ Гц; 2 – $\omega = 100$ Гц; 3 – $\omega = 150$ Гц

Рис. 2.11: Залежність критичної амплітуди механічних вібрацій (a) і критичного хвильового числа (b) від величини стаціонарного вертикального магнітного поля

Вплив стаціонарного магнітного поля на критичну амплітуду a_g механічних вібрацій має більш складний характер і залежить не тільки від орієнтації магнітного поля, але й від товщини шару рідини. Для відносно товстих шарів (>1 см у наших розрахунках) накладання вертикального магнітного поля $H_{0z} < H_R$ збільшує критичну амплітуду a_g механічних вібрацій, тобто підвищує поріг виникнення параметричної нестійкості, а для більш тонких шарів цей вплив є немонотонним (криві 2 і 3 на рис. 2.11.а). Таким чином, для тонких шарів ферорідини в слабкому вертикальному магнітному полі критична амплітуда a_g знижується, а в більш сильному – збільшується. Для випадку горизонтальної орієнтації поля, який розглядався в [86] було показано, що для товстих шарів ферорідини стаціонарне магнітне поле знижує критичну амплітуду механічних вібрацій, а для тонких – приводить до такої ж немонотонної залежності.

2.3 Випадок ідеальної рідини

Відповідна нелінійна задача полягає у визначенні розв'язків системи рівнянь в областях (1) – (2) (див. рис. 2.1)[50]:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.143)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla (p_0 + \psi^{(\rho)}) + \rho \vec{G} + \vec{M} \nabla H$$

$$\frac{dS}{dt} = 0; \quad S = S_0(T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H M_T dH = \text{const}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = -4\pi \operatorname{div} \left(\frac{M}{H} \vec{H} \right); \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0;$$

$$M = M(\rho, T, H); \quad \psi^{(\rho)} = \int_0^H (M - \rho M_\rho) dH$$

Граничні умови в задачі параметричної стійкості вільної поверхні є такими: кінематична та динамічна умови при $z = \zeta(x, y, t)$:

$$\langle v_n \rangle = 0 \quad (2.144)$$

$$\langle p_0 + \psi^{(p)} + 2\pi M_n^2 \rangle = -\sigma \operatorname{div} \vec{v}$$

умови для електромагнітного поля при $z = \zeta(x, y, t)$:

$$\langle B_n \rangle = 0; \langle \vec{H}_\tau \rangle = 0 \quad (2.145)$$

граничні умови на нескінченності при $|z| \rightarrow \infty$:

$$v^{(i)} = 0 \quad (2.146)$$

$$\vec{H}^{(i)} = \left(H_{0x}(t), H_{0y}(t), \frac{H_{0z}}{\mu_\infty^{(i)}} \right) = \vec{H}_\infty^{(i)}.$$

Тут $\langle a \rangle = a_2 - a_1$ - стрибок відповідних величин на поверхні розділу, i - індекс середовища (1 - для повітря, 2 - для намагнічуваної рідини), \vec{v} - швидкість, ρ - густина, p_0 - механічний тиск, M - намагніченість, $\psi^{(p)}$ - магнітострикційний тиск, \vec{H} - напруженість магнітного поля, S - масова густина ентропії, T - температура, σ - коефіцієнт поверхневого натягу.

2.3.1 Узагальнення інтеграла Коші - Лагранжа при врахуванні магнітокалоричного ефекту. Система рівнянь розглядуваної задачі має два перших інтеграла. По перше, для найбільш загального ізотропного закону намагнічування, при врахуванні магнітокалоричного ефекту, рух ідеальної однорідної рідини є адіабатичним, а не ізотермічним. Таким чином, має місце інтеграл адіабатичності в кожній із областей:

$$S_0(T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H M_T dH = \text{const}; \quad S_0(T) = c_V \ln(T) + \text{const} \quad (1.147)$$

де c_V - об'ємна теплоємність відповідного середовища.

Цей інтеграл дозволяє визначити температуру, як функцію напруженості магнітного поля:

$$T^{(i)} = T^{(i)}(\rho, H^{(i)}), \quad i = 1, 2$$

Тому намагніченість в кожній області може бути визначена, як функція напруженості магнітного поля:

$$M^{(i)} = M^{(i)}(\rho, T^{(i)}(H^i, \rho), H^{(i)}) = \tilde{M}^{(i)}(H^{(i)}), \quad i = 1, 2$$

Таким чином, пондеромоторна сила

$$M\nabla H = \nabla \int_0^H \tilde{M} dH$$

є потенціальною, так що у відповідності з теоремою Лагранжа рух рідини, що виникає із стану спокою, буде безвихровим:

$$\text{rot} \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \nabla \varphi,$$

де φ – потенціал швидкості. Таким чином, рівняння руху рідини допускають інтеграл Лагранжа - Коші:

$$\rho \varphi_t + \frac{\rho}{2} (\nabla \varphi)^2 - \rho Gz + p_0 + \psi^{(\rho)} - \int_0^H \tilde{M} dH = c(t) \quad (2.148)$$

2.3.2 Постановка задачі в термінах потенціалів швидкості та напруженості магнітного поля. У розглядуваному випадку неелектропровідної рідини

$$\text{rot} \vec{H} = 0,$$

так що магнітне поле можна представити у вигляді

$$\vec{H} = \nabla \Phi$$

де Φ – потенціал магнітного поля.

Таким чином, задачу (2.143) – (2.146) можна сформулювати у термінах потенціалів швидкості та напруженості магнітного поля у наступному вигляді:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2.149)$$

$$\Delta \Phi = -4\pi \text{div} \left[\frac{M(\rho, T(|\nabla \Phi|), |\nabla \Phi|) \nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right]$$

при $z = \zeta(x, y, t)$:

$$\langle 2\pi M_n^2 + \int \tilde{M} dH - \rho \varphi_t - \frac{\rho}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \rangle + G\zeta \langle \rho \rangle = -\sigma \text{div} \vec{n}$$

$$\zeta_t = \varphi_z^{(1)} - \varphi_x^{(1)} \zeta_x - \zeta_y \varphi_y^{(1)} = \varphi_z^{(2)} - \varphi_x^{(2)} \zeta_x - \zeta_y \varphi_y^2$$

$$\langle \mu \Phi_t \rangle = \zeta_x \langle \mu \Phi_x \rangle + \zeta_y \langle \mu \Phi_y \rangle$$

$$\langle \Phi_x \rangle + \zeta_x \langle \Phi_z \rangle = 0, \quad \langle \Phi_y \rangle + \zeta_y \langle \Phi_z \rangle = 0$$

при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\nabla \varphi^{(i)} \Big|_{|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi^{(i)} \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = \vec{H}_\infty^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

Тут μ - магнітна проникність.

Аналогічне формулювання використовувалось І. Є. Тараповим при розгляді задачі стійкості поверхні розділу магнітних рідин в стаціонарному магнітному полі [106]. Наш розгляд узагальнює цю задачу на випадок нестационарного магнітного поля та врахування магнітокалоричного ефекту. При цьому, усі результати про стійкість вільної поверхні у стаціонарному магнітному полі отримуються, як частковий випадок.

2.3.3 Формулювання лінеаризованої задачі. Однорідний рівноважний нестационарний стан визначається розв'язком:

$$\vec{v}^0 = 0, \quad \zeta^0 = 0, \quad \nabla \Phi_0^{(j)} = \vec{H}_\infty^{(j)}(t), \quad j = 1, 2.$$

Позначимо через $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ збурення потенціалу швидкості $\vec{H}' = \nabla \Phi' = \nabla \Phi - \vec{H}_\infty$ - збурення напруженості магнітного поля.

Для дослідження параметричної стійкості горизонтальної поверхні $z = 0$ лінеаризуємо задачу, припускаючи виконання умов для величин збурень

$$\frac{k}{2\pi} |\zeta|, |\zeta_x|, |\zeta_y|, \frac{|\vec{H}'|}{|\vec{H}_\infty|}, \frac{|\nabla \varphi'|^2}{|\varphi_t'|} \sim \varepsilon \ll 1$$

Таким чином, знехтуємо у рівняннях величинами порядку $O(\varepsilon^2)$.

Лінеаризована задача для потенціалів φ та Φ зводиться до наступної (штрихи для збурених величин опущені):

$$: \quad \Delta \varphi^{(1)} = 0, \quad \Delta \Phi^{(1)} = 0 \quad \text{при } z > 0 \quad (2.150)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Phi = -c_\infty \vec{H}_\infty \nabla (\vec{H}_\infty \nabla \Phi) \quad \text{при } z < 0$$

при $z = 0$:

$$\zeta_t = \varphi_z$$

$$\rho\varphi_t - \rho G\zeta - \sigma(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(\mu-1)^2}{\mu} H_{0z} (\Phi_z - \vec{H}_\infty \nabla \zeta) + \frac{(\mu-1)(\mu + c_\infty H_{0z}^2)}{\mu} (\vec{H}_\infty \nabla \Phi) \right\}$$

$$\mu\Phi_z - \Phi_z^{(1)} + c_\infty H_{0z} (\vec{H}_\infty \nabla \Phi) = (\vec{H}_\infty \nabla \zeta)(\mu-1)$$

$$\Phi_x - \Phi_x^{(1)} + H_{0z} \zeta_x \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) = 0$$

$$\Phi_y - \Phi_y^{(1)} + H_{0z} \zeta_y \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) = 0$$

при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\nabla\varphi|_{|z| \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad \nabla\Phi|_{|z| \rightarrow \infty} = 0$$

$$\text{Де } \varphi \equiv \varphi^{(2)}, \quad \Phi \equiv \Phi^{(2)}, \quad c_\infty = \frac{4\pi}{\mu_\infty H_\infty^2} \left\{ \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_\infty - \frac{T_\infty}{c_v \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\infty^2 - \left(\frac{M}{H} \right)_\infty \right\}$$

2.3.4 Метод розв'язку. Розв'язки задачі (2.150) відшукується у вигляді:

$$\zeta(t, x, y) = a(t) e^{i(\vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{k} = (k_x, k_y), \quad \vec{r} = (x, y); \quad (2.151)$$

$$z > 0: \quad \varphi^{(1)} = 0, \quad \Phi^{(1)}(t, x, y, z) = c^{(1)}(t) \psi^{(1)}(z) e^{i(\vec{k} \vec{r})}$$

$$z < 0: \quad \varphi(t, x, y, z) = b(t) \theta(z) e^{i(\vec{k} \vec{r})}, \quad \Phi(t, x, y, z) = c(t) \psi(z) e^{i(\vec{k} \vec{r})}$$

Тут k - хвильове число збурень, що виникають на вільній поверхні. При цьому ми нехтуємо рухом немагнітного середовища в області (1) (повітря).

В силу граничних умов задачі (1.150) задача зводиться до вивчення рівняння для амплітуди a збуреної вільної поверхні магнітної рідини.

$$\ddot{a} + 2\gamma\dot{a} + a \left\{ -kG + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu} \left[\frac{H_{0z}^2 \sqrt{1+c_{1\infty}} - H_\tau^2 \mu}{1 + \mu \sqrt{1+c_{1\infty}}} \right] \right\} = 0 \quad (2.152)$$

Тут

$$c_{1\infty} = \frac{4\pi}{\mu_\infty} \left\{ \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_\infty - \frac{T_\infty}{c_v \rho} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\infty^2 - \left(\frac{M}{H} \right)_\infty \right\}, \quad H_\tau = \frac{(\vec{H}_\infty \vec{k})}{k}$$

Поглинання поверхневих хвиль, відповідно до роботи [82] враховується доданком з коефіцієнтом γ :

$$\gamma = 2k^2 \frac{\eta}{\rho} \quad (2.153)$$

2.3.5 Дослідження рівняння для амплітуди збурень вільної поверхні.

Нехай θ - кут орієнтації вектора напруженості магнітного поля. Тоді:

$$H_{\infty z} = H_{\infty} \sin \theta, \quad H_{\infty \tau} = H_{\infty} \cos \theta \quad (2.154)$$

Рівняння (2.152) може бути записаним у вигляді:

$$\ddot{a} + 2\gamma\dot{a} + a \left\{ -kG + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2 (\mu_{\infty} - 1)^2}{4\pi\rho} H_{\infty}^2 \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_{\infty} \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right] \right\} = 0 \quad (2.155)$$

Рівняння коливань дисипативної системи з одним ступенем свободи у нестационарному магнітному та вібраційному полях приймає вигляд:

$$\ddot{a} + 2\gamma\dot{a} + aF(t) = 0 \quad (2.156)$$

де функція $F(t)$ в нашому випадку така:

$$F(t) = -kG(t) + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2 (\mu_{\infty} - 1)^2}{4\pi\rho} H_{\infty}^2(t) \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_{\infty} \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right]$$

В подальшому розглянемо випадок періодичної функції $F(t)$ з періодом T

У відсутності дисипації рівняння (2.155) зводиться до рівняння Мат'є-Хілла:

$$\ddot{a} + aF(t) = 0 \quad (2.157)$$

Якщо $\gamma \neq 0$, то рівняння (2.155) зводиться до вигляду (2.157) такою підстановкою

$$a(t) = e^{-\gamma t} u(t)$$

Якщо функція $F(t)$ є кусково-сталою, то рівняння (2.155) зводиться до рівняння Мейснера.

Особливий інтерес для застосувань складає випадок гармонійного збудження у системі, що відповідає таким видам нестационарного магнітного поля $H_\infty(t)$ та ефективного гравітаційного прискорення $G(t)$:

$$H_\infty(t) = H_{00} \left(1 + \frac{h_\tau}{H_{00}} \cos \omega_\tau t + \frac{h_n}{H_{00}} \cos \omega_n t \right), G = -g \left(1 + \frac{\omega_g^2 a_g}{g} \cos \omega_g t \right) \quad (2.158)$$

Тут h_τ та ω_τ – амплітуда і частота осциляцій дотичного до незбуреної поверхні компонент напруженості магнітного поля, h_n та ω_n – амплітуда і частота осциляцій нормальної складової магнітного поля, a_g та ω_g – позначають амплітуду та частоту модульованого гравітаційного прискорення.

Зазначимо, що амплітуди h_τ та h_n можна вважати в окремому випадку по порядку рівними:

$$h_\tau = O(\varepsilon^m), h_n = O(\varepsilon^m), m < 1/2$$

оскільки вони визначаються зовнішніми збудниками магнітного поля.

Тоді функція $F(t)$ зводиться до вигляду

$$F(t) = l + q_1 \cos \omega_e t + q_2 \cos \omega_\tau t + q_3 \cos \omega_n t,$$

де

$$l = kg + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2 (\mu_\infty - 1)^2}{4\pi\rho} H_{00}^2 \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_\infty \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right], \quad q_1 = -k\omega_g^2 a_g,$$

$$q_2 = -\frac{k^2 (\mu_\infty - 1)^2}{4\pi\rho} \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_\infty \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right] h_\tau^2$$

$$q_3 = -\frac{k^2 (\mu_\infty - 1)^2}{4\pi\rho} \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_\infty \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right] h_n^2$$

Таким чином, при гармонійному збудженні рівняння (2.157) є рівнянням Матьє-Хілла:

$$\ddot{a} + a(l + q_1 \cos \omega_e t + q_2 \cos \omega_\tau t + q_3 \cos \omega_n t) = 0, \quad (2.159)$$

якщо відношення частот ω_e, ω_τ та ω_n є раціональними числами.

В подальшому розглядається випадок $\omega_e = \omega_\tau = \omega_n$. Тоді рівняння (2.159) приймає вигляд рівняння Матъє:

$$\ddot{a} + a(l + q \cos \omega t) = 0, \quad (2.160)$$

де

$$l = kg + \frac{\alpha k^3}{\rho} - \frac{k^2(\mu_\infty - 1)^2}{4\pi\rho} H_{00}^2 \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_\infty \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right],$$

$$q = -k\omega_g^2 a_g - \frac{k^2(\mu_\infty - 1)^2}{4\pi\rho} \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \mu_\infty \sqrt{1 + c_{1\infty}}} \right] (h_\tau^2 + h_n^2)$$

Отже, як випливає із вищерозглянутого, стійкість вільної поверхні магнітної рідини визначається рівнянням Матъє, в котре входять два параметри q та l , які повністю визначають стійкість вільної поверхні. Площина (q, l) розділяється на області, які визначають стійкі та нестійкі режими коливань поверхні (діаграма Айнса – Стретта).

2.3.6 Випадок стаціонарного магнітного поля. У цьому випадку із рівняння (2.155) впливають відомі результати [70, 106] про стійкість поверхні у стаціонарному магнітному полі. Рівняння для амплітуди збурень вільної поверхні ідеальної магнітної рідини приймає вигляд

$$\ddot{a} + \omega^2(k)a = 0, \quad (2.161)$$

де

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2(\mu - 1)^2}{4\pi\rho(\mu + 1)} \left[\mu H_{\infty z}^2 - H_{\infty \tau}^2 \right] + kg$$

Умова нестійкості розв'язків (2.161) полягає у виконанні нерівності:

$$\omega^2(k) < 0 \quad (2.162)$$

Звідси випливає, що нестійкість вільної поверхні зумовлюється вертикальною компонентою напруженості магнітного поля $H_{\infty z}$ при перевищенні нею критичних значень:

$$H_{\infty z}^2 > H_R^2 = \frac{H_{\infty \tau}^2}{\mu} + \frac{4\pi}{(\mu-1)^2} \left(1 - \frac{1}{1+\mu}\right) \left(\sigma k + \frac{\rho g}{k}\right) \quad (2.163)$$

Найбільш небезпечними є збурення з довжиною хвильового вектора

$$k_R = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} \quad (2.164)$$

Таким чином, при

$$H_{\infty z}^2 > H_R^2 = \frac{H_{\infty \tau}^2}{\mu} + \frac{8\pi\sqrt{\rho g \sigma}}{(\mu-1)^2} \left(1 - \frac{1}{1+\mu}\right) \quad (2.165)$$

вільна поверхня перестає бути стійкою (нестійкість Розенцвейга). В цьому випадку горизонтальна складова магнітного поля стабілізуючим чином впливає на поверхню.

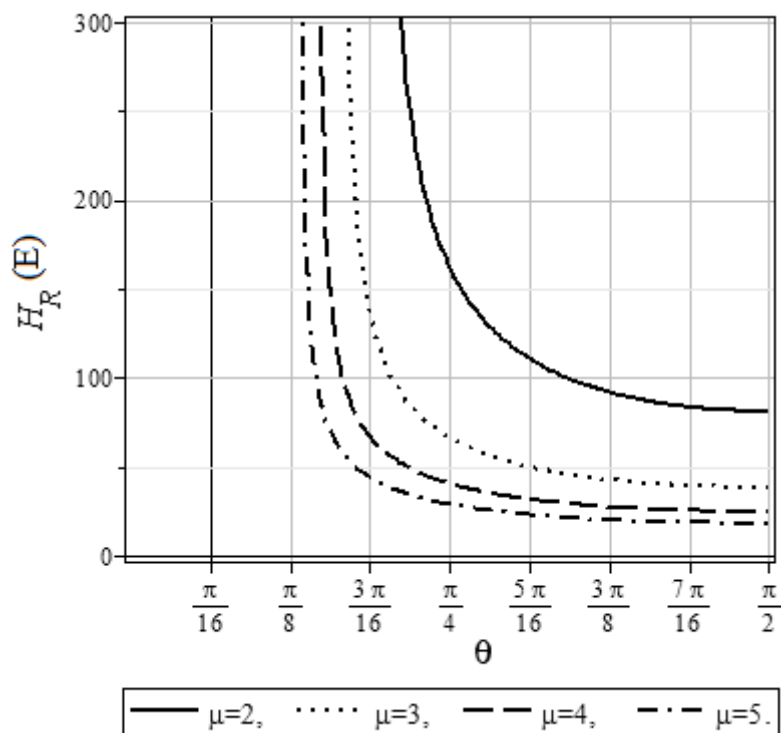


Рис 2.12: Залежність критичного значення напруженості магнітного поля H_R від кута θ орієнтації поля для різних значень магнітної проникності рідини.

З використанням (2.154) умова нестійкості (2.162) приводиться до такого вигляду:

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho} H_\infty^2 \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1+\mu} \right] + kg < 0 \quad (2.166)$$

Рис. 2.12 демонструє, що зі зростанням горизонтальної компоненти магнітного поля можливо значно підвищити критичні значення магнітного поля нестійкості Розенцвейга. Нестійкість вільної поверхні взагалі не виникає для тих кутів орієнтації магнітного поля, коли умова (2.166) не виконується.

2.3.7 Випадок спільного впливу механічних вібрацій та стаціонарного магнітного поля. Розглянемо окремо випадок, коли

$$H_\infty = const, \quad G = g \left(1 - \frac{\omega_g^2 a_g}{g} \cos \omega_g t \right),$$

тобто механічні вібрації вільної поверхні відбуваються у сталому магнітному полі.

Тоді рівняння (2.160) підстановкою $t \rightarrow \omega_g t / 2$ зводиться до вигляду:

$$\ddot{a} + (\delta + 2\varepsilon \cos 2t) = 0 \quad (2.167)$$

$$\delta = \frac{4}{\omega_g^2} \left(4k^4 \frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{\sigma k^3}{\rho} - \frac{k^2(\mu-1)^2}{4\pi\rho} H_\infty^2 \left[\sin^2 \theta - \frac{1}{1+\mu} \right] + kg \right), \quad \varepsilon = -2ka_g$$

Розглянемо магнітну рідину на основі води з такими типовими значеннями параметрів: $\rho = 1,19 \left(\frac{\Gamma}{\text{см}^3} \right)$ – густина; $\eta = 0,07 (\text{П})$ – в'язкість; $\sigma = 26 \left(\frac{\text{дин}}{\text{см}} \right)$ – коефіцієнт поверхневого натягу.

