Харьковский национальный университет
имени В.Н. Каразина

На правах рукописи

Нгуен Ван Куинь

УДК 517.574

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ И ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
Гришин Анатолий Филиппович,
доктор физико-математических наук,
профессор,
Фаворов Сергей Юрьевич,
доктор физико-математических наук,
профессор.

Харьков – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{C}$	– комплексная плоскость
$\mathbb{R}^m$	– m-мерное вещественное евклидовое пространство (в случае $m = 2,\ \mathbb{R}^2$ отождествляется с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$)
$\|x\|$	– евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^m$ (в случае комплексной плоскости $\mathbb{C}$ используем стандартное обозначение $\lvert z\rvert := \|z\|$)
$C(x, r)$	– открытый m-мерный шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$
$B(x, r)$	– замкнутый m-мерный шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$
$CB(x, r)$	– дополнение пространства $\mathbb{R}^m$ к множеству $B(0, r)$
$S(x, r)$	– m-мерная сфера радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$
$R([a, b])$	– разность множеств $B(0, b)$ и $C(0, a)$ (состоит из всех точек, принадлежащих $B(0, b)$, но не принадлежащих $C(0, a)$)
$R([a, b))$	– разность множеств $C(0, b)$ и $C(0, a)$
$R((a, b])$	– разность множеств $B(0, b)$ и $B(0, a)$
$R((a, b))$	– разность множеств $C(0, b)$ и $B(0, a)$
$\overline{G}$	– замыкание множества G
$\mathring{G}$	– множество всех внутренних точек множества G
$\mathscr{D}(G)$	– пространство бесконечно дифференцируемых финитных в G функций
$\mathscr{D}'(G)$	– пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{D}(G)$

$\Phi(G)$	– пространство непрерывных финитных в G функций
$\Phi'(G)$	– пространство линейных непрерывных функционалов на $\Phi(G)$
$C(K)$	– пространство непрерывных функции в K
$L_{1,loc}(\mathbb{C})$	– пространство локально интегрируемых функций в $\mathbb{C}$
$\triangle$	– оператор Лапласа

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Одним из важнейших разделов классического анализа является теория субгармонических функций и, более общо, теория потенциала в конечномерном пространстве. Началась эта теория с основополагающих работ Ф. Гартогса (1906) и Ф. Рисса (1926). Она тесно связана с задачами математической физики, с одной стороны, и теорией аналитических функций, с другой. Мы не имеем возможности перечислять фамилии всех математиков, работавших в этой области, отметим лишь тех, чьи работы тесно связаны с тематикой нашей диссертации: М. Цудзи, Н. С. Ландкоф, У. Хейман, В. С. Азарин, А. Ф. Гришин, М. Л. Содин, А. Е. Еременко.

Особо отметим здесь созданную В. С. Азариным теорию предельных множеств субгармонических функций. Эта теория позволяет свести изучение асимптотических свойств функций к изучению локальных свойств субгармонических функций. На этом пути В. С. Азарину и его последователям А. Ф. Гришину, М. С. Содину, А. Е. Еременко удалось существенно упростить теорию целых функций вполне регулярного роста, созданную ранее в работах Б. Я. Левина и А. Пфлюгера, а также решить ряд давно стоящих и новых задач теории целых и мероморфных функций.

Отметим, что большинство конструкций в этой теории опирается на сходимости тех или иных мер и их потенциалов в смысле теории обобщенных функций.

Отметим также, что дальнейшее развитие теории предельных множеств потребовало изучение свойств так называемых δ- субгармонических функций (разностей субгармонических функций).

Таким образом, исследования, проводимые в данной диссертации, являются актуальными.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена на кафедрах математического анализа и теории функций и функционального анализа Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина в рамках государственных научно-исследовательских работ по темам «Комплексный анализ в теории операторов, теории интегралов Фурье и геометрии» (номер государственной регистрации 0111U010366) и «Разработка теоретико-функциональных методов и применение в теории операторов и математической статистике» (номер государственной регистрации 0115U000481).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование связи сходимости последовательности δ- субгармонических функций в смысле теории обобщённых функций с другими видами сходимости, получение новых результатов в теории предельных множеств для δ-субгармонических функций и мер Радона, а также получение решения для вопроса о существовании целой функции нулевого уточнённого порядка.