Із рис. 2.13 видно, що у випадку коли вертикальна компонента магнітного поля не перевищує критичне значення H_R , на вільній поверхні з'являються хвилі, які відповідають нестійкості Фарадея при механічних вібраціях. При $H_z > H_R$ виникає нестійкість Розенцвейга і довжина збуджуваних хвиль стрімко падає.

Результати розрахунків, представлені на рис. 2.13, підтверджують висновки роботи [88], де вперше показана можливість відтермінування виникнення нестійкості Розенцвейга за рахунок відповідної модуляції гравітаційного прискорення.

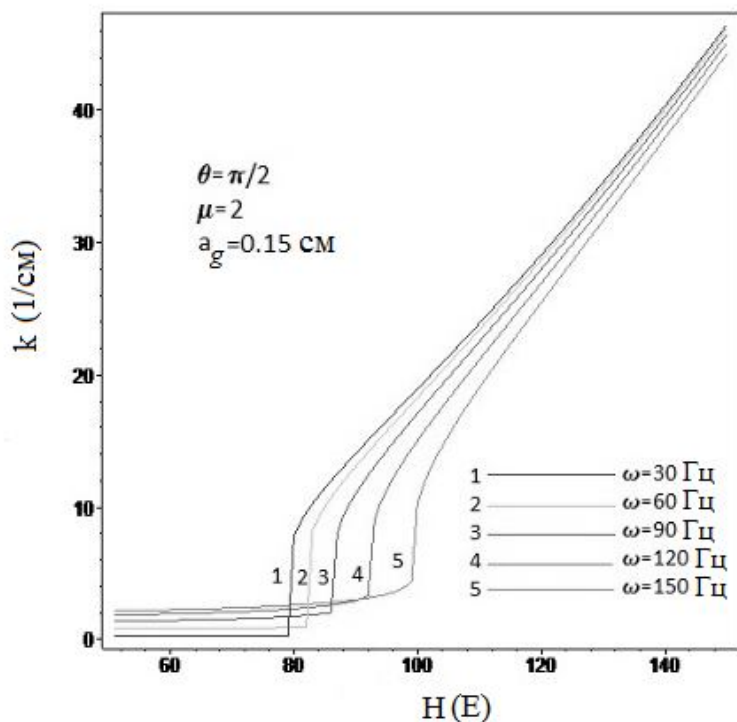


Рис. 2.13: Залежність хвильового числа збурень, виникаючих на вільній поверхні магнітної рідини, від величини вертикального магнітного поля для різних значень частоти механічних вібрацій.

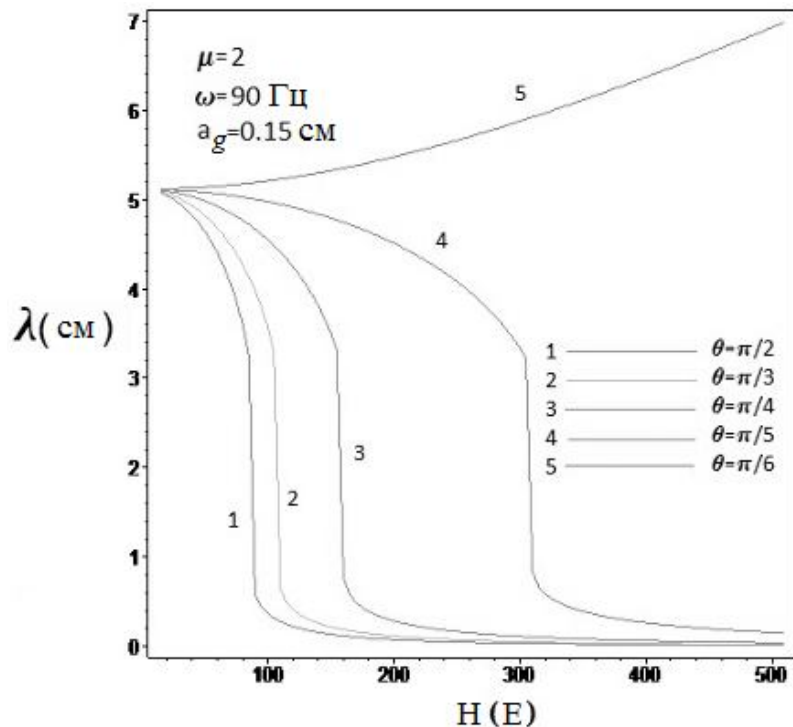


Рис. 2.14: Залежність довжини збуджуваних хвиль при механічних вібраціях від напруженості магнітного поля при різній орієнтації поля.

Крім того, можна зробити висновок, що зі зростанням частоти ефективного прискорення, довжина хвиль, збуджуваних на вільній поверхні, зменшується.

Із рис. 2.14 випливає, що горизонтальна до вільної поверхні складова магнітного поля може мати стабілізуючий ефект на стійкість вільної поверхні при наявності вертикальних механічних вібрацій [86].

2.4 Основні висновки й результати розділу

Досліджена задача параметричної стійкості вільної поверхні безмежного шару в'язкої нелінійно намагнічуваної рідини при впливі механічних вібрацій і довільно орієнтованого нестационарного магнітного поля. Показано, що при нехтуванні теплопровідністю рідини ця задача зводиться до дослідження стійкості для рідини зі спеціальним рівнянням магнітного стану, що залежать тільки від напруженості поля. Для випадку магнітного поля, що складається з постійної й осцилюючої частин, задача в лінійному наближенні зведена до рівняння для квадратичного пучка матриць, де в якості параметра виступає амплітуда коливань поля. Встановлено, що на відміну від випадку механічних вібрацій, для тільки осцилюючого магнітного поля найнебезпечнішими є гармонічні коливання. З додаванням стационарного поля, починають проявлятися зони субгармонічної нестійкості. Збільшення стационарного поля може призводити до виникнення бікритичних точок, тобто коли одній критичній амплітуді поля відповідають два різних хвильових числа (гармонічних та субгармонічних коливань). Подальше збільшення постійної компоненти поля може призводити до того, що субгармонічні коливання стають більш небезпечними. Встановлено залежність критичної амплітуди магнітного поля і критичного хвильового числа від кута орієнтації поля. При відхиленні поля від вертикального або горизонтального положення для збудження нестійкості потрібно прикласти поле більшої амплітуди, оскільки вертикальна й горизонтальна складові магнітного поля можуть компенсувати дію один одного.

Для нелінійно намагнічуваної рідини показано можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні в результаті гармонійного збурення температури за рахунок магнітокалоричного ефекту.

РОЗДІЛ 3

**НЕСТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ І ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬ
НА ОБМЕЖЕНІЙ ПОВЕРХНІ РОЗДІЛУ
НАМАГНІЧУВАНИХ РІДИН**

В даному розділі досліджується стійкість рівноваги двошарової системи намагнічуваних капілярних рідин, розділених тонкою пластиною з отвором, які взаємодіють з однорідним магнітним полем. Розглянуто близьку по постановці задачу стійкості двошарової системи рідин, розташованих в соленоїді з прямокутним і круговим поперечним перерізом. Виявлено характерні особливості поведінки даної системи, обумовлені обмеженістю поверхні розділу рідин. Досліджено параметричні коливання намагнічуваної рідини в соленоїді з круговим перерізом в осцилюючому магнітному полі

3.1 Двошарова система магнітних рідин, розділених тонкої горизонтальною пластиною з круговим отвором

3.1.1 Постановка задачі. Розглянемо двошарову систему незмішуваних рідин, розділених горизонтальною пластиною з отвором (див. рис. 3.4).

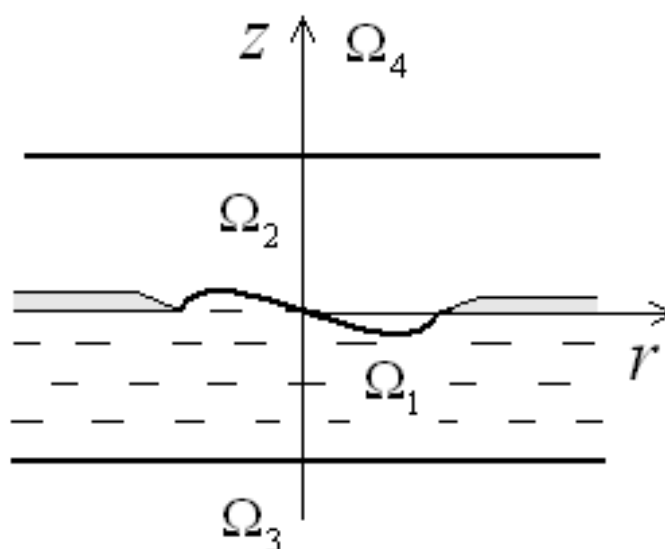


Рис. 3.4: Схема двошарової системи незмішуваних ферорідин

Позначимо через Ω_1, Ω_2 області, які займають нижня та верхня рідини в стані рівноваги, через Ω_3, Ω_4 – напівнескінченні області під нижньою й над верхньою рідинами. Нехай h_1, h_2 – товщина нижнього й верхнього шарів рідин, відповідно. Товщину пластини δ , що розділяє рідини, будемо вважати малою в порівнянні з h_1, h_2 . Це дозволяє ототожнювати пластину з її серединною поверхнею, вважаючи $\delta = 0$.

Середовища в кожній з областей $\Omega_k, k \in \overline{1,4}$ будемо вважати однорідно намагнічуваними. Зв'язок між індукцією \vec{B} та напруженістю \vec{H} магнітного поля в Ω_k запишемо у вигляді

$$\vec{B}^{(k)} = \mu_0 \mu^{(k)}(H^{(k)}) \vec{H}^{(k)} \quad k \in \overline{1,4}. \quad (3.1)$$

Тут μ_0 – абсолютна магнітна проникність вакууму, $\mu^{(k)}(H^{(k)})$ – відносна магнітна проникність k -го середовища. Функції $\mu^{(k)} : H \rightarrow \mu^{(k)}(H), k = \overline{1,4}$ вважаються заданими. В (3.1) і скрізь далі верхній індекс у круглих дужках означає номер області, до якої відносяться та або інша величина.

Горизонтальна поверхня розділу $z = 0$ й однорідне магнітне поле відповідають одному з можливих станів рівноваги рідин. Розглянемо рух рідин поблизу цього рівноважного стану. В'язкістю рідин будемо нехтувати. У цьому випадку еволюція поверхні розділу Γ визначається потенціальними складовими поля швидкостей $\vec{v}^{(k)} = \nabla(\partial\varphi^{(k)} / \partial t), k = 1, 2$, де $\varphi^{(k)}(t, \vec{x})$ – потенціал малих зміщень частинок k -ї рідини. Позначимо через $\zeta(t, x, y)$ відхилення поверхні Γ від горизонтального рівня, через $\psi^{(k)}(t, \vec{x}), k = \overline{1,4}$ – збурення потенціалу магнітного поля в Ω_k . У лінійному наближенні рух рідин поблизу рівноважного стану описується наступною системою рівнянь (відносно φ, ζ, ψ):

$$\Delta\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_k, k \in \overline{1,2}; \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z} = \zeta \quad \text{на} \Gamma; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad \text{на} \quad S_{12} \cup S_{13}, \quad \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \text{на} \quad S_{12} \cup S_{24}; \quad (3.4)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma(-\Delta_\Gamma + b)\zeta - B_0 \left(q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = c_\Gamma(t) \quad \text{на} \Gamma; \quad (3.5)$$

$$\zeta = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma; \quad (3.6)$$

$$\operatorname{div} \mu_k \widehat{\nabla}^{(k)} \psi^{(k)} = 0, \quad \text{в} \quad \Omega_k, \quad k \in \overline{1,4}; \quad (3.7)$$

$$\psi^{(1)} - \psi^{(2)} = (H_0^{(1)} - H_0^{(2)})\zeta, \quad \mu_1 q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \mu_2 q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на} \Gamma \quad (3.8)$$

$$\psi^{(j)} = \psi^{(k)}, \quad \mu_j q_j \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial z} = \mu_k q_k \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial z} \quad \text{на} \quad S_{jk}, \quad jk = 12, 13, 24; \quad (3.9)$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty; \quad (3.10)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y), \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta^1(x, y) \quad \text{на} \Gamma; \quad (3.11)$$

$$b := \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\sigma}, \quad \widehat{\nabla}^{(k)}(\cdot) := \nabla(\cdot) + \frac{\mu_H^{(k)}}{\mu_k} \vec{H}_0^{(k)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}, \quad q_k := 1 + \frac{\mu_H^{(k)} H_0^{(k)}}{\mu_k},$$

$$\mu_k := \mu^{(k)}(H_0^{(k)}), \quad \mu_H^{(k)} := \left. \frac{d\mu^{(k)}}{dH} \right|_{H=H_0^{(k)}}, \quad k \in \overline{1,4}.$$

Тут ρ_k – густина k -ї рідини, σ – коефіцієнт поверхневого натягу на поверхні розділу рідин Γ ; $H_0^{(k)} (= const)$ – напруженість магнітного поля в області Ω_k в стані рівноваги; S_{jk} – тверда поверхня розділу j -ї та k -ї областей; Δ_Γ – оператор Лапласа на Γ ; ζ^0, ζ^1 – початкові відхилення й швидкості точок поверхні розділу рідин, $c_\Gamma(t)$ – довільна функція часу t .

Функція $\zeta(t, x, y)$ повинна задовольняти умові

$$\int_\Gamma \zeta(t, x, y) d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.2) – наслідок потенціальності руху й умови нестисливості рідин. Рівності (3.3) є лінеаризовані кінематичні умови на поверхні Γ , рівності (3.4) – умови непроникності твердих поверхонь, змочених рідинами. Рівняння (3.5)

отримане лінеаризацією динамічної умови для стрибка нормальних напружень на поверхні Γ , що обумовлені капілярними силами й намагнічуванням рідин. Умова (3.6) означає, що контур $\partial\Gamma$, що збігається з гострою кромкою пластини, у процесі коливань рідин залишається нерухомим. Ця умова підтверджується експериментально для досить малих зовнішніх збурень. Рівняння (3.7)- (3.10) отримані лінеаризацією рівнянь і граничних умов для потенціалу магнітного поля.

Вільні коливання рідин описуються розв'язками задачі (3.2) – (3.10), що залежать від часу по закону

$$(\zeta, \varphi, \psi) = (\zeta(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})) \exp(i\omega t) \quad (3.13)$$

де $\zeta(x, y), \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ – моди коливань поверхні розділу, потенціалу зміщення частинок рідин і потенціалу збурень напруженості магнітного поля, ω – кругова частота коливань. Підставляючи (3.13) в (3.5), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma(-\Delta_\Gamma + b)\zeta - B_0 \left(q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = \\ = \lambda(\rho_1 \varphi^{(1)} - \rho_2 \varphi^{(2)}) \quad \text{на } \Gamma, \quad (\lambda = \omega^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Початково – крайова задача і відповідна спектральна задача про малі коливання магнітної рідини, з несуттєвими відмінностями від (3.2) – (3.14), розглядались в роботі [65]. Зокрема встановлено, що спектральна задача (3.2) – (3.10), де замість (3.5) слід прийняти (3.14), має дискретний спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ дійсних власних значень, усі власні значення λ_j кінцевої кратності, причому $\lambda_j \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$. Також показано, що власні функції $\zeta_j(x, y)$, які відповідають власним значенням λ_j , створюють базис $\{\zeta_j(x, y)\}_{j=1}^\infty$ в гільбертовому просторі $H(\Gamma)$ функцій, ортогональних константам в $L_2(\Gamma)$.

3.1.2 Випадок кругового отвору. Розглянемо випадок кругового отвору радіуса R . Введемо циліндричну систему координат (r, ϑ, z) . Перейдемо до безрозмірних змінних, вважаючи

$$\bar{\zeta}(\bar{r}, \vartheta) = \zeta(r/R, \vartheta) / R, \quad \bar{\varphi}(\bar{r}, \vartheta) = \varphi(r/R, \vartheta) / R^2, \quad (3.15)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \sigma / (\rho_1 R^3), \quad \bar{r} = r / R, \quad \bar{h}_1 = h_1 / R$$

Усі вирази, що наведені нижче до підрозділу 3.2.4, записані в безрозмірній формі, причому риска в позначеннях безрозмірних величин відкинута.

В безрозмірних змінних практично всі рівняння, наведені вище, зберігають свій вигляд. Виключення складають перша із умов (3.8) і умови (3.5), (3.14). Умови (3.8) у змінних (3.15) мають вигляд:

$$\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \zeta, \quad \mu_1 q_1 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} - \mu_2 q_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (3.16)$$

Переходячи до безрозмірних змінних в (3.14), одержимо:

$$(-\Delta_\Gamma + \text{Bo})\zeta - W \left(q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = \lambda (\varphi^{(1)} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \varphi^{(2)}) \text{ на } \Gamma, \quad (3.17)$$

$$\text{Bo} := \frac{g(\rho_1 - \rho_2)R^2}{\sigma}, \quad W := \frac{B_0^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 \sqrt{q_1 q_2} R}{\mu_0 \mu_1 \mu_2},$$

де параметри Bo (– число Бонда) і W характеризують відношення сил тяжіння і поляризаційних сил, що обумовлені магнітним полем, до капілярних сил, відповідно.

Відзначимо, що спектральна крайова задача інваріантна щодо поворотів системи координат на довільний кут ϑ_0 і, окрім того, допускає поділ змінних. Це дозволяє відшукувати функції $\zeta(r, \vartheta)$ у вигляді:

$$\zeta(r, \vartheta) = \zeta_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(r) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0)) \quad (3.18)$$

В аналогічній формі представимо функції $\varphi^{(k)}(r, \vartheta, z)$ и $\psi^{(k)}(r, \vartheta, z)$:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(r, \vartheta, z) &= \varphi_0^{(k)}(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(r, z) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0)), \quad k = 1, 2, \\ \psi^{(k)}(r, \vartheta, z) &= \psi_0^{(k)}(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^{(k)}(r, z) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0)), \quad k = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Функції $\zeta_n(r)$, продовжені нулем на напівнескінченний інтервал $[1, \infty)$, представимо у вигляді розкладання в інтеграл Ганкеля (див.[20]):

$$\int_0^\infty J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) s ds = \begin{cases} \zeta_n(r) & (0 < r < 1), \\ 0 & (1 < r < \infty). \end{cases} \quad (3.20)$$

Скориставшись зворотним перетворенням Ганкеля, отримаємо:

$$\tilde{\zeta}_n(s) = \int_0^1 J_n(s\tau) \zeta_n(\tau) \tau d\tau \quad (0 < s < \infty) \quad (3.21)$$

Функції $\varphi_n^{(k)}(r, z) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0))$ є розв'язками крайових задач (3.2), (3.3) при $\zeta = \zeta_n(r) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0))$. Ці розв'язки знаходяться з використанням перетворень Ганкеля:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(r, z) &= \int_0^\infty \frac{\text{ch}((h_1 + z)s)}{\text{sh}(h_1 s)} J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) ds \quad (0 < r < \infty, -h_1 < z < 0), \\ \varphi_n^{(2)}(r, z) &= -\int_0^\infty \frac{\text{ch}((h_2 - z)s)}{\text{sh}(h_1 s)} J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) ds \quad (0 < r < \infty, 0 < z < h_2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Функції $\psi_n^{(k)}(r, z) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0))$ є розв'язками крайових задач (3.6)–(3.10) при $\zeta = \zeta_n(r) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0))$ в умовах (3.8). Нагадаємо, що при переході до безрозмірних змінних умова (3.8) набуває вигляду (3.15). З огляду на це і застосовуючи перетворення Ганкеля по змінній r до рівнянь і граничних умов (3.6)–(3.10), отримаємо одномірні (по змінній z) крайові задачі, розв'язки яких виписуються в явному вигляді. Після застосування до цих розв'язків зворотного перетворення Ганкеля, функції $\psi_n^{(k)}(r, z)$ набудуть виду:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(r, z) &= \int_0^\infty A_n^{(1)}(s) \left[\text{ch} \frac{(h_1 + z)s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \text{sh} \frac{(h_1 + z)s}{\sqrt{q_1}} \right] J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) s ds, \\ \psi_n^{(2)}(r, z) &= \int_0^\infty A_n^{(2)}(s) \left[\text{ch} \frac{(h_2 - z)s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2} \sqrt{\frac{q_4}{q_2}} \text{sh} \frac{(h_2 - z)s}{\sqrt{q_2}} \right] J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) s ds, \\ \psi_n^{(3)}(s, z) &= \int_0^\infty A_n^{(3)}(s) \exp \frac{(h_1 + z)s}{\sqrt{q_3}} J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) s ds, \\ \psi_n^{(4)}(s, z) &= \int_0^\infty A_n^{(4)}(s) \exp \frac{(h_2 - z)s}{\sqrt{q_4}} J_n(rs) \tilde{\zeta}_n(s) s ds, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$A_n^{(1)}(s) = A_n^{(3)}(s) = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{q_2}}{\mu_1} \frac{S_2(s)}{D(s)}, \quad A_n^{(2)}(s) = A_n^{(4)}(s) = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{q_1}}{\mu_2} \frac{S_1(s)}{D(s)},$$

$$D(s) = \mu_1\sqrt{q_1}S_1(s)C_2(s) + \mu_2\sqrt{q_2}S_2(s)C_1(s),$$

$$C_1(s) = \operatorname{ch} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \operatorname{sh} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}}, \quad C_2(s) = \operatorname{ch} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2} \sqrt{\frac{q_4}{q_2}} \operatorname{sh} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}},$$

$$S_1(s) = \operatorname{sh} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} \operatorname{ch} \frac{h_1 s}{\sqrt{q_1}}, \quad S_2(s) = \operatorname{sh} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}} + \frac{\mu_4}{\mu_2} \sqrt{\frac{q_4}{q_2}} \operatorname{ch} \frac{h_2 s}{\sqrt{q_2}}.$$

Підставляючи вирази (3.18), (3.19) в (3.17) і враховуючи при цьому (3.22), (3.23), отримаємо інтегро-диференціальне рівняння відносно $\zeta_n(r)$ зі спектральним параметром λ :

$$\begin{aligned} & -L_n \zeta_n(r) + \operatorname{Bo} \zeta_n(r) - W \int_0^\infty \frac{S_1(s)S_2(s)}{D(s)} J_n(rs) s^2 \int_0^1 J_n(s\tau) \zeta_n(\tau) \tau d\tau ds = \\ & = \lambda \int_0^\infty (\operatorname{cth}(sh_1) + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cth}(sh_2)) J_n(rs) s \int_0^1 J_n(s\tau) \zeta_n(\tau) \tau d\tau ds \quad (0 < r < 1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

Диференціальний оператор L_n в (3.24) визначений наступним виразом:

$$L_n \zeta := \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} - \frac{1}{r^2} \zeta$$

Для побудови розв'язків рівняння (3.24) розглянемо спочатку допоміжну спектральну крайову задачу (відносно $u(r, \vartheta), v, \eta = \operatorname{const}$);

$$-\Delta_\Gamma u(r, \vartheta) + \eta = v u(r, \vartheta) \quad \text{в} \quad \Gamma = \{(r, \vartheta) : 0 < r < 1, 0 < \vartheta < 2\pi\}, \quad (3.25)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \quad \int_\Gamma u d\Gamma = 0.$$

Задача (3.25) має дискретний спектр власних значень $\{v_k\}_{k=1}^\infty$, усі власні значення v_k додатні, кінцевої кратності, $v_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$; власні функції $u_j(r, \vartheta)$ створюють ортогональний базис $\{u_j(r, \vartheta)\}_{k=1}^\infty$ у просторі $H(\Gamma)$ (див. [21, 24]).