Объект исследования – целые функции, субгармонические функции, δ-субгармонические функции и их ассоциированные меры.

Предметом исследования являются свойства δ-субгармонических функций, их связь с свойствами ассоциированных мер, сходимость δ- субгармонических функций в разных метриках.

Задачи исследования. Основные задачи исследования заключались в следующем:

1. Доказать существование целой функции заданного нулевого уточнённого порядка.
2. Получить условия, при которых из сходимости последовательности $v_n(x)$ как последовательности обобщённых функций следует ее сходимость в пространствах Лебега $L_p(\gamma)$.

3. Получить новые теоремы о представлении для δ- субгармонических функций.

4. Получить новые результаты в теории предельных множеств для δ-субгармонических функций и их ассоциированных мер.

Методами исследования являются методы математического анализа, в том числе методы теории потенциала, методы функционального анализа, а также некоторые элементы теории динамических систем.

Научные новизна полученных результатов. В работе впервые:

1. Полностью решен вопрос о существовании целой функции заданного нулевого уточнённого порядка.

2. Получены достаточные условия на меру γ с носителем, компактно вложенным в $G \subset \mathbb{R}^m,\ m > 2$, при которых из сходимости последовательности v_n как последовательности обобщённых функций следует ее сходимость в пространствах с интегральной метрикой с мерой γ.

3. Найдены новые представления δ- субгармонических функций в форме типа Брело.

4. Построена теория предельных множеств для класса δ- субгармонических функций и радоновых мер, доказаны три критерия того, чтобы заданное множество было предельным множеством некоторой радоновой меры.

Практическое значение полученных результатов. Результаты, полученные в работе, носят теоретический характер. Они находят применение при изучении теории вполне регулярного роста целых и мероморфных функций в смысле Левина-Пфлюгера, могут быть использованы как в теории функции комплексного переменного, так и в других разделах математики, где используются целые, субгармонических и δ-субгармонических функций.

Личный вклад соискателя. В совместных с научным руководителем статьях [9], [12], [13] А. Ф. Гришину принадлежат постановки задач и обсуждения результатов. Кроме того, И. В. Поединцевой принадлежит идея доказательства Теорема 11 в работе [9]. Остальные результаты получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Международная школа-конференция "Тараповские чтения – 2013 посвященной 150-летию кафедры теоретической и прикладной механики. Харьков, 29 сентября – 4 октября 2013 г.

2. II International Conference : "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHISICS". Kharkiv, June 16– 20, 2014.

3. X международная конференция для молодых ученных "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях". Харьков, 24 –25 апреля 2015 г.

4. Городской семинар по теории функций Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (руководитель семинара – проф. С. Ю. Фаворов).

5. Семинар по анализу Сумского национального университета (руководитель семинара – проф. К. Г. Малютин).

Публикация. Результаты диссертации нашли отражение в 8 научных публикациях, в том числе в 5 статьях ([9], [12], [13], [21], [36]) в специализированных журналах из списка ВАК, тезисах вступлений на 3 конференциях ([22], [23], [37]).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех разделов, выводов и списка использованных источников, который содержит

38 наименования и занимает 5 страниц. Общий объем диссертации составляет 149 страниц. Результаты, вынесенный на защиту, изложены в разделах 2,3.

Выражаю искреннюю благодарность моим научным руководителям: докторам физико-математических наук, профессорам Гришину Анатолию Филипповичу и Фаворову Сергею Юрьевичу за внимание и поддержку.

РАЗДЕЛ 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Уточнённый порядок

Важным инструментом для исследовании функций конечного порядка является уточнённый порядок.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0, \infty)$ называется уточнённым порядком (в смысле Валирона [38]), если выполняются два условия:
1) существует предел $\rho = \lim\limits_{r \to \infty} \rho(r)$,
2) $\lim\limits_{r \to \infty} r\rho'(r) \ln r = 0$ (под $\rho'(r)$ следует понимать максимальное по модулю производное число).