У розглядаємому випадку власні значення й власні функції задачі (3.25) ви-

значаються в явному вигляді:

$$v_{nj} = (\alpha_{nj})^2, \quad u_{0j}(r) = k_{0j}(J_0(\alpha_{0j}r) - J_0(\alpha_{0j})), \quad (3.26)$$

$$u_{nj}(r, \vartheta) = k_{nj}J_n(\alpha_{nj}r)\cos n(\vartheta - \vartheta_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots,$$

де $J_n(\cdot)$ – функція Бесселя 1-го роду n -го порядку, ϑ_0 – довільна константа, k_{nj} – нормуючі коефіцієнти, α_{nj} , – додатні корені рівнянь:

$$2J_1(\alpha_{0j}) / \alpha_{0j} - J_0(\alpha_{0j}) = 0, \quad J_n(\alpha_{nj}) = 0, \quad n, j = 1, 2, \dots$$

Тут і далі, на відміну від попереднього розділу, використовується подвійна індексація власних значень і власних функцій задачі (3.25).

Відзначимо, що корені першого з рівнянь (3.26) у точності збігаються з коренями другого рівняння (3.26) при $n = 2$, тобто $\alpha_{0j} = \alpha_{2j} \quad \forall j = 1, 2, \dots$, що впливає з рекурентного співвідношення для функцій Бесселя: $J_n(r) = 2(n-1)J_{n-1}(r)/r - J_{n-2}(r)$ при $n = 2$.

Відзначимо також, що функції $u_{nj}(r, \vartheta)$ є лінійною комбінацією власних функцій $u_{nj}^c(r, \vartheta)$ і $u_{nj}^s(r, \vartheta)$,

$$\left. \begin{array}{l} u_{nj}^c(r, \vartheta) \\ u_{nj}^s(r, \vartheta) \end{array} \right\} := k_{nj}J_n(\alpha_{nj}r) \begin{cases} \cos(n\vartheta), \\ \sin(n\vartheta). \end{cases}$$

Наближені розв'язки інтегро-диференціального рівняння (3.24) будемо відшукувати за допомогою методу Гальоркіна. Представимо $\zeta_n(r)$ у вигляді відрізка ряду

$$\zeta_n \approx \zeta_n^N(r) = \sum_{k=1}^N a_{nk}^N u_{nk}(r), \quad u_{nk}(r) := k_{nk}J_n(\alpha_{nk}r) \quad (3.27)$$

де a_{nk}^N – заздалегідь невідомі коефіцієнти, а число членів N у правій частині рівності (3.27) підбирається з умов практичної збіжності процесу розрахунків. Дотримуючись стандартної процедури методу Гальоркіна, підставимо (3.27) в (3.24). Помноживши обидві частини отриманої рівності на функції $u_{nj}(r)$ і інтегруючи по

r на відрізку $[0,1]$, прийдемо до алгебраїчної спектральної задачі:

$$(B_n + \text{Bo}D_n - WM_n)a_n = \lambda_n^N C_n a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$B_n := [b_{jk}]_{j,k=1}^N, \quad C_n := [c_{jk}]_{j,k=1}^N, \quad D_n := [d_{jk}]_{j,k=1}^N, \quad M_n := [m_{jk}]_{j,k=1}^N \quad (3.28)$$

$$a_n := (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^N)^\tau$$

Елементи матриць B_n і D_n мають вигляд:

$$b_{jk} = (\mathfrak{a}_{nj})^2 d_{jk}, \quad d_{jk} := \frac{1}{2} (k_{nj})^2 J_{n+1}^2(\mathfrak{a}_{nj}) \delta_{jk}, \quad j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Елементи матриці C_n і D_n представляються у вигляді інтегралів

$$c_{jk} = k_{nj} k_{nk} \int_0^\infty \left[\text{cth}(h_1 s) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{cth}(h_2 s) \right] f_{nj}(s) f_{nk}(s) ds, \quad j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.30)$$

$$m_{jk} = k_{nj} k_{nk} \int_0^\infty \frac{S_1(s) S_2(s)}{D(s)} f_{nj}(s) f_{nk}(s) s^2 ds, \quad j, k \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.31)$$

де

$$f_{0j}(s) := \frac{k_{0k} \mathfrak{a}_{0j} J_1(\mathfrak{a}_{0j}) J_2(s)}{s^2 - \mathfrak{a}_{0j}^2}, \quad f_{nj}(s) := -\frac{k_{nj} \mathfrak{a}_{nj} J_{n+1}(\mathfrak{a}_{nj}) J_n(s)}{s^2 - \mathfrak{a}_{nj}^2} \quad (n \neq 0)$$

Позначимо через $\lambda_{nj}^N, a_{nj} := (a_{nj}^1, a_{nj}^2, \dots, a_{nj}^N)^\tau, j \in \overline{1, N}$ j -е власне значення й j -й власний вектор спектральної задачі (3.28). Власні значення λ_{nj}^N приймаються далі як наближені власні значення спектральної задачі про вільні коливання рідин.

Будемо вважати, що власні значення λ_{nj}^N при кожному n впорядковані по j , так що $\lambda_{n1}^N \leq \lambda_{n2}^N \leq \dots \leq \lambda_{nN}^N$. Наближені вирази для власних мод коливань поверхні розділу рідин мають вигляд:

$$\zeta_{nj}(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}(r, \vartheta), \quad u_{nk}(r, \vartheta) := u_{nk}(r) \cos(n(\vartheta - \vartheta_0)), \quad j \in \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Функції $\zeta_{nj}(r, \vartheta)$ є лінійними комбінаціями функцій

$$\zeta_{nj}^c := \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}^c(r, \vartheta), \quad \zeta_{nj}^s := \sum_{k=1}^N a_{nj}^k u_{nk}^s(r, \vartheta), \quad j \in \overline{1, N}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Власні вектори задачі (3.28) можна вибрати так, щоб виконувалися умови:

$$\sum_{p,q=1}^N c_{pq} a_{nj}^p a_{nk}^q = \delta_{jk}, \quad \sum_{p,q=1}^N b_{pq} a_{nj}^p a_{nk}^q = \lambda_{nj} \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \overline{1, N}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Функції $\zeta_{nj}^c, \zeta_{nj}^s$ будуть при цьому задовольняти умовам, аналогічним (3.16).

3.1.3 Розв'язок еволюційної задачі. У загальному випадку спектр задачі (3.28) при кожному n може мати N_n^- від'ємних, N_n^0 нульових і $N_n^+ = N - N_n^- - N_n^0$ додатних власних значень,

$$\lambda_{nj}^- = \lambda_{nj}^N < 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^-}, \quad \lambda_{nj}^0 = \lambda_{n(N^+ + j)}^N = 0 \quad \forall j \in \overline{1, N^0}, \quad (3.35)$$

$$\lambda_{nj}^+ = \lambda_{n(N^+ + N^0 + j)}^N = 0 \quad \forall j \in \overline{1, N^+}.$$

Власні моди коливань, що відповідають власним значенням λ_{nj}^\pm , будемо позначати через $\zeta_{nj}^{c\pm}, \zeta_{nj}^{s\pm}$, а власним значенням λ_{nj}^0 – через $\zeta_{nj}^{c0}, \zeta_{nj}^{s0}$. Введемо також позначення:

$$\gamma_{nj} := |\lambda_{nj}^-|^{1/2} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^-}, \quad \omega_{nj}^+ := (\lambda_{nj}^+)^{1/2} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, N_n^+}.$$

Наближений розв'язок еволюційної задачі (3.2) – (3.11) представляється у вигляді:

$$\begin{aligned} \zeta(t, r, \vartheta) &\simeq \zeta^N(t, r, \vartheta) = + \sum_{j=1}^{N_n^0} \left[(\alpha_{nj}^{c0} \zeta_{nj}^{c0} + \alpha_{nj}^{s0} \zeta_{nj}^{s0}) + (\beta_{nj}^{c0} \zeta_{nj}^{c0} + \beta_{nj}^{s0} \zeta_{nj}^{s0}) t \right] + \quad (3.36) \\ &= \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_{j=1}^{N_n^-} \left[(\alpha_{nj}^{c-} \zeta_{nj}^{c-} + \alpha_{nj}^{s-} \zeta_{nj}^{s-}) \gamma_{nj} t + \frac{1}{\gamma_{nj}} (\beta_{nj}^{c-} \zeta_{nj}^{c-} + \beta_{nj}^{s-} \zeta_{nj}^{s-}) \gamma_{nj} t \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N_n^+} \left[\frac{1}{2} (\alpha_{nj}^{c+} \zeta_{nj}^{c+} + \alpha_{nj}^{s+} \zeta_{nj}^{s+}) \cos \omega_{nj}^+ t + \frac{1}{\omega_{nj}^+} (\beta_{nj}^{c+} \zeta_{nj}^{c+} + \beta_{nj}^{s+} \zeta_{nj}^{s+}) \sin \omega_{nj}^+ t \right] \right\}. \end{aligned}$$

Тут $\alpha_{nj}^c, \alpha_{nj}^s$ і $\beta_{nj}^c, \beta_{nj}^s$ – коефіцієнти розкладень у ряди Фур'є функцій $\zeta^0(r, \vartheta)$ і $\zeta^1(r, \vartheta)$ в початкових умовах (3.10), (3.11) по системі базисних функцій $\{u_{nj}^c(r, \vartheta), u_{nj}^s(r, \vartheta)\}_{j=1}^{\infty}$.

В аналогічній формі можна представити потенціали зсувів часток рідин і збурень магнітного поля.

Як видно із наведених виразів, при наявності від'ємних λ_{nj}^- або нульових λ_{nj}^0 власних значень початкові збурення поверхні розділу рідин необмежено зростають з часом t . Необмежене зростання пояснюється тим, що в прийнятій математичній моделі не враховуються нелінійні ефекти. Наведений розв'язок (3.36) описує початкову стадію еволюції поверхні розділу рідин у закритичному магнітному полі. Безрозмірні величини $\gamma_{nj}, \omega_{nj}^+$ в (3.36) мають при цьому фізичний зміст інкремента росту збурень і кругової частоти коливань, відповідно.

При наявності тільки додатних власних значень $\lambda_{nj} > 0$ малі початкові збурення рівноважного стану рідин залишаються малими $\forall t > 0$. Таким чином, про стійкість (або нестійкості) рівноважного стану рідин можна судити за знаком найменшого власного значення $\lambda_{n^*j^*}$:

$$\lambda_{n^*j^*} := \min_{n,j} \lambda_{nj} > 0 (< 0) \text{ – умова стійкості (нестійкості)}. \quad (3.37)$$

Рівняння $\lambda_{n^*j^*} = 0$ визначає границю області стійкості рівноважного стану рідин в просторі фізичних параметрів системи.

3.1.4 Чисельні результати. Будемо вважати, що рідина в області Ω_1 намагнічується за законом Ланжевена, а намагніченість усіх інших середовищ нехтовно мала:

$$M^{(1)} = M_s L \left(\frac{3\chi_0 H^{(1)}}{M_s} \right), \quad L(\xi) := \text{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi}, \quad M^{(k)} = 0 \quad \forall k \in \overline{2,4}, \quad (3.38)$$

Тут M_s – намагніченість насичення, $L(\xi)$ – функція Ланжевена, χ_0 – магнітна сприйнятливість рідини в Ω_1 при $H = 0$. Введемо безрозмірні індукцію й напруженість магнітного поля, вважаючи

$$\bar{B} = \frac{B}{\mu_0 M_s}, \quad \bar{H}^{(k)} = \frac{H^{(k)}}{M_s^{(k)}} = \bar{B} - \bar{M}^{(k)} \quad \forall k \in \overline{1,4}, \quad (3.39)$$

$$\bar{M}^{(1)} = L(3\chi_0 \bar{H}^{(1)}), \quad \bar{M}^{(k)} = 0 \quad \forall k \in \overline{2,4}.$$

Величини μ_k, q_k в розглянутому випадку мають вигляд:

$$\mu_1(\bar{H}_0^{(1)}) = \frac{\bar{B}}{\bar{H}_0^{(1)}}, \quad q_1(\bar{H}_0^{(1)}) = \frac{(1 + L_H)\bar{H}_0^{(1)}}{\bar{B}}, \quad \mu_k = q_k = 1 \quad \forall k = \overline{2,4}, \quad (3.40)$$

$$L_H := \frac{3\chi_0}{\text{sh}^2(3\chi_0 \bar{H})} - \frac{1}{3\chi_0 \bar{H}^2}$$

Безрозмірну величину W представимо у вигляді:

$$W := W_0 L^2(3\chi_0 \bar{H}_0^{(1)}) \mu_1 \sqrt{q_1}, \quad W_0 := \frac{\mu_0 M_s^2 R}{\sigma}. \quad (3.41)$$

Помітимо тепер, що напруженість $\bar{H}^{(1)}$ і індукція \bar{B} магнітного поля зв'язані взаємно однозначним співвідношенням (3.39), так що величини μ_1, q_1 однозначно визначаються за заданим значенням \bar{B} . Прийmemo \bar{B} в якості одного з визначальних параметрів розглянутої системи. Стан рівноваги рідин характеризується, таким чином, безрозмірними параметрами: $\bar{B}, W_0, \chi_0, h_1 / R, h_2 / R, \rho_2 / \rho_1$.

Власні значення λ_{nk} залежать від усієї сукупності цих параметрів. Зростання індукції магнітного поля \bar{B} призводить до появи від'ємних власних значень λ_{nk}^- , якщо \bar{B} перевищує деяке критичне значення \bar{B}^* . При $\bar{B} < \bar{B}^*$ рівноважний стан стійкий, а у випадку $\bar{B} > \bar{B}^*$ – нестійкий. Згідно зі спектральною ознакою стійкості (3.37) границя області стійкості в просторі безрозмірних параметрів визначається

рівнянням:

$$\lambda_{n^*j^*} = \lambda_{n^*j^*}(\bar{B}, \text{Bo}, W, \chi_0, h_1/R, h_2/R, \rho_2/\rho_1) \quad (3.42)$$

Власний вектор $a_{n^*j^*} = (a_{n^*j^*}^1, a_{n^*j^*}^2, \dots, a_{n^*j^*}^N)^\tau$, що відповідає $\lambda_{n^*j^*}$, визначає найнебезпечніші збурення поверхні розділу рідин $\zeta_{n^*j^*}$, що призводить до втрати стійкості рівноваги:

$$\zeta_{n^*j^*} = \sum_{k=1}^N a_{n^*j^*}^k u_{n^*k}(r, \vartheta) \quad (3.43)$$

Власні значення λ_{nj} спектральних задач (3.28) відшукувалися чисельно з використанням методу Холецкого. У проведених обчисленнях число базисних функцій варіювалося в діапазоні $50 \leq N \leq 100$. Подальше збільшення N не приводило до істотного уточнення результатів.

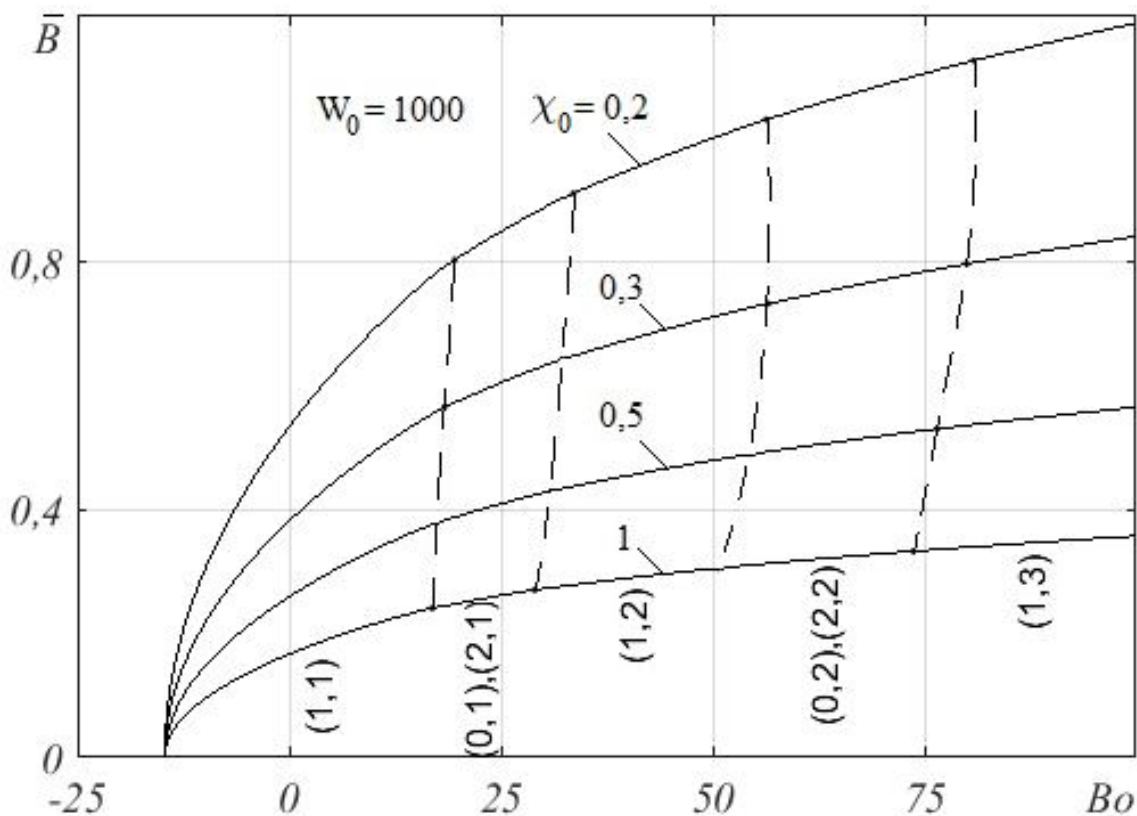


Рис. 3.2: Залежність критичних значень індукції магнітного поля \bar{B}^* від числа Бонда Bo при $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0,1$.

На рис. 3.2 наведені результати розрахунків границі області стійкості на площині (Bo, \bar{B}) при $W_0 = 10^3$ для різних значень χ_0 . Обчислення показали, що в (3.43), як правило, один з коефіцієнтів $a_{n^*j^*}^{k^*}$ значно перевершує інші. Пунктирні лінії в області нестійкості $\bar{B} > \bar{B}^*$ виділяють зони, у межах яких найбільш швидко зростаючим збуренням відповідають номери гармонік (n^*, j^*) . Саме ці моди дають наочну уяву про початкову еволюцію поверхні розділу рідин при втраті стійкості й переходу в новий рівноважний стан. При цьому необхідно вважати, що індукція магнітного поля \bar{B} набуває критичних значень за час, значно менший характерного часу гідродинамічних процесів.

При малих числах Бонда найнебезпечнішими є вісесиметричні збурення ($n = 0$), або збурення по першій ($n = 1$) або другій ($n = 2$) гармоніках. Форми найнебезпечніших збурень для деяких значень параметрів показано на Рис. 3.3. Як відзначалось раніше, у певному діапазоні значень числа Бонда рівною мірою можуть бути небезпечними вісесиметричні збурення і збурення по другій гармоніці. Це пояснюється збігом спектрів власних значень $\{\lambda_{nk}\}$ задачі (3.28) при $n = 0$ й $n = 2$. Питання про те, яка із цих мод реалізується в експериментах залишається відкритим. З ростом значень числа Бонда при фіксованих значеннях інших параметрів зростають критичні значення індукції магнітного поля \bar{B}^* , при цьому \bar{B}^* асимптотично зростає як $\text{Bo}^{1/2}$.

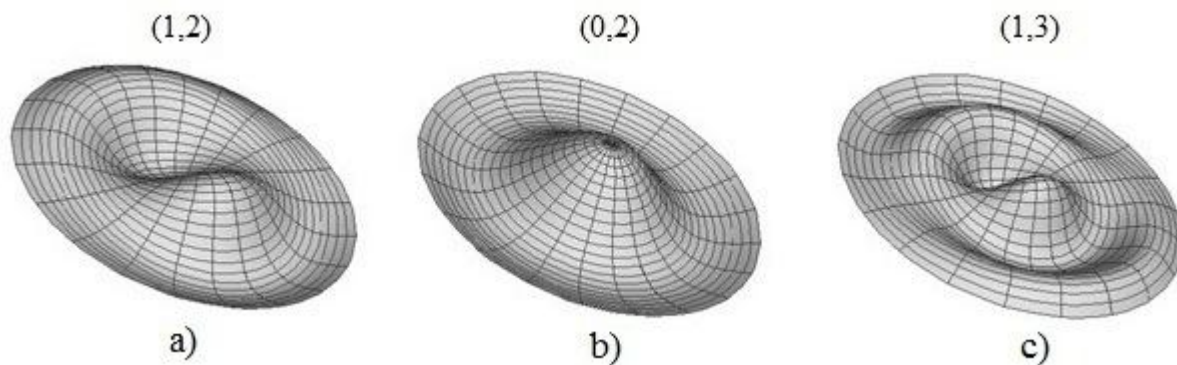


Рис. 3.3: Форми найнебезпечніших збурень при $W_0 = 10^3, \chi_0 = 0.2$:

a) $\text{Bo} = 40, \bar{B} = 0.95$; b) $\text{Bo} = 60, \bar{B} = 1.05$; c) $\text{Bo} = 90, \bar{B} = 1.15$.

3.2 Нестійкість рівноваги двошарової системи намагнічених рідин, розташованих у циліндричному соленоїді

3.2.1 Випадок стаціонарного магнітного поля. Постановка задачі. Розглянемо двошарову систему незмішуваних ферорідин, розташованих в соленоїді з ідеально провідною боковою стінкою S . Магнітні рідини обмежені зверху й знизу горизонтальними твердими поверхнями (див. рис. 3.4). Будемо вважати, що рідини перебувають під дією сил поверхневого натягу, гравітаційного поля та магнітного поля, яке спрямоване вертикально вгору. Позначимо через Ω_1, Ω_2 області, які займають нижня й верхня рідини у стані рівноваги, через Ω_3, Ω_4 – напівнескінченні області, що примикають до Ω_1, Ω_2 знизу і зверху відповідно. Середовище в кожній з областей $\Omega_k, k \in \overline{1,4}$ будемо вважати неелектропровідним, а намагнічувані рідини нев'язкими.

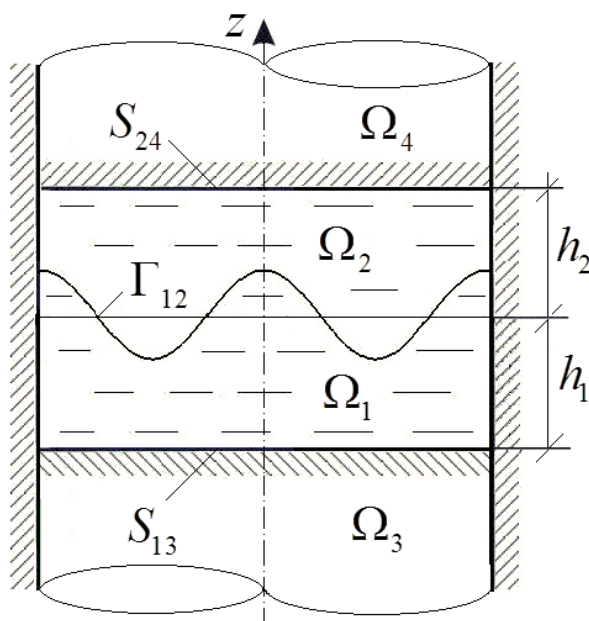


Рис. 3.4: Двошарова система ферорідин в соленоїді

Кути змочування рідин на боковій стінці соленоїда S приймемо рівними $\alpha = \pi / 2$. Горизонтальна поверхня розділу рідин $z = 0$ в однорідному магнітному полі відповідає одному з можливих станів механічної рівноваги системи. При роз-

гляді коливань рідин поблизу рівноважного стану будемо використовувати основні припущення і позначення, введені у попередньому розділі.

Як і раніше позначимо через $\zeta(t, x, y)$ відхилення поверхні Γ від горизонтального рівня, через $\varphi^{(k)}(t, \vec{x})$, $\psi^{(k)}(t, \vec{x})$ – потенціали швидкостей рідин і збурення потенціалу магнітного поля в області Ω_k . Зв'язок між індукцією $\vec{B}^{(k)}$ та напруженістю $\vec{H}^{(k)}$ магнітного поля в Ω_k як і раніше запишемо у вигляді

$$\vec{B}^{(k)} = \mu_0 \mu^{(k)} (H^{(k)}) \vec{H}^{(k)} \quad k \in \overline{1, 4}. \quad (3.44)$$

Система рівнянь, що описує рух рідин у даному випадку, значною мірою збігається з відповідною системою рівнянь попереднього підрозділу. Для зручності посилок приведемо ці рівняння (з необхідними уточненнями):

$$\Delta \varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, k = 1, 2; \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial z} = \zeta \quad \text{на } \Gamma, k = 1, 2; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S \cup S_{13}, \quad \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S \cup S_{24}; \quad (3.47)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma(\Delta_\Gamma + b)\zeta - B_0 \left(q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} - q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \right) = c_\Gamma(t) \quad \text{на } \Gamma \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma; \quad (3.49)$$

$$\operatorname{div} \mu_k \hat{\nabla} \psi^{(k)}(\vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, k = \overline{1, 4}; \quad (3.50)$$

$$\mu_1 q_1 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} = \mu_2 q_2 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на } \Gamma; \quad \psi^{(1)} - \psi^{(2)} = (H_0^{(1)} - H_0^{(2)})\zeta \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.51)$$

$$\psi^{(j)} = \psi^{(k)}, \mu_j q_j \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial z} = \mu_k q_k \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial z} \quad \text{на } S_{jk}, \quad jk = 13, 24; \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, m = \overline{1, 4}; \quad (3.53)$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty; \quad (3.54)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y), \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta^1(x, y) \quad \text{на } \Gamma; \quad (3.55)$$

$$b := \frac{(\rho_1 - \rho_2)G}{\sigma}, \quad \widehat{\nabla}^{(k)}(\cdot) := \nabla(\cdot) + \frac{\mu_H^{(k)}}{\mu_k} \bar{H}_0^{(k)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial z},$$

$$q_k := 1 + \frac{\mu_H^{(k)} H_0^{(k)}}{\mu_k}, \quad \mu_k := \mu^{(k)}(H_0^{(k)}), \quad \mu_H^{(k)} := \left(\frac{d\mu^{(k)}}{dH} \right) \Big|_{H=H_0^{(k)}}, \quad k \in \overline{1, 4}.$$

Відзначимо, що в (3.53) через S позначено бокову поверхню соленоїда.

Функція $\zeta(t, x, y)$ повинна задовольняти умову

$$\int_{\Gamma} \zeta(t, x, y) d\Gamma = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.56)$$

Умова (3.49) означає збереження кутів змочування на бічній стінці соленоїда в процесі коливання рідин. Умова (3.53) відповідає ідеально провідній бічній стінці соленоїда. Фізичний зміст інших рівнянь и граничних умов системи (3.45)–(3.55) був пояснений у *підрозділі 3.1.1*.

3.2.2 Еволюція малих збурень. Приступаючи до розв'язку задачі (3.45) - (3.55), розглянемо спочатку допоміжну спектральну крайову задачу:

$$-\Delta_{\Gamma} u(x_1, x_2) = \nu u \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial n_{\nu}} = 0 \quad \text{і} \quad \int_{\Gamma} u d\Gamma = 0. \quad (3.57)$$

Задача (3.57) має дискретний спектр $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ власних значень ν_n кінцевої кратності, усі власні значення додатні, так що $\nu_n := k_n^2 > 0$, причому $\nu_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Власні функції $u_n(x_1, x_2)$, що відповідають власним значенням ν_n , утворюють базис $\{u_n(x_1, x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ у гільбертовому просторі $H(\Gamma) := L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ й можуть бути обрані так, щоб задовольнялися умови ортогональності (див. [24]).

$$\int_{\Gamma} u_j u_k d\Gamma = \delta_{jk}, \quad \forall j, k = 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

Позначимо через $\varphi_n^{(1)}(\vec{x}), \varphi_n^{(2)}(\vec{x})$ розв'язки крайових задач (3.45)–(3.47), при $\zeta = u_n(x_1, x_2)$ в граничній умові (3.46). В прийнятих припущеннях функції $\varphi_n^{(1)}(\vec{x}), \varphi_n^{(2)}(\vec{x})$ виписуються в явному виді:

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{\text{ch}(k_n(h_1 + z))}{k_n \text{sh}(k_n h_1)} u_n(x_1, x_2), \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{\text{ch}(k_n(h_1 - z))}{k_n \text{sh}(k_n h_2)} u_n(x_1, x_2), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

де h_i – товщина i -го шару рідини.

Введемо функції $\psi_n^{(k)}(\vec{x})$, $k = \overline{1, 4}$, що є розв'язком крайової задачі (3.50)–(3.53) при $\zeta = u_n(x_1, x_2)$. Функції $\psi_n^{(k)}(\vec{x})$ представляються у вигляді:

$$\psi_n^{(k)} = u_n(x_1, x_2) \overset{\circ}{\psi}_n^{(k)}(z), \quad k \in \overline{1, 4}. \quad (3.60)$$

Функції $\overset{\circ}{\psi}_n^{(k)}$ в (3.60) визначені наступними виразами:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(1)} &= A_1 \left[\text{ch} \frac{k_{nk}(h_1 + z)}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_3 \sqrt{q_3}}{\mu_1 \sqrt{q_1}} \text{sh} \frac{k_{nk}(h_1 + z)}{\sqrt{q_1}} \right], \\ \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(2)} &= A_2 \left[\text{ch} \frac{k_{nk}(h_2 - z)}{\sqrt{q_1}} + \frac{\mu_4 \sqrt{q_4}}{\mu_2 \sqrt{q_2}} \text{sh} \frac{k_{nk}(h_2 - z)}{\sqrt{q_2}} \right], \\ \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(3)} &= A_1 \exp\left(\frac{k_{nk}(h_1 + z)}{\sqrt{q_3}}\right), \quad \overset{\circ}{\psi}_{nk}^{(4)} = A_2 \exp\left(\frac{k_{nk}(h_2 - z)}{\sqrt{q_4}}\right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &:= -\frac{B_0(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{q_2}S_1}{\mu_0\mu_1 D}, \quad A_2 := \frac{B_0(\mu_1 - \mu_2)\sqrt{q_1}S_2}{\mu_0\mu_2 D}, \\ D &:= \mu_1\sqrt{q_1}S_1C_2 + \mu_2\sqrt{q_2}S_2C_1 \end{aligned}$$

$$S_1 := \text{sh}\left(\frac{k_{nk}h_1}{\sqrt{q_1}}\right) + \frac{\mu_3\sqrt{q_3}}{\mu_1\sqrt{q_1}} \text{ch}\left(\frac{k_{nk}h_1}{\sqrt{q_1}}\right), \quad S_2 := \text{sh}\left(\frac{k_{nk}h_2}{\sqrt{q_2}}\right) + \frac{\mu_4\sqrt{q_4}}{\mu_1\sqrt{q_4}} \text{ch}\left(\frac{k_{nk}h_2}{\sqrt{q_2}}\right),$$

$$C_1 := \text{ch}\left(\frac{k_{nk}h_1}{\sqrt{q_1}}\right) + \frac{\mu_3\sqrt{q_3}}{\mu_1\sqrt{q_1}} \text{sh}\left(\frac{k_{nk}h_1}{\sqrt{q_1}}\right), \quad C_2 := \text{ch}\left(\frac{k_{nk}h_2}{\sqrt{q_2}}\right) + \frac{\mu_4\sqrt{q_4}}{\mu_2\sqrt{q_2}} \text{sh}\left(\frac{k_{nk}h_2}{\sqrt{q_2}}\right),$$

Надалі зручно записати власні значення задачі (3.57) у вигляді: $\nu_n := (\bar{k}_n / L)^2$, де L – характерний лінійний розмір задачі. Власні частоти коливань рідини визначає дисперсійне рівняння (у безрозмірних змінних):

$$\lambda_n = \frac{k_n^3 - Wk_n^2 + \text{Bo}k_n}{\text{cth}(k_n h_1/L) + (\rho_1 / \rho_2) \text{cth}(k_n h_2/L)} \quad (3.62)$$

$$\text{Bo} := \frac{g(\rho_1 - \rho_2)R^2}{\sigma}, \quad W := \frac{B_0^2(\mu_1 - \mu_2)^2 R \sqrt{q_1 q_2} S_1 S_2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 \sigma D},$$

Безрозмірний комплекс W залежить від усієї сукупності фізичних і геометричних параметрів розглянутої системи й характеризує відношення поляризаційних сил магнітного поля до сил поверхневого натягу. Надалі при розгляді конкретних законів намагнічування вираз для W буде представлено в більш зручній для розрахунків формі.

Будемо вважати, що безрозмірні величини λ_j розташовані в порядку зростання. У загальному випадку величина $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ має n від'ємних, n_0 нульових, а також зліченну множину додатних власних значень λ_j , так що

$$\lambda_j^- := \lambda_j < 0 \quad \forall j \in \overline{1, n}; \quad \lambda_j^0 := \lambda_{n+j} = 0 \quad \forall j \in \overline{1, n_0}; \quad \lambda_j^+ := \lambda_{n+n_0+j} > 0 \quad \forall j \in \overline{1, \infty}.$$

Функції $u_j(x, y)$, які відповідають $\lambda_j^{\pm}, \lambda_j^0$, позначимо $u_j^{\pm}(x, y), u_j^0(x, y)$. Відзначимо, що додатним величинам λ_j^+ відповідають дійсні власні частоти коливань рідини

$$\omega_j^{\pm} = \pm(\lambda_j^+ \sigma / (\rho L^3))^{1/2}, \quad j \in \overline{1, \infty},$$

від'ємним величинам λ_j^- – фактор зростання збурень

$$\gamma_j = |\lambda_j^- \sigma / (\rho_1 L^3)|, \quad j \in \overline{1, N^-}$$

Представимо функції $\zeta_0(\vec{x}), \zeta'_0(\vec{x})$ у вигляді розкладань у ряди Фур'є:

$$\zeta_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j(x, y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^- u_j^-(x, y) + \sum_{j=1}^{n_0} \alpha_j^0 u_j^0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^+ u_j^+(x, y),$$

$$\zeta'_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u_j(x, y) = \sum_{j=1}^n \beta_j^- u_j^-(x, y) + \sum_{j=1}^{n_0} \beta_j^0 u_j^0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^+ u_j^+(x, y),$$

де

$$\alpha_j^\pm := (\zeta_0, u_j^\pm)_0, \alpha_j^0 := (\zeta_0, u_j^0)_0, \beta_j^\pm := (\zeta'_0, u_j^\pm)_0, \beta_j^0 := (\zeta'_0, u_j^0)_0,$$

а круглі дужки $(\cdot, \cdot)_0$ означають скалярний добуток в гільбертовому просторі $L_2(\Gamma)$.

Розв'язок початково-крайової задачі (3.45) – (3.47) у прийнятих позначеннях має вигляд:

$$\begin{aligned} \zeta(t, x, y) = & \sum_{j=1}^n \left[\alpha_j^- \operatorname{ch}(\gamma_j^{1/2} t) + \frac{\beta_j^-}{\Lambda_j^{1/2}} \operatorname{sh}(\gamma_j^{1/2} t) \right] u_j^-(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_0} [\alpha_j^0 + \beta_j^0 t] u_j^0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\alpha_j^+ \cos(|\omega_j^+| t) + \frac{\beta_j^+}{|\omega_j^+|} \sin(|\omega_j^+| t) \right] u_j^+(x, y). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Як випливає з (3.63), при наявності від'ємних власних значень λ_j^- плоска поверхня розділу рідини втрачає стійкість, бо довільні початкові збурення поверхні зростають з часом t . Наведений розв'язок (3.63) дозволяє судити про початкову стадію процесу переходу поверхні розділу рідин до нового рівноважного стану.

3.2.3 Умова нестійкості вільної поверхні намагнічуваних рідин. Умова нестійкості плоскої вільної поверхні має вигляд (при $\rho_2 = 0, h_2 \rightarrow \infty$):

$$W > W^* = \min_j \left(k_j + \frac{\operatorname{Bo}}{k_j} \right) \text{ умова нестійкості} \quad (3.64)$$

Виберемо в якості L характерний лінійний розмір поперечного перерізу соленоїда. Відмітимо, що зі зміною L при збереженні геометричної подоби поперечного перерізу соленоїда спектр $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ безрозмірних хвильових чисел k_j залишається незмінним. Виберемо послідовність чисел Бонда $\operatorname{Bo}_n = k_n^2$ й послідовність характерних довжин $L_n = k_n / \alpha$, де $\alpha := (\rho g / \sigma)^{1/2}$. У цьому випадку мінімум правої частини рівності (3.64) досягається при $k_n = \operatorname{Bo}_n^{1/2}$, так що

$$W_n^* = 2\operatorname{Bo}_n^{1/2} \quad (\operatorname{Bo}_n^{1/2} = k_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.65)$$

Звідси випливає, що $W^* / \operatorname{Bo}^{1/2} \rightarrow 2$ при $\operatorname{Bo} \rightarrow \infty$ й, отже, при $L \rightarrow \infty$. Умова нестійкості безмежного (по змінних x, y) шару рідини приймає вигляд:

$$\frac{(\mu_1\sqrt{q_1}\operatorname{th}(\alpha h/\sqrt{q_1})+\mu_3\sqrt{q_3})(\mu_1\sqrt{q_1}+\mu_2\sqrt{q_2})}{(\mu_1^2q_1+\mu_2\mu_3\sqrt{q_2q_3})\operatorname{th}(\alpha h/\sqrt{q_1})+\mu_1\sqrt{q_1}(\mu_2\sqrt{q_2}+\mu_3\sqrt{q_3})} \times$$

$$\times \frac{B_0^2(\mu_1-\mu_2)^2\sqrt{q_1q_2}}{\mu_0(\mu_1\mu_2)^2(\mu_1\sqrt{q_1}+\mu_2\sqrt{q_2})\sqrt{\rho g\sigma}} > 2, \quad \alpha := \left(\frac{\rho g}{\sigma}\right)^{1/2}. \quad (3.66)$$

З (3.66) при $h_1 \rightarrow \infty$ одержимо умову нестійкості нескінченно глибокого шару рідини:

$$\frac{B_0^2(\mu_1-\mu_2)^2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\mu_0(\mu_1\mu_2)^2(\mu_1\sqrt{\gamma_1}+\mu_2\sqrt{\gamma_2})} > 2(\rho g\sigma)^{1/2}$$

У випадку $\mu_2 \equiv 1$ останню умову можна представити у вигляді:

$$M^{(1)2} > M_{cr}^2 := \frac{2}{\mu_0} \left(\mu_1 + \frac{1}{\sqrt{q_1}} \right) (\rho g\sigma)^{1/2}, \quad (3.67)$$

де M_{cr} – критичне значення намагніченості рідини. У такій формі в трохи інших позначеннях умова нестійкості нескінченно глибокого шару рідини була отримана Р. Розенцвейгом [70] (1967).

3.2.4 Границя області стійкості і просторові структури вільної поверхні лінійно намагнічуваних рідин. Розглянемо процеси виникнення й росту впорядкованих структур вільної поверхні магнітної рідини на прикладі циліндра із прямокутним поперечним перерізом. Горизонтальні осі координат Ox, Oy направимо уздовж бічних граней циліндра. Позначимо через L_x, L_y – розміри поперечного перерізу в напрямку вісей Ox, Oy , відповідно. У якості характерного лінійного розміру виберемо $L = S^{1/2} = (L_x L_y)^{1/2}$. Такий вибір дозволяє провести порівняльний аналіз критичних значень фізичних параметрів для соленоїдів з однаковою площею S поперечного перерізу.

У розглянутому випадку моди власних коливань рідини u_j й хвильові числа k_j мають вигляд:

$$u_j = a_j \cos \frac{m_j \pi x}{L_x} \cos \frac{n_j \pi y}{L_y}, \quad k_j := \pi \left(m_j^2 \kappa_L + \frac{n_j^2}{\kappa_L} \right)^{1/2}, \quad (3.68)$$

$$\kappa_L := L_y / L_x, \quad m_j, n_j = 0, 1, 2, \dots, m_j + n_j > 0$$

Амплітудні множники a_j в (3.68) визначаються з умови нормування (3.58).

Границя області стійкості в просторі безрозмірних параметрів Bo, W, κ_L визначається рівнянням:

$$W = W^*(Bo, \kappa_L) := k_j + \frac{Bo}{k_j} \quad (k_{j-1} k_j \leq Bo \leq k_j k_{j+1}), j = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.69)$$

де вважається, що всі хвильові числа k_j , доповнені числом $k_0 \equiv 0$, розташовані в порядку зростання.