В случае, если $\rho = 0$, то уточнённый порядок $\rho(r)$ называется нулевым уточнённым порядком.

В диссертационной статье систематически используется обозначение $V(r) = r^{\rho(r)}$. Уточнённые порядки $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ называется эквивалентными, если выполняется равенство

$$\lim_{r \to \infty} \frac{V_1(r)}{V_2(r)} = 1.$$

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0, \infty)$. Величина

$$\rho = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln f(r)}{\ln r}$$

называется порядком функции f.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется уточнённым порядком функции f, если выполняется соотношение

$$\sigma = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{f(r)}{V(r)} \in (0, \infty). \tag{1.1}$$

Отметим, что если $\rho(r)$ – уточнённый порядок функции f, а уточнённый порядок $\rho_1(r)$ эквивалентен уточнённому порядку $\rho(r)$, то $\rho_1(r)$ также является уточнённым порядком функции f.

Величина σ равенством (1.1) определяется для произвольной положительной функции f и произвольного уточнённого порядка $\rho(r)$. Она называется типом функции f относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. В общем случае $\sigma \in [0, \infty]$. Если при этом выполняется неравенство $\sigma < \infty$, то функция $f(r)$ называется функцией не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Важность понятия уточнённого порядка можно увидеть из следующей теоремы, входящей к Валирону.

Теорема 1.1. (см. [18], глава 1, §12, теорема 16). *Пусть* $f(z)$ *– положительная на полуоси* $(0, \infty)$ *функция конечного порядка. Тогда существует уточнённый порядок* $\rho(r)$*, который является уточнённым порядком функции* f*.*

Соотношение (1.1) показывает, что уточнённый порядок $\rho(r)$ используется для описания поведения функции $f(r)$ в окрестности бесконечности. В этом случае поведение функции $\rho(r)$ на интервале $(0, a)$ не играет никакой роли.

Вместе с тем в приложениях часто встречаются интегралы вида $\int\limits_0^\infty K(t,r)V(t)dt$. При исследовании таких интегралов важно поведение функции $\rho(r)$ на всей полуоси. Поэтому в случае нулевого уточнённого порядка $\rho(r)$, кроме условий 1) и 2) из определения уточнённого порядка мы будем требовать, чтобы выполнялось условие

$$\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r). \tag{1.2}$$

Это условие множно также записать в виде $V(\frac{1}{r}) = V(r)$.

В случае произвольного уточнённого порядка дополнительное условие на уточнённый порядок выглядит так. Произвольный уточнённый порядок

$\rho(r)$ представляется в виде $\rho(r) = \rho + \rho_1(r)$, где $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Мы будем требовать, чтобы для уточнённого порядка $\rho_1(r)$ выполнялось равенство (1.2). В дальнейшем будет считаться, что уточнённый порядок удовлетворяет этому дополнительному условию.

Сформулируем несколько свойств уточнённого порядка, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем.

Теорема 1.2. (см. [18], глава 1, $\S\,12$, лемма 5). *Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок. Тогда для любого $t > 0$*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^\rho,$$

причём имеет место равномерная сходимость на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Теорема 1.3. (см. например [8], теорема 2.5). *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Пусть*

$$\gamma(t) = \sup_{r>0} \frac{V(rt)}{V(r)}.$$

Тогда $\gamma(t)$ – непрерывная функция на полуоси $(0, \infty)$, причём функции $\gamma(t)$ и $\gamma(\frac{1}{t})$ имеют нулевой порядок, то есть

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \gamma(t)}{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \gamma(\frac{1}{t})}{\ln t} = 0.$$

Теорема 1.4. (см. например [8], теорема 4.1.3). *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Пусть $K(t)$ – функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что существует $\delta > 0$ такое, что функции $t^{\pm\delta}K(t)$ принадлежат пространству $L_1(0, \infty)$. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) V(t)dt = \int\limits_0^\infty K(t)dt.$$