На площині (Bo, W) границя області стійкості являє собою ламану лінію із прямолінійними ланками. Графік залежності $W = W^*(Bo, \kappa_L)$ при $\kappa_L = 3/4, h_1 = \infty$ показаний на рис. 3.5. Пунктирні лінії в області нестійкості $W > W^*$ виділяють зони, у межах яких найбільше швидко зростаючим модам збурень $u_j(x, y)$ відповідають певні номери (m_j, n_j) . Відзначимо, що критичну індукцію магнітного поля B^* можна визначити за значеннями W^* при m_j, n_j , які відповідають номерам мод найнебезпечніших збурень поверхні.

Вплив параметра κ_L на критичні значення $W^*(Bo, \kappa_L)$ є суттєвим для порівняно невеликих значень числа Бонда Bo . При зростанні Bo критичні значення W^* для різних κ_L практично збігаються.

Типовий приклад форм вільної поверхні, які відповідають модам збурень (3.68) показаний на рис. 3.5. Звертає на себе увагу той факт, що при певних значеннях параметрів κ_L, Bo можуть виникати одномірні структури у вигляді гофрованої вільної поверхні, яка відповідає модам збурень з номерами $m_j > 0, n_j = 0$ або $m_j = 0, n_j > 0$.

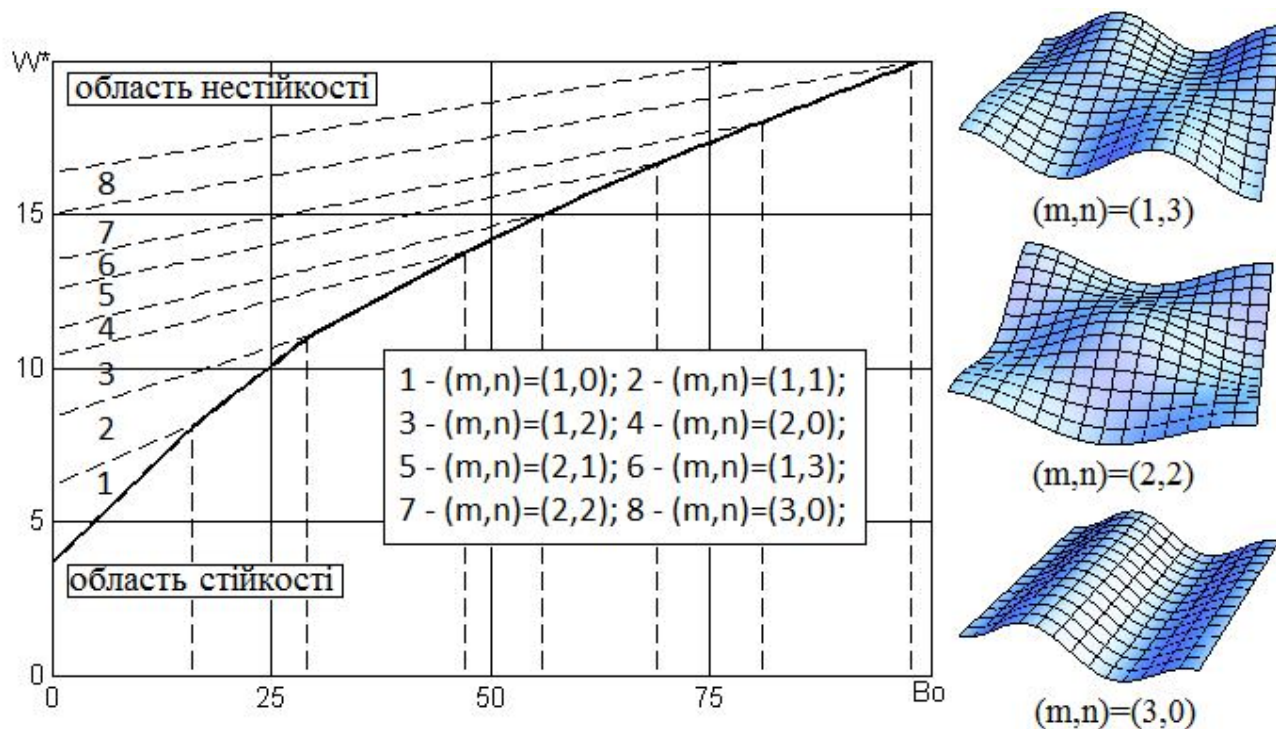


Рис. 3.5: Границя області стійкості, номери мод найшвидше зростаючих збурень і форми вільної поверхні для циліндра із прямокутним поперечним перерізом

Для кругового циліндра умова стійкості рівноваги має той же вид (3.64), що й для циліндра із прямокутним поперечним перерізом. Моді збурень у цьому випадку в циліндричній системі координат r, ϑ, z мають вигляд:

$$u_j = a_j J_{m_j} (k_{m_j n_j} r / R) \begin{cases} \cos(m_j \vartheta), \\ \sin(m_j \vartheta), \end{cases} m_j = 0, 1, 2, \dots, n_j = 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

Тут $J_m(\cdot)$ – функція Бесселя 1-го роду m -го порядку, k_{mn} – n -й ненульовий корінь рівняння $J'_m(k) = 0$, R – радіус циліндра, $L = R$, $k_j := k_{m_j n_j}$. Результати розрахунків границі області стійкості й номерів найбільш швидко зростаючих мод збурень наведені на рис. 3.6.

Зростання Bo супроводжується збільшенням цілочислових параметрів m_j, n_j , що відповідають найбільш швидко зростаючим модам збурень поверхні. Це приводить до збільшення хвильових чисел k_j і до зменшення внутрішніх мас-

штабів (тобто відстаней між сусідніми піками й западинами) структур, що виникають на вільній поверхні рідини в закритичній області значень параметрів.

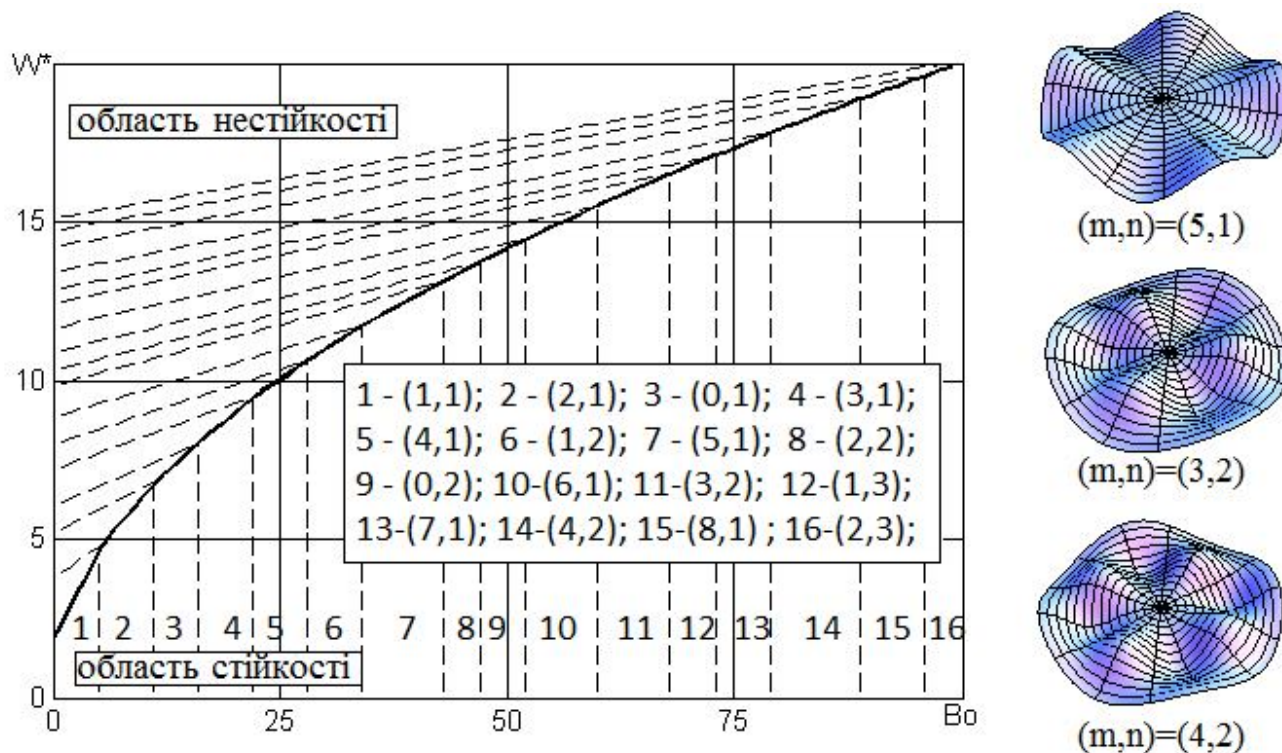


Рис. 3.6: Границя області стійкості й форми мод найбільш небезпечних збурень для кругового циліндра

3.2.5 Границя області стійкості рівноваги для нелінійного закону намагнічування рідини. Границя області стійкості поверхні розділу рідини в просторі безрозмірних параметрів системи визначається рівнянням:

$$\min_{n,k} (k_{nk}^3 - W(P, k_{nk}) k_{nk}^2 + Bo k_{nk}) = 0, \quad (3.71)$$

де через P позначена вся сукупність безрозмірних параметрів, за винятком числа Бонда.

Будемо вважати, що рідина в області Ω_1 намагнічується за законом Ланжевена, а намагніченість усіх інших середовищ будемо нехтувати:

$$M^{(1)} = M_s L\left(\frac{3\chi_0 H}{M_s}\right), \quad L(\xi) := \text{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi}, \quad M^{(k)} = 0 \quad \forall k \in \overline{2,4}, \quad (3.72)$$

Тут M_s – намагніченість насичення, χ_0 – магнітна сприйнятливості рідини в Ω_1 при $H = 0$, $L(\xi)$ – функція Ланжевена.

Введемо безрозмірні індукцію й напруженість магнітного поля в області Ω_1 :
 $\bar{B} := B / (\mu_0 M_s)$, $\bar{H} := H / M_s$. Відзначимо, що \bar{B} і \bar{H} зв'язані взаємно
однозначним співвідношенням:

$$\bar{B} = \bar{H} + L(3\chi_0 \bar{H}). \quad (3.73)$$

У прийнятих припущеннях вираз для W набуває вигляду

$$W = W_0 \mu_1(\bar{H}) q_1^{1/2}(\bar{H}) L^2(3\chi_0 \bar{H}) \frac{S_1(\bar{H}, \mathbf{x}_{nk}) S_2(\bar{H}, \mathbf{x}_{nk})}{D(\bar{H}, \mathbf{x}_{nk})}, \quad W_0 := \frac{\mu_0 M_s^2 R}{\sigma} \quad (3.74)$$

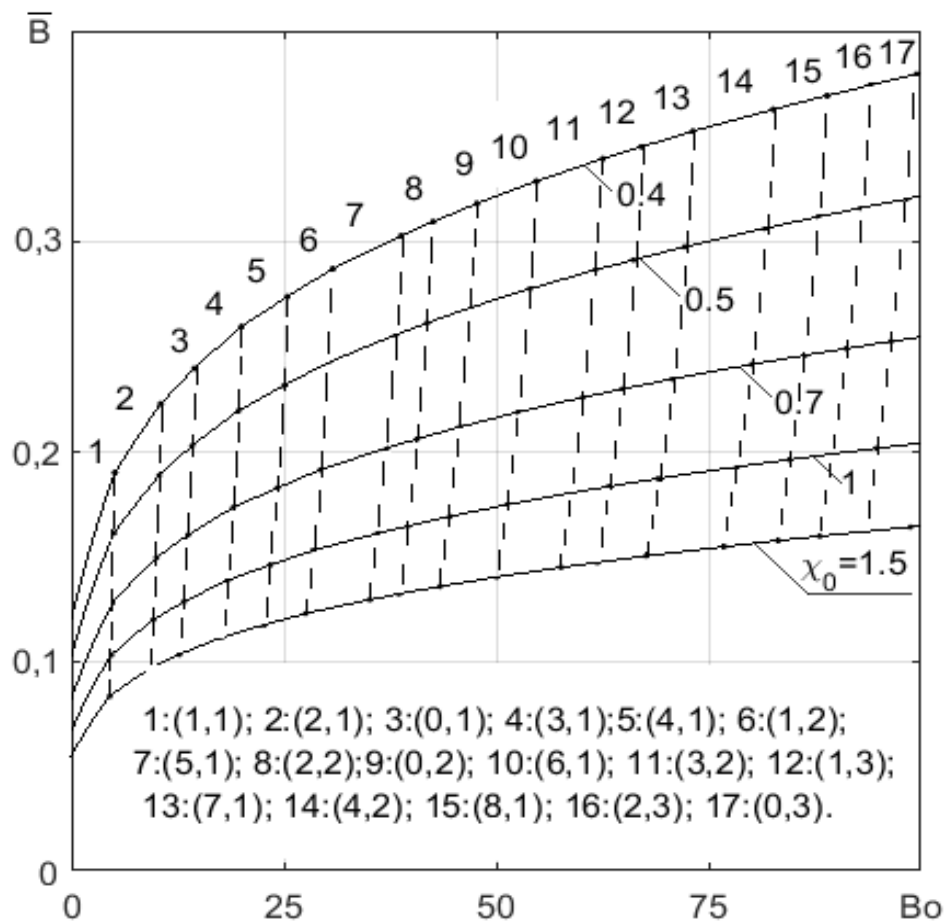


Рис. 3.7: Залежність критичних значень індукції магнітного поля \bar{B}^*
від числа Бонда Bo при $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 0.1$, $W_0 = 1000$.

На рис. 3.7 наведені результати розрахунків границі області стійкості на
площині (Bo, \bar{B}) для різних значень параметра χ_0 при фіксованих значеннях

інших безрозмірних параметрів $P = (h_1, h_2, W_0)$. Пунктирні лінії в області нестійкості $\bar{B} > \bar{B}_*$ виділяють зони, у межах яких найбільше швидко зростаючим збуренням відповідають цілком визначені номери (n_*, k_*) .

З ростом значень числа Бонда зростають критичні значення індукції магнітного поля \bar{B} . Збільшення числа Бонда Bo приводить до зменшення внутрішніх масштабів (відстаней між сусідніми піками й западинами) структур, що виникають на поверхні розділу рідин в закритичній області значень параметрів.

3.3. Параметричне збудження хвиль на поверхні розділу намагнічуваних рідин в нестационарному магнітному полі

Розглянемо параметричне збудження хвиль на поверхні розділу рідин, розташованих в циліндричному соленоїді (див. рис. 3.4). У випадку нестационарного магнітного поля в системі (3.45)-(3.55) замість $B_0 = const$ слід покласти

$$B(t) = B_0 + \beta \cos(\omega_0 t),$$

де β та ω_0 - амплітуда та частота осциляцій магнітного поля, а для випадку механічних вібрацій до сили тяжіння g додати переносні сили інерції

$$\vec{G}(t) = (-g + \omega_g^2 a_g \cos(\omega_g t)) \vec{e}_z$$

У цьому випадку горизонтальна поверхня розділу рідин $z = 0$ відповідає одному з можливих станів механічної рівноваги даної системи як в постійному, так і в нестационарному магнітному полі. Однак добре відомо, що механічні вібрації або осциляції магнітного поля при певному співвідношенні амплітуди і частоти цих коливань можуть призводити до втрати стійкості рівноваги і появи періодичних коливань рідин. Надалі обмежимося розглядом лінійного закону намагнічування, $\mu_k = const, k \in \overline{1,4}$. У цьому випадку відповідна система рівнянь і граничних умов, що описує рух рідин, значно спрощується (в зрівнянні з (3.45)-(3.55)) і буде мати вигляд:

$$\Delta\varphi^{(k)}(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{в } \Omega_k, k = 1, 2; \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial z} = \zeta \quad \text{на } \Gamma, k = 1, 2; \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S \cup S_{13}, \quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S \cup S_{24}; \quad (3.77)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma(-\Delta_\Gamma + b)\zeta - B \left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \right) = c_\Gamma(t) \quad \text{на } \Gamma; \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma; \quad (3.79)$$

$$\operatorname{div} \mu_k \widehat{\nabla}^{(k)} \psi^{(k)} = 0, \quad \text{в } \Omega_k, k = \overline{1, 4}; \quad (3.80)$$

$$\mu_1 \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \quad \text{на } \Gamma; \quad \psi^{(1)} - \psi^{(2)} = - \left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \right) \zeta \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.81)$$

$$\psi^{(j)} = \psi^{(k)}, \mu_j \frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial z} = \mu_k \frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial z} \quad \text{на } S_{jk}, \quad jk = 13, 24; \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial\psi^{(m)}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, m = \overline{1, 4}; \quad (3.83)$$

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty; \quad (3.84)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y), \quad \left. \frac{\partial\zeta}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta^1(x, y) \quad \text{на } \Gamma; \quad (3.85)$$

$$b := \frac{-(\rho_1 - \rho_2)G}{\sigma},$$

Розв'язок задачі (3.75)-(3.85) відшукується у вигляді

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n(x_1, x_2), \quad \varphi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 2, \quad \psi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n^{(k)}(\vec{x}), \quad k = 1, 4. \quad (3.86)$$

Вирази для функцій ζ, φ, ψ аналогічні (3.60) – (3.61) для випадку лінійного закону намагнічування

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{\operatorname{ch}(k_n(h_1 + z))}{k_n \operatorname{sh}(k_n h_1)} u_n(x, y), \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{\operatorname{ch}(k_n(h_1 - z))}{k_n \operatorname{sh}(k_n h_2)} u_n(x, y)$$

$$\psi_n^{(1)} = A_1 \left[\operatorname{ch}(k_n(h_1 + z)) + \frac{\mu_3}{\mu_1} \operatorname{sh}(k_n(h_1 + z)) \right] u_n(x, y),$$

$$\psi_n^{(2)} = A_2 \left[\operatorname{ch}(k_n(h_2 - z)) + \frac{\mu_4}{\mu_2} \operatorname{sh}(k_n(h_2 - z)) \right] u_n(x, y),$$

$$\psi_n^{(3)} = A_1 \exp(k_n(h_1 + z)) u_n(x, y), \quad \psi_n^{(4)} = A_2 \exp(k_n(h_2 - z)) u_n(x, y),$$

де

$$A_1 := -\frac{B(\mu_1 - \mu_2)S_1}{\mu_0\mu_1 D}, \quad A_2 := \frac{B(\mu_1 - \mu_2)S_2}{\mu_0\mu_2 D},$$

$$D := \mu_1 S_1 C_2 + \mu_2 S_2 C_1$$

$$S_1 := \operatorname{sh}(k_n h_1) + \frac{\mu_3}{\mu_1} \operatorname{ch}(k_n h_1), \quad S_2 := \operatorname{sh}(k_n h_2) + \frac{\mu_4}{\mu_1} \operatorname{ch}(k_n h_2),$$

$$C_1 := \operatorname{ch}(k_n h_1) + \frac{\mu_3}{\mu_1} \operatorname{sh}(k_n h_1), \quad S_2 := \operatorname{ch}(k_n h_2) + \frac{\mu_4}{\mu_1} \operatorname{sh}(k_n h_2),$$

Функції ζ, φ, ψ з довільними коефіцієнтами $c_n(t)$ задовольняють усім рівнянням і граничним умовам (3.75) – (3.85) за винятком динамічної умови (3.78). Задовольняючи цій умові, приходимо до однотипних диференціальних рівнянь, що визначають функції $c_n(t)$:

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + [p_0 + p_1 \cos(\omega_0 t) + p_2 \cos(2\omega_0 t) + p_3 \cos(\omega_e t)] c_n = 0, \quad (3.87)$$

$$p_0 := \frac{1}{A} \left[\sigma k_n^3 + (\rho_1 - \rho_2) g k_n \right] - \left(B_0^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) \frac{B_0^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 S_1 S_2 k_n^2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 A D},$$

$$p_1 := -\frac{2\beta B_0 (\mu_1 - \mu_2)^2 S_1 S_2 k_n^2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2 A D}, \quad p_2 := -\frac{\beta^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 S_1 S_2 k_n^2}{2\mu_0 \mu_1 \mu_2 A D},$$

$$p_3 := -\frac{(\rho_1 - \rho_2) \omega_e^2 a_e k_n}{A}, \quad A := \rho_1(k_n h_1) + \rho_2(k_n h_2).$$

Рівняння (3.87) для кожної моди коливань є рівнянням Мат'є – Хілла, якщо відношення амплітуд механічних вібрацій ω_g та осцилюючого магнітного поля ω_0 - раціональне число. Дослідження цього звичайного диференціального рівнян-

ня другого порядку з періодичними коефіцієнтами проведено стандартними методами [17].

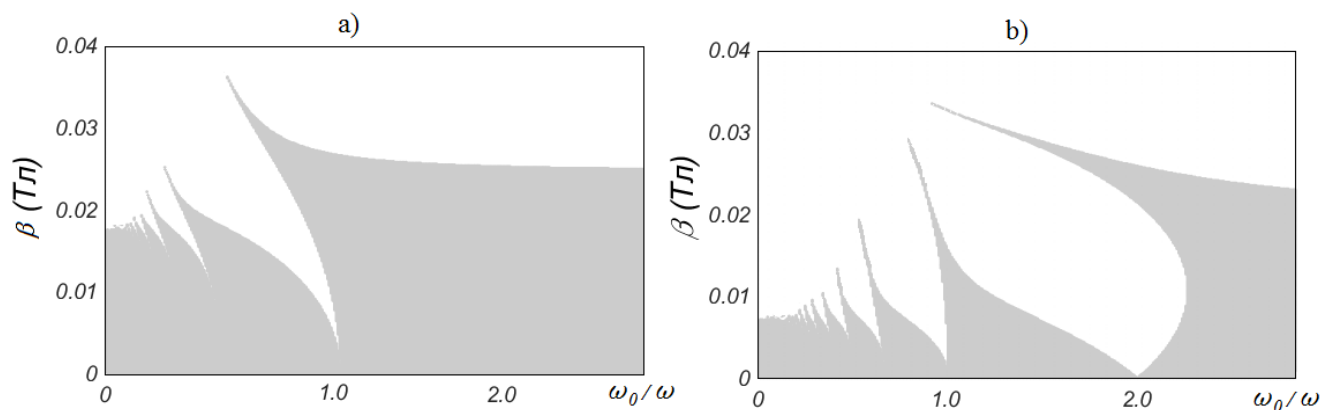


Рис. 3.8: Области параметричної нестійкості для кругового циліндра

a) $B_0 = 0$, b) $B_0 = 0.005$ (Тл)

Незафарбовані "язики" на діаграмах стійкості відповідають збудженню поверхневих хвиль нестационарним магнітним полем. Для тільки осцилюючого магнітного поля найширша область параметричної нестійкості відповідає гармонічним коливанням (див рис. 3.8.a), тоді як додавання стаціонарної компоненти поля призводить до виникнення області субгармонічної нестійкості (рис. 3.8.b).

3.4 Висновки розділу

На відміну від випадку нескінченно протяжних горизонтальних шарів феррорідин власні частоти коливань рідини з обмеженою вільною поверхнею утворюють дискретний спектр, а моди коливань, що їм відповідають, якісно відрізняються одна від одної. Це дозволяє пояснити різноманіття форм магнітних рідин, які спостерігаються у реальних експериментах.

У зв'язку із цим відзначимо, що в теоретичних дослідженнях нестійкості безмежних шарів магнітних рідин, як правило, обмежуються розглядом одномірного синусоїдального збурення вільної поверхні, що безупинно залежить від одного параметра (хвильового числа), або суперпозиції двох або трьох таких збурень. Це дозволяє апроксимувати одномірні, квадратні або гексагональні структу-

ри, які спостерігаються в експериментах з ферорідинами в прямокутних, гексагональних або круглих кюветах у далекій закритичній області значень параметрів, коли вплив границі області, яку займає рідина, суттєво слабшає.

У випадках, коли вільна поверхня рідини (або поверхня розділу рідин) обмежена, а індукція магнітного поля близька до критичних значень, найнебезпечніші збурення мають більш складну структуру. Це підтверджується розрахунками, проведеними в даній роботі. Для магнітних рідин, що намагнічуються за законом Ланжевена, побудовано границі області стійкості рівноважних станів у просторі визначальних параметрів. Показано, що область значень параметрів, що відповідають нестійким рівноважним станам, розбивається на зони, кожна з яких характеризується цілком визначеною модою найбільш швидко зростаючих збурень. Зміни індукції магнітного поля, що викликають перехід фізичних параметрів з однієї зони в іншу, супроводжуються якісною перебудовою форм поверхні розділу ферорідин. Зі збільшенням числа Бонда критичні значення індукції магнітного поля наближаються до значень, що відповідають випадку необмеженої поверхні розділу.

РОЗДІЛ 4

ОБ'ЄМНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС В НАМАГНІЧУВАНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Досліджується виникнення об'ємного параметричного резонансу в намагнічених середовищах в однорідному нестационарному магнітному полі. Вивчається можливість втрати стійкості стаціонарних станів намагнічених середовищ при їх параметричному збудженні магнітним полем. Асимптотичними та чисельними методами встановлені параметри збуджуваних акустичних хвиль, вплив осцилюючої частини магнітного поля на дисперсність збуджуваного звуку та швидкість його поширення.

4.1 Ефективне немагнітне середовище, що відповідає намагнічену середовищу

Розглянемо одномірні нестационарні рухи намагніченого середовища уздовж осі (x). Тоді $v_x = v, v_y \equiv 0, v_z \equiv 0$, причому

$$v = v(x, t), \rho = \rho(x, t), T = T(x, t), \vec{H} = \vec{H}(x, t),$$

де \vec{v} – швидкість середовища, ρ – густина, T – температура, \vec{H} – напруженість магнітного поля.

З рівнянь електродинаміки (1.5) одержимо:

$$B_x = B_x(t), H_y = H_y(t), H_z = H_z(t).$$

Тут \vec{B} – магнітна індукція. Позначимо:

$$B_x(t) = \chi_1(t), H_y(t) = \chi_2(t), H_z(t) = \chi_3(t).$$

Функції $\chi_i(t)$, таким чином, задані.

Рівняння руху (1.2) приводяться до виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

Тут і надалі використовуються позначення фізичних величин, введених у розділі 1. Враховуючи, що

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} H = -\frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

запишемо рівняння енергії (1.3) у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_e + \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v \left(u_e + \frac{p_e}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k} - v_i \tau_{ik} \right] + \rho q \quad (4.2)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} p_e &= p - \frac{\chi_1^2}{4\pi\mu}; \\ u_e &= u - \frac{\mu}{4\pi\rho} (\chi_2^2 + \chi_3^2); \\ \rho q &= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{d}{dt} \chi_1^2 - \frac{\mu}{8\pi} \frac{d}{dt} (\chi_2^2 + \chi_3^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким чином, рівняння одномірних рухів намагнічуваних середовищ приводяться до рівнянь одномірної газової динаміки зі спеціальними рівняннями стану. Таку форму рівняння мають незалежно від того, як намагнічується середовище в магнітному полі: ізотропно або анізотропно. Від цього залежать тільки рівняння стану, тобто функції p_e, u_e . Рівняння зміни енергії (4.2) відрізняється від звичайного в газовій динаміці наявністю в правій частині доданка q . Відзначимо, що $q=0$, якщо $\chi_i = \text{const}$. Цей випадок розглядався в [92]. Величину $q \neq 0$ можна інтерпретувати як масову щільність джерел енергії в середовищі. Це особливо стає зрозумілим з тотожності Гіббса (1.6), яка для одномірних рухів намагнічуваних середовищ можна записати у вигляді:

$$du_e = T ds - p_e d \frac{1}{\rho} + q dt \quad (4.4)$$

У рівність (4.4) напруженість магнітного поля не входить. Якщо $q=0$ ($\chi_i = \text{const}$), то відповідне середовище стає двопараметричним з визначаль-

ними параметрами ρ й s , масовою щільністю внутрішньої енергії u_e й тиском p_e , причому

$$u_e = u_e(\rho, s); p_e = p_e(\rho, s)$$

При $q \neq 0$ функції $\chi_i = \chi_i(t)$ задаються відповідними граничними умовами; вони визначають обмін енергією між немагнітним середовищем і зовнішніми тілами. Їх можна розглядати як зовнішнє керування немагнітним середовищем, яке описується рівняннями (4.1)-(4.2), з боку зовнішньої системи, якою є магнітне поле.

Немагнітне середовище, яке описується рівняннями стану (4.3), надалі будемо називати ефективним немагнітним середовищем, відповідним вихідному намагнічуваному середовищу.

Запишемо рівняння (4.3) у вигляді:

$$p_e(\rho, s, t) = p^0(\rho, T) - \frac{\chi_1^2}{4\pi\mu} + \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - \rho\mu_\rho) HdH$$

$$u_e(\rho, s, t) = u^0(\rho, T) + \frac{\chi_1^2}{4\pi\rho\mu} - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H (\mu - T\mu_T) HdH$$

Температуру й напруженість магнітного поля, що присутні в правих частинах цих рівнянь, необхідно виключити, використовуючи залежності:

$$T = T(\rho, s, \chi_i); H = H(\rho, s, \chi_i); \chi_i := B_x(t), H_y(t), H_z(t)$$

Для їхнього одержання необхідно розв'язати відносно T, H наступну систему нелінійних функціональних рівнянь:

$$\Phi = \mu(\rho, T, H)H - [\chi_1^2 + \mu^2(\rho, T, H)(\chi_2^2 + \chi_3^2)]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Psi = s - s^0(\rho, T) - \frac{1}{4\pi} \int_0^H \mu_T HdH = 0$$

Умови можливості розв'язання цієї системи рівнянь відносно T, H полягають у виконанні нерівності

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(T, H)} \neq 0,$$

яка передбачається надалі виконаною.

Так, у випадку лінійного ізотропного закону намагнічування при врахуванні магнітокалоричного ефекту ($\mu = \mu(\rho, T)$) маємо:

$$s = s^0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi\mu^2\rho}[\mu^2(\chi_2^2 + \chi_3^2) + \chi_1^2]\mu_T$$

$$H = [\chi_2^2 + \chi_1^2 + \mu^{-2}\chi_1^2]^{\frac{1}{2}}$$

Тоді з першого рівняння визначається залежність $T = T(\rho, s, \chi_i)$, так що друге рівняння дає залежність, що відшукується: $H = H(\rho, s, \chi_i)$

Після цього визначаються рівняння стану ефективного середовища:

$$p_e = p_e(\rho, s, \chi_i) = p^0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi\mu^2}[\mu^2(\mu - \rho\mu_\rho)(\chi_2^2 + \chi_3^2) - (\mu - \rho\mu_\rho)\chi_1^2]$$

$$u_e = u_e(\rho, s, \chi_i) = u^0(\rho, T) - \frac{1}{8\pi\mu^2}[\mu^2(\mu - T\mu_\rho)(\chi_2^2 + \chi_3^2) - (\mu - T\mu_\rho)\chi_1^2]$$

Якщо ж закон намагнічування нелінійний, а магнітокалоричним ефектом можна знехтувати ($\mu = \mu(\rho, H)$), тобто $s = s^0(\rho, T)$, $T = T(\rho, s)$, то залежність $H(\rho, \chi_i)$ визначається безпосередньо із закону намагнічування.

Оскільки рівняння стану ефективного середовища залежать явно від часу, то таке середовище є нестационарним. Такого роду середовища останнім часом активно досліджуються в електродинаміці [90]. Відзначимо, крім того, що рівняння (4.1), (4.2) суттєво нелінійні навіть у випадку ідеального середовища, оскільки $p_e = p_e(\rho, s, t)$; вони стають квазілінійними тільки у випадку $\chi_i = const$.

4.2 Збудження ультразвукових коливань нестационарним однорідним магнітним полем

При змінних параметрах $\chi_i = \chi_i(t)$ рівняння (4.1) допускають стаціонарний однорідний розв'язок:

$$\rho \equiv \rho_0, v = v_0 \equiv 0, s \equiv s_0 = const$$

При цьому в ефективне середовище надходить енергія відповідно до рівняння

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = q(t)$$

Температура середовища теж постійна: $T = T_0$, якщо не враховується магнітокалоричний ефект. При врахуванні цього ефекту температура однорідного стану буде залежати від часу: $T = T(t)$, так що виконується умова адіабатичності ($s = s_0 = const$). Крім того, однорідним є й магнітне поле: $\vec{H} = \vec{H}(t)$. Залежно від виду джерела $q(t)$ в намагнічуваному середовищі можливі нові ефекти, які раніше не вивчалися.

Будемо відшукувати розв'язок системи (4.1) для нетеплопровідного середовища ($\kappa = 0$) у вигляді:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, t), v = v'(x, t),$$

де штрихом позначені збурення параметрів.

Лінеаризуючи рівняння (4.1) відносно вказаного однорідного стану, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0; \\ \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} &= 0; s \equiv s_0 = const \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тут $a^2 = \left(\frac{\partial p_e}{\partial \rho}\right)_{s, \chi_i(t)}$, тобто похідна ефективного тиску обчислюється при

постійній ентропії s й заданих функціях $\chi_i(t)$. Тому

$$a^2 = a^2(\rho_0, s_0, \chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t)) = a^2(t)$$

Як показано в [92], a^2 дорівнює квадрату швидкості поширення ультразвуку в намагнічуваному середовищі і задається наступними виразами [105]:

$$\begin{aligned}
a^2(\rho, t) &= L_0 - L_1(1 + L_2)^{-1}; L_0 = \rho x_{31} + x_{23} x_{32}; \\
L_1 &= 4\pi\rho\mu^3 m^2 \left[\chi_1^2(t) + \mu^{-2}(\chi_2^2(t) + \chi_3^2(t)) \right] \times \\
&\times (\rho\mu_\rho + N\mu_T x_{23}) \left[\rho(\mu_\rho + \mu_T T_\rho) + \mu_T T_{s^0} x_{23} \right]; \\
L_2 &= (\mu^2 \mu_T^2 T_{s^0} N m \left[\chi_1^2(t) + \mu^{-2}(\chi_2^2(t) + \chi_3^2(t)) \right] - \\
&- \mu^2 \mu_H B^{-1}(\chi_2^2(t) + \chi_3^2(t)))(\mu^2 + \mu_H B)^{-1}; \\
m^{-1} &= 4\pi\rho\mu(\mu^2 + \mu_H B); N^{-1} = 1 + T_{s^0}(s_T^m - \mu_T m B^2); \\
x_{23} &= \rho N \left[m\mu_T B^2(\mu_\rho + \mu_T T_\rho) - s_\rho^m - s_T^m T_\rho \right]; \\
x_{31} &= (p_\rho^0 + \psi_\rho + \psi_T T_\rho) / \rho + \rho\mu_\rho m B^2(\mu_\rho + \mu_T T_\rho); \\
x_{32} &= (p_{s^0}^0 + \psi_T T_{s^0}) / \rho + \rho T_{s^0} \mu_\rho \mu_T m B^2; \\
T_{s^0} &= \left(\frac{\partial T}{\partial s^0} \right)_\rho; p_{s^0}^0 = \left(\frac{\partial p^0}{\partial s^0} \right)_\rho;
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Вираз $f_\psi := \partial f / \partial \psi$ позначає відповідну частинну похідну.

Оскільки одномірні рухи потенційні, $v' = \partial \varphi / \partial x$, де $\varphi = \varphi(x, t)$ – потенціал швидкості, то із другого рівняння (1.15) для збурень густини одержуємо

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad v_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \tag{4.7}$$

Це дозволяє з першого рівняння (4.5) одержати наступне рівняння для потенціалу швидкості:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] \frac{d}{dt} (\ln a^2) = 0, \tag{4.8}$$

Тривіальний розв'язок $\varphi = const$ цього рівняння відповідає рівноважному стану магнітної рідини $\rho = const; v = 0$. Вивчимо питання про стійкість цього стану.

Відшукаючи розв'язок рівняння (4.8) у вигляді

$$\varphi(x, t) = \varphi(t) \exp(ikx),$$

для амплітуди збурень $\varphi(t)$, одержимо

$$\ddot{\phi} + [k^2 v_0 - \frac{d}{dt} \ln(a^2)] \dot{\phi} + k^2 [a^2 - v_0 \frac{d}{dt} \ln(a^2)] \phi = 0 \quad (4.9)$$

Для подальшого дослідження рівняння (4.9) необхідно вказати явний вид залежності $a^2(t)$, що дається виразом (4.6). У випадку загального ізотропного закону намагнічування одержання рівнянь стану ефективного середовища можливо тільки чисельними методами. Маючи метою вивчення якісних особливостей збудження ультразвукових коливань у магнітних рідинах, розглянемо найбільш важливі випадки ізотропного закону намагнічування.

Для ідеального парамагнетика намагніченість визначається рівнянням Ланжевена [6, 42]:

$$M = mnL(\xi); \xi = \frac{mH}{kT}; L = \text{cth}\xi - \xi^{-1},$$

де m – магнітний момент ферочастинок, n – об'ємна концентрація, k – постійна Больцмана.

Тоді в слабких полях ($\xi \ll 1$) отримуємо:

$$\mu = 1 + \alpha\rho; \alpha = \frac{4\pi c_1 m^2}{3MkT},$$

де c_1 – масова концентрація магнітних частинок, M – маса однієї ферочастинок.

Нехтуючи змінами температури, будемо вважати $\alpha = \text{const}$. Тоді:

$$p_e = p^0(\rho, s^0) + \frac{1}{8\pi} (\chi_2^2 + \chi_3^2) - \frac{2\mu - 1}{8\pi\mu^2} \chi_1^2;$$

$$a^2 = a_0^2 + \frac{(\mu - 1)^2}{8\pi\mu^3} \chi_1^2; s^0 = s_0 = s; a_0^2 = \frac{\partial p^0(\rho, s^0)}{\partial \rho};$$

a_0^2 – квадрат швидкості звуку в середовищі у відсутності магнітного поля.

У цьому випадку, зокрема, одержуємо, що складові магнітного поля, перпендикулярні напрямку поширення хвилі, не впливають на швидкість поширення звуку. Крім того, швидкість поширення звуку уздовж напрямку магнітного поля більша, чим у відсутності поля.

Розглянемо випадок, коли параметр $\chi_1(t)$ змінюється в околиці деякого постійного значення χ_0 , так що:

$$\chi_1 = \chi_0 + \chi_1'(t); |\chi_1'| \ll |\chi_0|; \chi_1^2 \approx \chi_0^2 + 2\chi_0\chi_1'(t)$$

тоді

$$a^2(t) = a_0^2 + \frac{(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu^3} \chi_0^2 + \frac{(\mu-1)^2\chi_0}{2\pi\rho\mu^3} \chi_1'(t), \quad (4.10)$$

$a_0 = a_0(\rho_0, s_0)$, $\mu = \mu(\rho_0)$ – постійні параметри, визначені в рівноважному стані.

Зазначимо, що відповідне магнітне поле може бути створене у нескінченному соленоїді.

Припустимо, що $\chi_1'(t)$ змінюється за гармонійним законом: $\chi_1'(t) = \beta \cos(2\omega t)$; $|\chi_1'| \sim |\beta|$, $|\beta| \ll |\chi_0|$. Нехтуючи доданками порядку β^2 , одержимо з (4.9)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + [\psi_0 + 2\psi_{1s} \sin 2\tau] \frac{d\varphi}{d\tau} + \\ + [\theta_0 + 2(\theta_{1s} \sin 2\tau + \theta_{1c} \cos 2\tau)] \varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Тут:

$$\begin{aligned} \theta_0 = \frac{k^2}{\omega^2} A^2, \theta_{1s} = \frac{(\mu-1)^2 \chi_0 v_0 k^2}{2\pi\rho\mu^3 A^2 \omega} \beta, \theta_{1c} = \frac{(\mu-1)^2 \chi_0 k^2}{4\pi\rho\mu^3 \omega^2} \beta, \\ \psi_0 = \frac{k^2 v_0}{\omega}, \psi_{1c} = 0, \psi_{1s} = \frac{(\mu-1)^2 \chi_0}{2\pi\rho\mu^3 A^2} \beta, A^2 = a_0^2 + \frac{(\mu-1)^2}{4\pi\rho\mu^3} \chi_0^2 \end{aligned}$$

$\tau = \omega t$ - безрозмірний час.

4.2.1 Асимптотичний розв'язок

Рівняння (4.19) підстановкою

$$\varphi(\tau) = AZ \exp\left(-\frac{k^2 v_0 \tau}{2\omega}\right) \quad (4.12)$$

зводиться до наступного

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \left[\frac{k^2 a^2}{\omega^2} - \frac{2v_0 k^2}{\omega a} \frac{da}{d\tau} - \left(\frac{k^2 v_0}{16\omega} - \frac{1}{8a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right) \right] Z = 0$$

У випадку часової залежності швидкості звуку у вигляді (4.10) звідси отримаємо рівняння Хілла для функції Z :

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + [\theta_0 - \psi_0^2 + 2(\theta_{1c} - \psi_{1s}) \cos 2\tau + \theta_{1s} \sin 2\tau] Z = 0 \quad (4.13)$$

В першому наближенні по малому параметру β перехідні криві першої області нестійкості задаються рівністю

$$\theta_0 = 1 + \psi_0^2 \pm ((\theta_{1c} - \psi_{1s})^2 + \theta_{1s}^2)^{1/2}$$

Як випливає із (4.12), слід відшукувати нестійкі розв'язки рівняння (4.13).

Використовуючи метод Уіттекера [31, 85] прийmemo за перше наближення

$$Z = e^{\gamma\tau} \sin(\tau - \sigma) \quad (4.14)$$

Підставляючи (4.14) в (4.13) і прирівнюючи коефіцієнти при $\sin \tau$ та

$\cos \tau$, отримаємо для першої області нестійкості

$$\begin{aligned} 2\gamma &= (\theta_{1c} - \psi_{1s}) \sin 2\sigma - \frac{\theta_{1s}}{2} \cos 2\sigma \\ \theta_0 &= 1 + \psi_0^2 - \gamma^2 + (\theta_{1c} - \psi_{1s}) \cos 2\sigma + \frac{\theta_{1s}}{2} \sin 2\sigma \end{aligned} \quad (4.15)$$

Звідси знаходимо

$$\gamma^2 = -(1 + \theta_0 - \psi_0^2) \pm (4(\theta_0 - \psi_0^2) + (\theta_{1c} - \psi_{1s})^2 + \frac{\theta_{1s}^2}{4})^{1/2} \quad (4.16)$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{(\theta_{1c} - \psi_{1s}) \pm [(\theta_{1c} - \psi_{1s})^2 + \frac{\theta_{1s}^2}{4} - 4\gamma^2]^{1/2}}{2\gamma - \theta_{1s} / 2}$$

Нестійкому розв'язку відповідають $\gamma^2 \geq 0, 0 \leq \sigma \leq \pi / 2$.