Теорема 1.5. (см. например [8], лемма 2.2 и [7], теорема 7). *Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Тогда существует эквивалентный* *ему уточнённый порядок* $\rho_1(r)$ *такой, что функция* $V_1(r)$ *допускает голоморфное продолжение в полуплоскость* $Rez > 0$ *и для любого* $n \geq 1$ *выполняется равенство*

$$\lim_{r\to\infty} r^n \rho_1^{(n)}(r) \ln r = 0.$$

При этом

$$V_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{V(t)}{t^2+z^2} dt, \; Rez > 0.$$

Замечание. Имеется глобальное неравенство

$$V(rt) \leq \gamma(t) V(r), \; r, t > 0, \tag{1.3}$$

где $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок.

Если $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, то

$$V(rt) = (rt)^{\rho(rt)} = t^\rho r^\rho (rt)^{\rho_1(rt)} \leq \gamma(t) t^\rho r^\rho V_1(r) = \gamma(t) t^\rho V(r), \tag{1.4}$$

где $\rho = \rho(\infty)$, а функция $\gamma(t)$ построена с помощью нулевого уточнённого порядка $\rho_1(r)$.

1.2. Сведение о мерах

Здесь приводятся некоторые определения и результаты из теории меры.

Обобщенная функция Шварца – это линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $\mathscr{D}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, состоящим из финитных бесконечно дифференцируемых функций в G со стандартным определением сходимости. Пространство обобщённых функций обозначается через $\mathscr{D}'(G)$. Изложение теории обобщённых функций можно найти в [4], [17].

Обозначим через $\Phi(G)$, $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ линейное пространство непрерывных финитных функций в G. В пространстве $\Phi(G)$ понятие сходимости вводится следующим образом. Последовательность функций

$\varphi_n(x)$ сходится к функции $\varphi(x)$ в пространстве $\Phi(G)$, если существует компакт, содержащий носители всех функций $\varphi_n(x)$ и последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ в области G. Через $\Phi'(G)$ обозначается пространстве линейных непрерывных функционалов над пространством $\Phi(G)$.

В диссертационной работе используется мера Радона, которая определяется как разность двух локально конечных взаимно сингулярных положительных борелевских мер $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Область определения меры Радона μ состоит из всех борелевских множеств $E \subset G$, за исключением тех E, для которых выполняются равенства

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) = +\infty.$$

Таким образом, в общем случае μ не является борелевской мерой. В её область определения не входит достаточно широкий класс борелевских множеств. Для нас важно то, что область определения μ содержит все борелевские множества E с компактным замыканием.

Пространство мер Радона $\mathcal{M}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ определяется как пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $\Phi(G)$.

В пространстве мер Радона $\mathcal{M}(G)$ будем рассматривать три типа сходимости.

Пусть μ_n – последовательность мер Радона в области G, которая сходится как последовательность обобщённых функций к обобщённой функции μ, т.е. для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(G)$: $(\mu_n, \varphi) \to (\mu, \varphi)$. Такую сходимость будем обозначать

$$\mu = \mathcal{T} \lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

Если существует мера Радона μ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ выполняется соотношение $(\mu_n, \varphi) \to (\mu, \varphi)$, то будем говорить, что последовательность μ_n широко сходится к μ, и в этом случае будем писать

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

Пусть K – некоторый компакт. Если существует борелевская мера μ на компакте K такая, что для любой функции $\varphi \in C(K)$ выполняется соотношение $(\mu_n, \varphi) \to (\mu, \varphi)$, то будем говорить, что последовательность μ_n слабо сходится к μ (w-сходимость), и писать

$$\mu = \mathrm{w}\lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

Здесь считается, что компакт K однозначно определяется из текста. Заметим, что w-сходимость совпадает со слабой сходимостью в пространстве $C^*(K)$.