З врахуванням (4.12), (4.14) в першому наближенні отримуємо наступний розв'язок рівняння (4.9):

$$\varphi(t) = A \exp((\gamma\omega - k^2 v_0 / 2)t) \sin(\omega t - \sigma)$$

Цей розв'язок періодичний при виконанні умови

$$\gamma = \frac{k^2 v_0}{2\omega}$$

При цьому рівняння (4.8) для потенціалу швидкості має періодичний розв'язок

$$\varphi(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t + \sigma)),$$

який відповідає потенціалу хвиль малої амплітуди, збуджуваних в результаті виникнення параметричної нестійкості намагнічуваного середовища. Частота збуджуваних хвиль вдвічі менша частоти параметричного збудження.

Враховуючи (4.16), отримуємо рівняння, яке визначає величину хвильового вектора в залежності від частоти параметричного збудження:

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{k^2 A^2}{\omega^2})^2 + \frac{1}{16} (\frac{k^2 v_0}{\omega})^2 [9(\frac{k^2 v_0}{\omega})^2 + 40] - \frac{3}{2} \frac{k^2 A^2}{\omega^2} \frac{k^2 v_0}{\omega} = \\ & = [\frac{\beta \chi_0 (\mu - 1)^2}{4\pi \rho \mu^3 A^2}]^2 [(\frac{k^2 A^2}{\omega^2} - 2)^2 + (\frac{k^2 v_0}{\omega})^2] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Звідси випливає, що збуджувані хвилі є дисперсійними і їх дисперсійність зумовлена в'язкістю середовища.

У випадку ідеального середовища рівняння (4.17) має два розв'язки:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = A^2 (1 \pm \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{\beta \chi_0 (\mu - 1)^2}{4\pi\rho\mu^3 A^2} \quad (4.18)$$

Отже, у цьому випадку хвилі поширюються без дисперсії. Оскільки A є швидкість хвиль у стаціонарному полі, то змінна частина магнітного поля може призводити як до збільшення їх швидкості, так і до зменшення.

Значення (4.18) відповідають періодичним розв'язкам рівняння (4.13) і значенням параметрів середовища, які належать границям областей стійкості. Таким чином, при одній і тій же частоті магнітного поля можуть збуджуватися хвилі різної довжини.

4.2.2 Результати чисельних розрахунків

Для слабких магнітних полів ($\xi \ll 1$) маємо лінійне диференціальне рівняння з періодичними коефіцієнтами для потенціалу швидкості (4.11). Його розв'язок будемо відшукувати у вигляді:

$$\phi(\tau) = e^{\gamma\tau/\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\tau} \quad (4.19)$$

де $\gamma = s + i\alpha$ – показник Флоке. Тоді з (4.11) одержуємо:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [q_n^2 + q_n(\psi_0 + 2\psi_{1s} \sin 2\tau) + \theta_0 + 2\theta_{1s} \sin 2\tau + 2\theta_{1c} \cos 2\tau] \phi_n e^{q_n\tau} = 0, \quad (4.20)$$

де

$$q_n = \frac{s}{\omega} + i\left(\frac{\alpha}{\omega} + n\right).$$

Використовуючи рівності

$$\sin 2\tau = \frac{e^{i2\tau} - e^{-i2\tau}}{2i}, \quad \cos 2\tau = \frac{e^{i2\tau} + e^{-i2\tau}}{2}$$

і перепозначаючи індекси підсумовування в (4.20) так, щоб показники експонент були однаковими, одержуємо рекурентне співвідношення для коефіцієнтів ϕ_n ряду (4.19):

$$(q_n^2 + q_n \psi_0 + \theta_0) \phi_n = [i(q_n \psi_{1s} + \theta_{1s}) - \theta_{1c}] \phi_{n+2} - [i(q_n \psi_{1s} + \theta_{1s}) + \theta_{1c}] \phi_{n-2} - [i(q_n \psi_{1s} + \theta_{1s}) + \theta_{1c}] \phi_{n-2}$$

або в символічному виді

$$C\phi = \beta B\phi, \quad (4.21)$$

де C – діагональна матриця з комплексними коефіцієнтами, B – дводіагональна матриця:

$$C = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & c_{-2,-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & c_{-1,-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & c_{0,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & c_{1,1} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2,2} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$c_{n,n} = q_n^2 + \frac{q_n k^2 v_0}{\omega} + \frac{k^2}{\omega^2} \left(a_0^2 + \frac{(\mu-1)^2 \chi_0^2}{4\pi\rho\mu^3} \right);$$

$$B = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 0 & 0 & b_{-2,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{-1,1} & 0 & \cdots \\ \cdots & b_{0,-2} & 0 & 0 & 0 & b_{0,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & b_{1,-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & b_{2,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$b_{n,n+2} = -\frac{(\mu-1)^2 \chi_0}{2\pi\rho\mu^3 \omega^2} \left[\frac{k^2}{2} + \frac{i(q_n \omega + v_0 k^2)}{a_0^2 + (\mu-1)^2 \chi_0^2 / (4\pi\rho\mu^3)} \right].$$

$$b_{n+2,n} = -\frac{(\mu-1)^2 \chi_0}{2\pi\rho\mu^3 \omega^2} \left[\frac{k^2}{2} - \frac{i(q_n \omega + v_0 k^2)}{a_0^2 + (\mu-1)^2 \chi_0^2 / (4\pi\rho\mu^3)} \right].$$

Обернувши матрицю C , одержимо задачу на власні значення:

$$(C^{-1}B)\phi = \frac{1}{\beta}\phi \quad (4.22)$$

Критерієм стійкості розв'язку (4.19) служить значення показника Флоке $\gamma = s + i\alpha$. При $s > 0$ ($s < 0$), розв'язок (4.19) буде зростати (убувати) із часом, що відповідає нестійкості (стійкості). Для побудови нейтральних кривих стійкості в площині (k, β) потрібно покласти $s = 0$, а також задати значення $\alpha = 0$ або $\alpha = 1/2$, що відповідає випадкам гармонійних і субгармонійних коливань. Матриці C й B обрізуються до розмірів, що забезпечують необхідну точність обчислень. Із власних значень вибирається найбільше або кілька найбільших позитивних дійсних власних значень $\frac{1}{\beta}$, що відповідають мінімальній амплітуді β . У всіх розрахунках використовувались наступні параметри рідини:

$$\nu = 0.1(\text{П}), \mu = 2, \sigma = 30 \left(\frac{\text{ерг}}{\text{см}^2} \right), \rho = 1.2 \left(\frac{\text{Г}}{\text{см}^3} \right), a_0 = 1.5 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right)$$

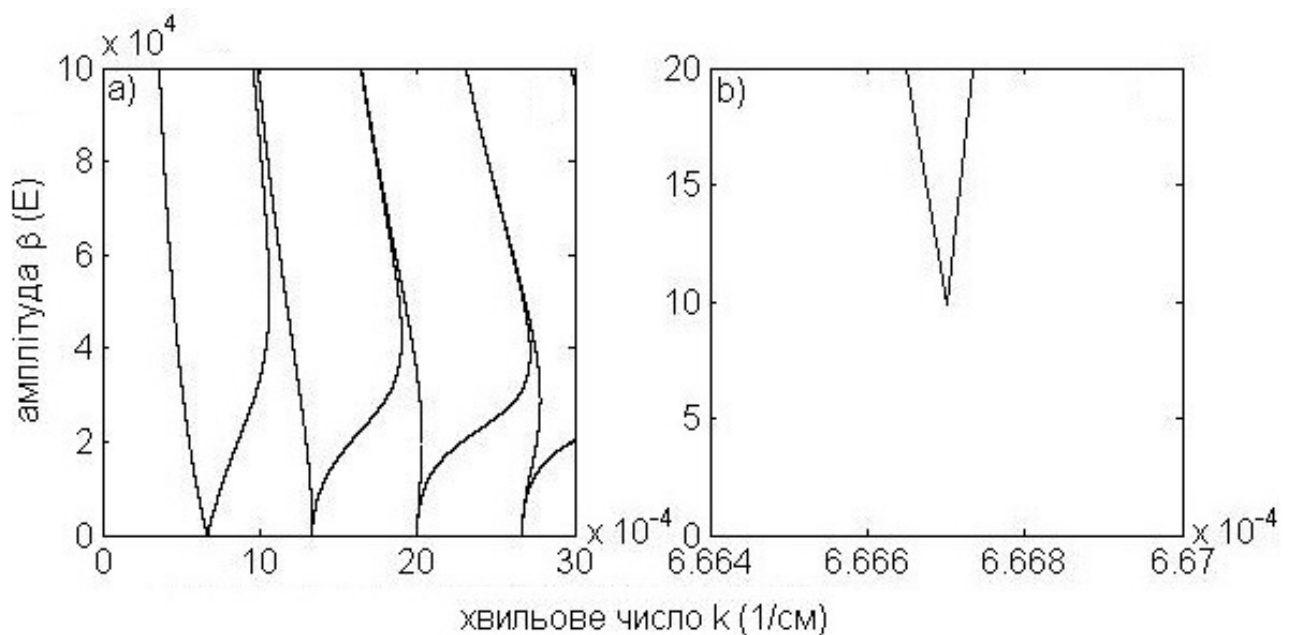


Рис.4.1: Нейтральні криві стійкості $\beta(k)$

при $\chi_0 = 125(E)$, $\omega = 100(\text{Гц})$

Області параметричної нестійкості для великих значень амплітуди магнітного поля β представлені на Рис.4.1.а). Перехідні криві стійкості утворюють області, значення параметрів усередині (ззовні) цих областей відповідають нестійкості (стійкості). При малих значеннях β області нестійкості стають дуже вузькими. Перша область нестійкості зображена на Рис.4.1.б). Варто відзначити, що для в'язкої рідини в площині (k, β) перехідні криві не перетинають горизонтальну вісь, тобто для виникнення нестійкості амплітуда β повинна перевищувати критичне значення β_c . Абсолютний мінімум нейтральних кривих визначає критичне хвильове число k_c й критичне значення амплітуди осцилюючого магнітного поля β_c , необхідних для виникнення нестійкості.

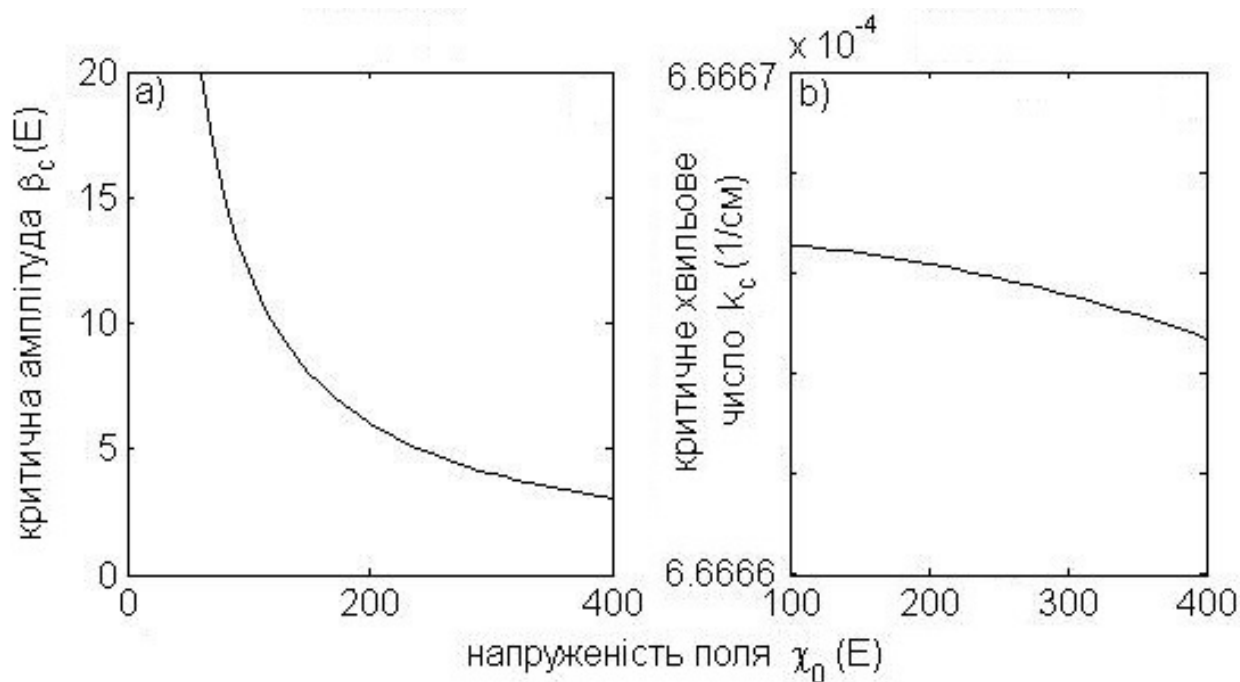


Рис 4.2. а) Залежність критичної амплітуди β_c й б) критичного хвильового числа k_c від напруженості стаціонарного поля χ_0

при $\omega = 100(\text{Гц})$

Проаналізуємо вплив стаціонарного поля χ_0 й частоти осциляцій поля ω на критичні значення амплітуди β_c й хвильового числа k_c . З Рис.4.2.а) видно, що при

збільшенні напруженості стаціонарного поля χ_0 критична амплітуда β_c зменшується, при цьому критичне хвильове число практично не змінюється (див. Рис.4.2.b)). Таким чином, стаціонарна компонента χ_0 знижує поріг розвитку параметричної нестійкості в осцилюючому горизонтальному магнітному полі. У результаті розрахунків також виявлено, що при збільшенні частоти ω критичне хвильове число k_c також зростає (див. Рис.4.3). Таким чином, при параметричному впливі на ферорідину нестационарним горизонтальним магнітним полем виникають звукові хвилі. Причому залежно від частоти параметричного збудження, можуть виникати як хвилі, що відповідають спектру ультразвукових частот, так і звукові хвилі чутного діапазону.

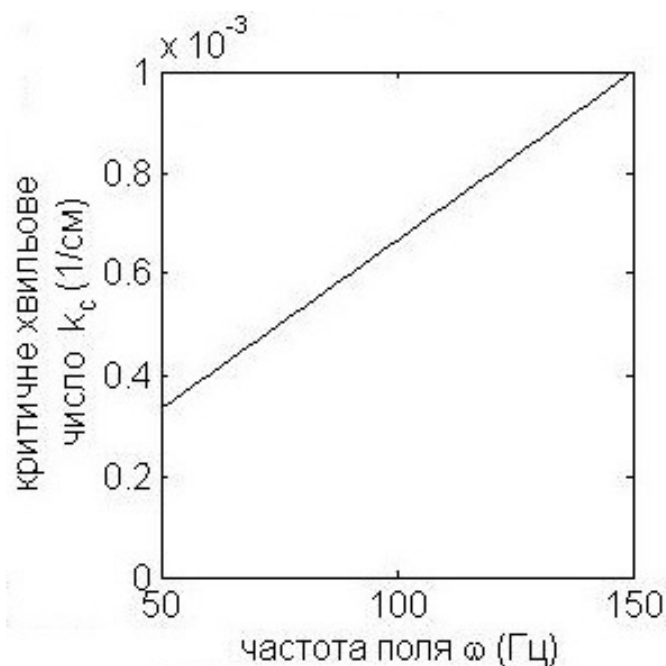


Рис. 4.3. Залежність критичного хвильового числа k_c від частоти ω осцилюючого поля при $\chi_0 = 125(E)$

4.3 Основні висновки розділу

Вивчено можливість втрати стійкості однорідних станів намагнічуваних середовищ при їхньому параметричному збудженні магнітним полем. Використовуючи асимптотичний метод Уїттекера встановлено, що:

– В однорідному нестационарному магнітному полі в ферорідині можуть збуджуватись ультразвукові хвилі з частотою, рівною половинній частоті магнітного поля.

– Збуджувані хвилі є дисперсійними завдяки в'язкості рідини. В ідеальній рідині вони поширюються без дисперсії. Амплітуда періодичних осциляцій магнітного поля призводить до збільшення швидкості поширення більш коротких хвиль.

Показано, що перехідні криві формують вузькі області нестійкості, які відповідають появі акустичних коливань у магнітній рідині. Досліджено залежність структури "язиків" нестійкості від частоти й стаціонарної компоненти магнітного поля. Встановлено, що збільшення частоти призводить до підвищення критичних хвильових чисел і критичних амплітуд поля, необхідних для збудження об'ємної параметричної нестійкості.

ВИСНОВКИ

Досліджено умови виникнення поверхневих і внутрішніх хвиль у шарах ферорідин, які взаємодіють із зовнішнім магнітним полем. Розв'язано задачі параметричної стійкості поверхні розділу намагнічуваних рідин при періодичній дії нахиленого магнітного поля та механічних вібрацій. Виконано аналіз механізмів втрати стійкості рівноважних станів розглянутих гідродинамічних систем. Основні наукові та практичні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

1. Показано, що магнітне поле, яке складається зі стаціонарної та осцилюючої частин здійснює двочастотне параметричне збудження поверхневих хвиль. Тільки осцилююче поле може збуджувати гармонічні коливання системи, тоді як додавання стаціонарної компоненти може призводити до появи бікритичних точок та переходу до субгармонічних коливань.

2. Для шару магнітної рідини з необмеженою вільною поверхнею обчислено границі областей стійкості у просторі ключових параметрів системи (хвильове число збурень, амплітуда періодичних впливів). При цьому отримано наступні результати:

– Поріг виникнення нестійкості Розенцвейга в стаціонарному вертикальному магнітному полі, можна підвищити за рахунок додавання осциляцій поля, які у цьому випадку проявляють ефект параметричної стабілізації.

– В нахиленому нестаціонарному магнітному полі його вертикальна й горизонтальна складові можуть компенсувати дію один одного, тому для збудження магнітної нестійкості Фарадея необхідно прикласти поле більшої амплітуди.

– Спільна дія механічних вібрацій і коливного магнітного поля може компенсувати параметричний вплив одне одного. Ефект параметричної стабілізації найсильніше проявляються при рівності частот періодичних модуляцій.

– Показано принципову можливість збудження параметричної нестійкості вільної поверхні ферорідини в результаті гармонічного збурення її температури за рахунок магнітокалоричного ефекту. В результаті коливань температури виника-

ють осциляції магнітного поля, які можуть призводити до збудження параметричної нестійкості й виникнення поверхневих хвиль.

3. Для систем магнітних рідин, розташованих у соленоїді або розділених пластиною із круглим отвором побудовано границі областей стійкості рівноважних станів. При цьому встановлено:

– Область значень параметрів, що відповідають виникненню просторових структур на вільній поверхні, розбивається на зони, кожна з яких характеризується цілком визначеною модою найбільш швидко зростаючих збурень поверхні.

– Зміна індукції магнітного поля, що викликає перехід фізичних параметрів з однієї зони в іншу, супроводжуються якісною перебудовою форм поверхні розділу.

– Зі збільшенням числа Бонда критичні значення індукції магнітного поля наближаються до значень, що відповідають випадку необмеженої поверхні розділу.

4. Досліджено умови виникнення внутрішніх хвиль в феррорідинах:

– Показано можливість збудження об'ємної параметричної нестійкості однорідних станів намагнічуваних середовищ при періодичній дії магнітного поля.

– Асимптотичними та чисельними методами встановлено параметри виникаючих акустичних хвиль, вплив стаціонарної й осцилюючої компонент магнітного поля на дисперсію звуку та швидкість його поширення.

– Показано, що перехідні криві утворюють вузькі області нестійкості, які відповідають появі ультразвукових коливань у магнітній рідині. Встановлено, що збільшення стаціонарної складової магнітного поля призводить до зменшення критичної амплітуди коливань поля, при якій збуджується об'ємний параметричний резонанс.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авраменко О. В. Энергія внутрішніх і поверхневих хвильових рухів у двошаровій гідродинамічній системі / О. В. Авраменко, В. В. Наратовий, І. Т. Селезов // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2017. – Т. 59, № 1. – С. 111 – 120.
2. Аврамов К. В. Динамическая устойчивость параболических оболочек в сверхзвуковом потоке / К. В. Аврамов, М. В. Чернобрышко, В. Н Романенко, Т. Я. Батутина, В. А. Пирог // Прикладная гидромеханика. – 2014. – Т. 16 (88), № 4. – С. 3 – 10.
3. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
4. Ахиезер А. И. Общая физика. Электрические и магнитные явления: справочное пособие / А. И. Ахиезер – Киев: Наукова думка, 1981.– 472 с.
5. Барков Ю. Д. Экспериментальное исследование неустойчивости плоских слоев намагничивающейся жидкости / Ю. Д. Барков, В. Г. Баштовой // Магнитная гидродинамика.– 1977. – № 4.– С. 137 – 140.
6. Баштовой В. Г. Введение в термомеханику магнитных жидкостей / В. Г. Баштовой, Б. М. Берковский, А. Н. Вислович. – М.: ИВТАН СССР, 1985.– 188 с.
7. Баштовой В. Г. Неустойчивость плоского слоя магнитной жидкости в закритической области магнитного поля / В. Г. Баштовой, М. С. Краков, А. Г. Рекс // Магнитная гидродинамика. – 1985. – № 1. – С. 19 – 24.
8. Блум Э. Я. Магнитные жидкости / Э. Я. Блум, М. М. Майоров, А. О. Цеберс. – Рига: Зинатне, 1989. – 386 с.
9. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин – М.: Гостехиздат, 1956. – 659 с.
10. Болотин В. В. О движении жидкости в колеблющемся сосуде / В. В. Болотин // Прикл. матем. и механика. – 1956. - Т. 20, Вып. 2 – С. 293 – 294.