Рассуждения об сходимости удобнее проводить в метрических пространствах. Поэтому мы будем использовать в пространстве $\mathcal{M}(G)$ следующие известные метрики. Пусть $\{\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ – счётное всюду плотное множество в пространстве $\Phi(G)$. Это означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ существует подпоследовательность φ_{n_k} последовательности φ_n такая, что $\varphi_{n_k} \to \varphi$ в пространстве $\Phi(G)$. Далее по последовательности φ_n определяем функцию

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\mu_2 - \mu_1, \varphi_n)|}{2^n(1 + |(\mu_2 - \mu_1, \varphi_n)|)},$$

где $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathcal{M}(G)$. Легко проверяется, что d – метрика в пространстве $\mathcal{M}(G)$.

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ множество вещественных чисел $\{(\mu, \varphi):\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ является ограниченным.

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется сильно ограниченным, если для любого компакта $K \subset G$ множество $\{|\mu|(K):\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ является ограниченным.

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется компактным, если всякая последовательность мер $\mu_n \in \mathfrak{M}$ имеет широко сходящуюся подпоследовательность.

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется компактом, если $\mathfrak{M}$ компактное множество и для любой широко сходящейся последовательность μ_n мер из $\mathfrak{M}$ её предел принадлежит $\mathfrak{M}$.

Пусть μ – положительная мера, E – борелевское множество. Говорят, что множество E измеримо по Жордану относительно меры μ, если $\mu(\partial E) = 0$.

Теорема 1.6. (см. [3], глава 3, §2, предложение 15 и следствия к нему). *Семейства широко ограниченных, сильно ограниченных и компактных множеств в пространстве $\mathcal{M}(G)$ совпадают.*

Исследуем связь между различными видами сходимости последовательностей радоновых мер. Очевидно, что из широкой сходимости следует $\mathcal{T}$-сходимость. Обратное утверждение неверно. Это следует из следующего примера

Пример 1.1. Пусть $\mu_n = \sqrt{n}\left((\delta\left(x - \frac{1}{n}\right) - \delta(x-0)\right)$, где $\delta(x - x_0)$ – мера Дирака на вещественной оси, сосредоточенная в точке x_0.

Из теоремы Лагранжа следует, что $\mathcal{T}\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

Беря функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \sqrt[4]{|x|}}, |x| \le 1 \\ 0, \qquad\qquad\quad |x| > 1, \end{cases}$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n, \varphi) = -\infty.$$

Нетрудно видеть, что из соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k \to \mu$ следует, что $d(\mu_k, \mu) \to 0$. Однако, обратное утверждение неверно. Это следует из следующего примера

Пример 1.2. Пусть все функции φ_n непрерывно дифференцируемы, а

$$\mu_k = k\left(\delta\left(x-1-\frac{1}{2k}\right)-\delta\left(x-1+\frac{1}{2k}\right)\right)$$
$$-\sqrt{2}k\left(\delta\left(x-1-\frac{1}{2\sqrt{2}k}\right)-\delta\left(x-1+\frac{1}{2\sqrt{2}k}\right)\right),$$

где $\delta(x-a)$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке a. Тогда по теореме Лагранжа имеем $d(\mu_k, 0) \to 0$ при $k \to \infty$.

В то время соотношение $\lim\limits_{k\to\infty}(\mu_k, \varphi) = +\infty$ выполняется при

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{1-|x|}, |x| \le 1 \\ 0, \qquad\qquad |x| > 1, \end{cases}$$

Теорема 1.7. (см. [17], теорема 0.4). *Для того, чтобы последовательность μ_n положительных радоновых мер в G широко сходилась к радоновой мере μ, достаточно, чтобы соотношение $(\mu_n, \varphi) \to (\mu, \varphi)$ выполняется на всюду плотном множестве в пространстве $\Phi(G)$.*

Из этой теоремы вытекает следующие утверждения

Теорема 1.8. *Пусть радоновы меры μ и ν в пространстве $\mathcal{M}(G)$ таковы, что равенство $(\mu, \varphi) = (\nu, \varphi)$ выполняется на всюду плотном множестве в пространстве $\Phi(G)$. Тогда $\mu = \nu$.*