11. Борисов И. Д. О малых движениях намагничивающейся вязкой жидкости / И. Д. Борисов, Т. Ю. Яценко // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2003. – Т.10, №2. – С. 135 – 146.
12. Борисов И. Д. О равновесных формах поверхности намагничивающейся жидкости / И. Д. Борисов // Магнитная гидродинамика. – 1976. - № 4. – С. 11–18.
13. Борисов И. Д. Неустойчивость Розенцвейга в двухслойной системе несмешивающихся намагничивающихся жидкостей / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка». – 2016. – Т. 84. – С. 46–60.
14. Борисов И. Д. Равновесные формы свободной поверхности намагничивающейся жидкости и их устойчивость / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев, Ю. И. Руднев // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 28 – 29.
15. Борисов І. Д. Нестійкість рівноваги, еволюція вільної поверхні магнітної рідини в закритичному магнітному полі / І. Д. Борисов, С. І. Поцелуєв, Ю. І. Руднєв // Матеріали міжнародної математичної конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». – Київ, 2014. – С. 42.
16. Бушуева К. А. Капельные структуры, образуемые феррожидкостью в однородном магнитном поле / К. А. Бушуева, К. Г. Костарев, А. В. Лебедев // Конвективные течения. – 2011.– Вып. 5. – С. 159 – 170.
17. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти томах / Ред. Совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978
Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. – 1978. - 352 с.
18. Гроот де С. Неравновесная термодинамика / С. де Гроот, П. Мазур. – М.: Мир, 1964. – 456 с.

19. Диканский Ю. М. Неустойчивость тонкого слоя магнитной жидкости в перпендикулярном магнитном поле / Ю. М. Диканский, А. Р. Закинян, Л. С. Мкртчян // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80, Вып. 9. – С. 38 – 43.
20. Диткин В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М.: Физматлит., 1961. – 524 с.
21. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуи Кан.– М.: Наука. – 1989.– 416 с.
22. Коровин В. М. Неустойчивость Розенцвейга в тонком слое магнитной жидкости / В. М. Коровин // Журнал технической физики. – 2013.– Т. 83, Вып. 12. – С. 17 – 25.
23. Коровин В. М. О влиянии горизонтального магнитного поля на неустойчивость Розенцвейга нелинейно намагничивающейся феррожидкости / В. М. Коровин // Журнал технической физики.–2014.–Т. 84, Вып.11.– С. 1 – 8.
24. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. - М.: Наука, 1973. - 407 с.
25. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях / Д. Лайтхилл. - М.: Мир, 1981. – 603 с.
26. Ламб Г. Гидродинамика / Г. Ламб – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
27. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
28. Любимов Д. В. Динамика поверхности раздела в вибрационных полях / Д. В. Любимов, Т. П. Любимова, А. А. Черепанов А. А. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. – 216 с.
29. Моисеев Н. Н. Динамика корабля, имеющего жидкие грузы / Н. Н. Моисеев // Изв. АН СССР, Отд. техн. наук. – 1954. – Т. 7. – С. 25 – 45.
30. Моисеев Н. Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев – М.: Наука, 1965. - С. 236 – 240.
31. Найфэ А. Методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
32. Неволин В. Г. Параметрическое возбуждение волн на границе раздела / В. Г. Неволин // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1977. – № 2. – С. 167 – 170.

33. Пацегон Н. Ф. Пространственные структуры в магнитных жидкостях / Н. Ф. Пацегон, Л. Н. Попова // Математичні методи і фізико-механічні поля. - 2010. -Т. 53, №3.- С. 159-169.
34. Пацегон Н. Ф. Об'ємний параметричний резонанс у магнітних рідинах стосовно збудження акустичних коливань / Н. Ф. Пацегон, С. І. Поцелуев // Матеріали міжнародної математичної конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». – Київ, 2014. – С. 99.
35. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Прикладная гидромеханика, – 2014. – т. 16 (88), № 3. – С. 36–51.
36. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности слоя вязкой феррожидкости при воздействии переменного магнитного поля и механических вибраций / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Техническая механика. – 2016. – № 2. – С. 71–84.
37. Полунин В. М. Акустические эффекты в магнитных жидкостях / В. М. Полунин // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 208 с.
38. Полунин В. М. Акустические свойства нанодисперсных магнитных жидкостей / В. М. Полунин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 383 с.
39. Поцелуев С. И. Параметрическая неустойчивость свободной поверхности нелинейно намагничивающейся жидкости / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». – Харьков: «Апостроф», 2011. – С. 91 – 92.
40. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // Матеріали міжнародної математичної конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». – Київ, 2014. – С. 103.

41. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 62 – 63.
42. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика / Р. Розенцвейг, пер. с англ. В. В. Кирюшина. – М.: Мир, 1989. – 356 с.
43. Секерж-Зенькович С. Я. Собственные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде / С. Я. Секерж-Зенькович // ПММ. – 1990. – Т. 54, Вып. 1. – С. 51 – 58.
44. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1. / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1973. – 536 с.
45. Сретенский Л. Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде / Л. Н. Сретенский // Изв. АН СССР, ОТН. – 1951. – № 10. – С. 1483 – 1494.
46. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский – М.: Наука, 1977. – 815 с.
47. Такетоми С. Магнитные жидкости: пер. с яп. / С. Такетоми, С. Тикадзуми. – М.: Мир, 1993 – 272 с.
48. Тарапов И. Е. К теории магнитогиродинамической смазки / И. Е. Тарапов // Магнитная гидродинамика. – 1969. – № 3. – С. 101–108.
49. Тарапов И. Е. Механика сплошной среды. В 3 частях. Часть 2. Общие законы кинематики и динамики / И. Е. Тарапов – Харьков: Золотые страницы, 2002. – 513 с.
50. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 частях. Часть 3. Механика невязкой жидкости / И. Е. Тарапов. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – С. 289 – 293.
51. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризуемых и намагничивающихся сред / И. Е. Тарапов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков, 1973. – Вып. 17. – С. 221 - 239.

52. Фертман В. Е. Магнитные жидкости / В. Е. Фертман. – Минск: Высшая школа, 1988. – 184 с.
53. Черноуцько Ф. Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде / Ф. Л. Черноуцько // ПММ. – 1966. – Т. 30, Вып. 6. – С. 836 – 847.
54. Черноуцько Ф. Л. Динамика твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость / Ф. Л. Черноуцько. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 342 с.
55. Шлиомис М. И. Магнитные жидкости / М. И. Шлиомис // Успехи физ. наук. – 1974. – Т. 112., Вып. 3. – С. 427 – 458.
56. Abou B. The instability in ferrofluids: hexagon-square transition mechanism and wavenumber selection / B. Abou, J. E. Westfreid, S. Roux // J. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 416. – P. 217 – 237.
57. Avramenko O. V. Conditions of Wave Propagation in a Two-Layer Liquid with Free Surface / O. V. Avramenko, V. V. Naradovyi, I. T. Selezov // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 212, № 2. – P. 131 – 141.
58. Avramov K. V. Dynamic instability of shallow shells in three-dimensional incompressible inviscid potential flow / K. V. Avramov, S. V. Papazov, I. D. Breslavsky // Journal of Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 394. – P. 593–611.
59. Bacri J. C. Roll-Rectangle Transition in the Magnetic Faraday Instability / J. C. Bacri, A. Cebers, J. C. Dabadie, R. Perzynski // Phys. Review E. – 1994. – Vol. 50. – P. 2712 – 2715.
60. Bajaj R. Parametric instability of the interface between two viscous magnetic fluids / R. Bajaj, S. K. Malik // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – Vol. 253. – P. 35–44.
61. Bajaj R. Two frequency parametric excitation of the surface of a viscous magnetic fluid / R. Bajaj // J. Magn. Magn. Mater. – 2003. – Vol. 261. – P. 29–47.
62. Bashtovoi V. G. Excitation and study of subcritical waves on a magnetic fluid surface / V. G. Bashtovoi, R. E. Rosensweig // J. Magn. Magn. Mater. – 1993. – Vol. 122, Issue 1-3. – P. 234 – 240.
63. Bellman R. Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability / R. Bellman, R. H. Pennington // Quart. Appl. Math. – 1954. – Vol. 12. – P. 151–162.

64. Benjamin T. B. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion / T. B. Benjamin, F. Ursel // *Proc. Roy. Soc.* – 1954. – Vol. A 225 – P. 505 – 515.
65. Borisov I. D. Small Oscillations of Magnetizable Ideal Fluid / I. D. Borisov, T. Yu. Yatsenko // *J. Math. Physics, Analysis, Geometry.* – 2010. – Vol. 6, №4. – P. 383 – 395.
66. Borisov I. D. Stability of equilibrium of a magnetic capillary fluid / I. D. Borisov // *Magnetohydrodynamics.* – 1983. – Vol. 19, № 2. P. 151 – 159.
67. Borysov I. D. Instability of equilibrium and appearance of ordered spatial structures on the free surface of ferrofluid / I. D. Borysov, S. I. Potseluev and T. Yu. Yatsenko // *Magnetohydrodynamics.* – 2014. – Vol. 50, №. 1. P. 3–12.
68. Cebers, A. Transverse Modulation of Magnetic-fluid Capillary Waves Parametrically Excited in an Alternating Tangential Field / A. Cebers, M. M. Maiorov // *Magnetohydrodynamics.* – 1989. – Vol. 25, № 4. – P. 445 – 448.
69. Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids / S. Odenbach, W. Beiglbock, J. Ehlers et al. – Berlin: Springer, 2009. – 430 p.
70. Cowley M. D. The Interfacial Instability of a Magnetic Fluid / M. D. Cowley, R. E Rosensweig // *J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol. 30, № 4. – P. 671 – 688.
71. Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces / M. Faraday // *Phil. Trans. of the Royal Society of London.* – 1831. – Vol. 121. – P. 319 – 346.
72. Gailitis A. Form of surface instability of a ferromagnetic fluid / A. Gailitis // *Magnetohydrodynamics.* – 1969. – Vol. 5, № 1. – P. 68–70.
73. Gailitis, A. Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field / A. Gailitis // *J. Fluid Mech.* 1977. – Vol. 82, № 3. – P. 401–413.
74. Gogosov V. V. Method for constructing model for description of magnetic fluid flows / V. V. Gogosov, G. A. Shaposhnicova / *European Advanced short Course "Magnetic fluid and Powders - new technological materials".* – Minsk, 1991. – 70 p.

75. Gollwitzer C. The surface topography of a magnetic fluid: a quantitative comparison between experiment and numerical simulation / C. Gollwitzer, G. Matthies, R. Richter et al. // *J. Fluid Mech.* – 2007. – Vol. 571. – P. 455 – 474.
76. Hennenberg M. Modelling of an oscillatory magnetic field action on a ferrofluid layer / M. Hennenberg, S. Slavtchev, B. Weyssow // *Microgravity Sci. Technol.* – 2009. – Vol. 21(Suppl.1). – P. 45—50.
77. Hennenberg M. On the Hill Equation Describing Oscillations of a Ferrofluid Free Surface in a Vertical Magnetic Field / M. Hennenberg, S. Slavtchev, G. Valchev // *Microgravity Sci. Technol.* – 2010. – Vol. 22, № 3. – P. 455 – 460.
78. Ibrahim R. A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications* / R. A. Ibrahim. – Cambridge University Press, 2005. – 947 p.
79. Kaiser A. Thermosensitive magnetic fluids / A. Kaiser T. Gelbrich, A. M. Schmidt // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2006. – Vol. 18. – P. 2563–2580.
80. Knieling H. Growth of surface undulations at the Rosensweig instability / H. Knieling, R. Richter, I. Rehberg // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol. 76. – P. 066301-1 – 066301-11.
81. Kumar K. Linear Theory of Faraday Instability in Viscous Fluids / K. Kumar // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1996. – A452. – P. 1113 – 1126.
82. Kumar K. Parametric Instability of the Interface Between Two Fluids / K. Kumar, L. S. Tuckerman // *J. Fluid Mech.* – 1994. – Vol. 279 – P. 49–68.
83. Lange A. Linear and nonlinear approach to the Rosensweig instability / A. Lange, R. Richter, L. Tobiska // *GAMM-Mitt.* – 2007. – Vol. 30, №1. – P. 171 – 184.
84. Mahr T. Magnetic Faraday instability / T. Mahr, I. Rehberg // *Europhys. Lett.* – 1998. – Vol. 43 (1). – P. 23–28.
85. McLachlan N. W. *Theory and application of Mathieu functions* / N. W. McLachlan. – Oxford University Press, 1951. – 412 p.
86. Mekhonoshin V. V. Faraday instability on viscous ferrofluids in a horizontal magnetic field: Oblique rolls of arbitrary orientation / V. V Mekhonoshin, A. Lange // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol. 65. – P. 061509-1–061509-7.

87. Mikaelian K. O. Rayleigh–Taylor instability in finite-thickness fluids with viscosity and surface tension / K. O. Mikaelian // *Physical Review E*. – 1996. – Vol. 54, № 4. – P. 3676–3680.
88. Muller H. W. Parametrically driven surface waves on viscous ferrofluids / H. W. Muller // *Phys. Rev. E*. – 1998. – Vol. 58.– P. 6199–6205.
89. Neuringer J. L. Ferrohydrodynamics / J. L. Neuringer, R. E. Rozensweig // *Phys. Fluids*. – 1964. – Vol. 7, № 12. – P. 1927 – 1937.
90. Nerukh A. Non-stationary Electromagnetics / A. Nerukh, N. Sakhnenko, T. Benson, P. Sewell. – Pan Stanford Publ., 2012. – 616 p.
91. Patsegon M. Interfacial stability of the ferrofluid in a constant and oscillating magnetic fields / M. Patsegon, I. Borisov, S. Potseluiiev // International conference «Differential equations and control theory». Book of abstracts. – Kharkiv, 2016. – P. 26.
92. Patsegon N. F. General properties of wave motion in nonconducting magnetized media / N. F. Patsegon // *Magnetohydrodynamics*. – 1990.– Vol. 26 – P. 279–283.
93. Patsegon N. F. Space structures in the magnetic fluids / N. F. Patsegon, L. N. Popova // *Journ. of Mathematical Sci.*- 2012.- Vol. 180, № 2. - P.175-186.
94. Patsegon N. F. Parametric instability of ferrofluid in oscillating magnetic fields / N. F. Patsegon, S. I. Potseluiiev // *Современные проблемы естественных наук. Сборник тезисов докладов междунар. конф. «Гараповские чтения-2016»*. – Харьков: «Цифровая типография №1», 2016. – С. 77.
95. Patsegon N. F. The volumetric parametric resonance in magnetizable medium / N. F. Patsegon, S. I. Potseluiiev // *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. – 2015. – Vol. 81.– P. 20 – 35.
96. Perry M. P. Interfacial Parametric Ferrohydrodynamics / M. P. Perry, T. B. Jones // *Journal of Applied Physics*. – 1975. – Vol. 46, № 2 – P. 756 – 760.
97. Poehlmann A. Unravelling the Rayleigh-Taylor instability by stabilization / A. Poehlmann, R. Richter, I. Rehberg // *J. Fluid Mech*. – 2013. – Vol. 732, R3. – P. 1 – 10.

98. Potseluev S. I. Parametric instability of ferrofluid layer free surface in oscillating magnetic fields / S. I. Potseluev // *Mechanics. Research and Innovations.* – Gomel, 2016. – P. 6 – 13.
99. Potseluev S. I. Parametric oscillations of two-layer system of immiscible ferrofluids / S. I. Potseluev // 5th International conference of young scientist on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. Book of abstracts. – Kyiv, 2016 – P. 119.
100. Potseluev S. I. Parametrical instability of the free surface of nonlinear magnetizable fluid / S. I. Potseluev, N.F. Patsegon // *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences.* – Kharkov: «Apostrof», 2011. – P. 104–119.
101. Rannacher D. Suppressing the Rayleigh-Taylor instability with a rotating magnetic field / D. Rannacher, A. Engel // *Phys. Rev. E.* – 2007.– Vol. 75.– P. 016311-1 – 016311-8.
102. Richter R. Surface instabilities of ferrofluids / R. Richter, A. Lange // *Lect. Notes Phys.* – 2009. – № 763. – P. 157–247.
103. Taylor G. I. The stability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes / G. I. Taylor // *Proc. Roy. Soc.* – 1950. – Vol. A201. – P. 192–196.
104. Tarapov I. E. The hydrodynamics of polarizing and magnetizing media / I. E. Tarapov // *Magnetohydrodynamics.* - Vol. 8, No. 1. – 1972. P. 1 - 8.
105. Tarapov I. E. Simple waves in nonconducting magnetizable medium / I. E. Tarapov // *Journ. of Appl. Math. Mech. (PMM).* – 1973. – Vol. 37. – P. 813–821.
106. Tarapov I. E. Surface waves and the stability of the free surface of a magnetizable fluid / I. E. Tarapov // *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* – 1974. – Vol. 15, № 4. – P. 465 – 469.
107. Wolf G. W. The dynamic stabilization of Rayleigh-Taylor instability and corresponding dynamic equilibrium / G. W. Wolf // *Zeitschrift für Physik.* – 1969. – Vol. 227, № 3. – P. 291 – 300.

ДОДАТКИ

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на:

- Міжнародній конференції «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» присвяченій 50-річчю механіко-математичного факультету ХНУ імені В. Н. Каразіна (Харків, 17 – 22 квітня 2011 р., очна участь).
- Міжнародній школі-конференції «Сучасні проблеми математики, механіки й інформатики» («Тараповські читання – 2013») присвяченій 150-річчю кафедри теоретичної та прикладної механіки ХНУ імені В. Н. Каразіна (Харків, 29 вересня – 4 жовтня 2013 р., очна участь).
- Міжнародній математичній конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій і математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г. М. (Київ, 23 – 24 квітня 2014 р., очна участь).
- Міжнародній конференції «Сучасні проблеми природничих наук» («Тараповські читання – 2016») (Харків, 1 – 15 березня 2016 р., заочна участь).
- Міжнародній конференції «Диференціальні рівняння й теорія керування» присвяченій 75-річчю В. І. Коробова (Харків, 26 – 28 вересня 2016 р., очна участь).
- 5-й міжнародній конференції для молодих учених «Диференціальні рівняння і їх застосування» присвяченій Я. Лопатинському (Київ, 9 – 11 листопада 2016 р., очна участь).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / Н.Ф. Пацегон, С.И. Поцелуев // Прикладная гидромеханика. – 2014. – Т. 16 (88), № 3. – С. 36–51.
2. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности слоя вязкой феррожидкости при воздействии переменного магнитного поля и механических вибраций / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Техническая механика. – 2016. – № 2. – С. 71–84.
3. Borysov I. D. Instability of equilibrium and appearance of ordered spatial structures on the free surface of ferrofluid / I. D. Borysov, S. I. Potseluev and T. Yu. Yatsenko // Magnetohydrodynamics. – 2014. – Vol. 50, №.1. – P. 3–12.
4. Борисов И. Д. Неустойчивость Розенцвейга в двухслойной системе несмешивающихся намагничивающихся жидкостей / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка». – 2016. – Т. 84. – С. 46–60.
5. Patsegon N. F. The volumetric parametric resonance in magnetizable medium / N. F. Patsegon, S. I. Potseluev // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна: Серія «Математика, прикладна математика, механіка». – 2015. – Т. 81.– С. 20 – 35.
6. Potseluev S. I. Parametric instability of ferrofluid layer free surface in oscillating magnetic fields / S. I. Potseluev // Mechanics. Researches and Innovations. – 2016. – Vol. 9. – P. 6 – 13.
7. Potseluev S. I. Parametrical instability of the free surface of nonlinear magnetizable fluid / S. I. Potseluev, N.F. Patsegon // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. – Харьков: «Апостроф», 2011.–С. 104–119.
8. Potseluev S. I. Parametric oscillations of two-layer system of immiscible ferrofluids / S. I. Potseluev // 5th International conference of young scientist on differential

- equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. Book of abstracts. – Kyiv, 2016. – P. 119.
9. Patsegon M. Interfacial stability of the ferrofluid in a constant and oscillating magnetic fields / M. Patsegon, I. Borisov, S. Potseluiiev // International conference «DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY». Book of abstracts. – Kharkiv, 2016. – P. 26.
 10. Patsegon N. F. Parametric instability of ferrofluid in oscillating magnetic fields / N. F. Patsegon, S. I. Potseluiiev // Современные проблемы естественных наук. Сборник тезисов докладов междунар. конф. «Тараповские чтения-2016». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2016. – С. 77.
 11. Борисов И. Д. Нестійкість рівноваги, еволюція вільної поверхні магнітної рідини в за критичному магнітному полі / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев, Ю. И. Руднев // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 42.
 12. Пацегон Н. Ф. Об'ємний параметричний резонанс у магнітних рідинах стосовно збудження акустичних коливань / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 99.
 13. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки». Матеріали конференції. – Київ, 2014. – С. 103.
 14. Борисов И. Д. Равновесные формы свободной поверхности намагничивающейся жидкости и их устойчивость / И. Д. Борисов, С. И. Поцелуев, Ю. И. Руднев // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 28 – 29.

15. Поцелуев С. И. Устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013». – Харьков: «Цифровая типография №1», 2013. – С. 62 – 63.
16. Поцелуев С. И. Параметрическая неустойчивость свободной поверхности нелинейно намагничивающейся жидкости / С. И. Поцелуев, Н. Ф. Пацегон // «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях». Тезисы докладов международной конференции. – Харьков: «Апостроф», 2011. – С. 91 – 92.