Теорема 1.9. *Пусть μ_n – последовательность положительных радоновых мер. Тогда широкая и $\mathcal{T}$-сходимости эквивалентны.*

Теорема 1.10. *Если последовательность μ_n радоновых мер является $\mathcal{T}$-сходящейся и слабо ограниченной, то она широко сходится.*

Из теоремы 0.5' [17] вытекает следующее утверждение

Теорема 1.11. *Пусть последовательность радоновых мер $\mu_n \in \mathcal{M}(G)$ сходится к радоновой мере μ, а последовательность $|\mu_n|$ сходится к мере $\hat{\mu}$. Пусть K – компакт такой, что $K \subset G$ и $\hat{\mu}(\partial K) = 0$.*

Тогда последовательность μ_n *рассматриваемая как последовательность борелевских мер на* K *слабо сходится к мере* μ.

Теорема 1.12. (см. [36], теорема 6). *Пусть последовательность борелевских мер* μ_n *на компакте* K, *рассматриваемая как последовательность элементов пространства* $C^*(K)$, *слабо сходится к нулю. Пусть* M *– компактное множество в* $C(K)$. *Тогда*

$$\sup\{|(\mu_n, \varphi)| : \varphi \in M\} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Теорема 1.13. (см. [8], теорема 3.8). *Если* μ_k *– компактная последовательность в* $\mathcal{M}(G)$ *и* $d(\mu_k, \mu) \to 0$, *то* μ_k *широко сходится к* μ.

Замечание. В общем случае сходимость в метрике d слабее широкой сходимости в $\mathcal{M}(G)$, в то время как на компактных множествах в $\mathcal{M}(G)$ оба вида сходимости эквивалентны. Метрика d определяется счётной всюду плотной последовательностью φ_n. Следовательно существует бесконечное число метрик такого типа. В общем случае из сходимости последовательности μ_n в одной метрике не следует сходимости в другой метрике. Однако на компактных множествах в $\mathcal{M}(G)$ сходимость последовательности μ_n в одной из метрик влечёт широкую сходимость этой последовательности и, значит, сходимость μ_n в любой метрике рассматриваемого типа.

1.3. Субгармонические функции

Изложение теории субгармонических функций можно найти в [25]. Там же можно найти доказательства утверждений, которые будут приведены ниже.

Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Известно, что функция $v(x)$ локально интегрируема в области G и что если сфера $S(x_0, R)$ лежит в области G, то функция $v(x)$ интегрируема по этой сфере.

Так как функция $\upsilon(x)$ локально интегрируема по области G, то её можно рассматривать как элемент пространства $\mathscr{D}'(G)$. Поэтому мы можем рассмотреть обобщённую функцию

$$\frac{1}{2\pi}\triangle\upsilon,\ m=2,\ \frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}}\triangle\upsilon,\ m\geq 3,$$

где $\triangle$ – оператор Лапласа, σ_{m-1} – площадь сферы $S(0,1)$.

Известно, что эта обобщённая функция представляется положительной локально конечной борелевской мерой μ в области G. Мера μ называется риссовской мерой субгармонической функции υ.

Теорема 1.14. *Пусть $\upsilon(z)$ – субгармоническая функция в области $G\subset\mathbb{C}$, которая содержит круг $B(0,R)$. Пусть μ – риссовская мера функции υ. Тогда при $|z|<R$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned}\upsilon(z)=&\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\varphi-\theta)+r^2}\upsilon(Re^{i\varphi})d\varphi\\&+\int\limits_{B(0,R)}\ln\left|\frac{R(z-\zeta)}{R^2-z\bar{\zeta}}\right|d\mu(\zeta).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Теорема 1.15. *Пусть $\upsilon(x)$ – субгармоническая функция в области $G\subset\mathbb{R}^m$, $m\geq 3$, которая содержит шар $B(0,R)$. Пусть μ – риссовская мера функции υ. Тогда при $\|x\|<R$ выполняется равенство*

$$\begin{aligned}\upsilon(x)=&\frac{1}{\sigma_{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}\frac{R^2-\|x\|^2}{R\|x-y\|^m}\upsilon(y)d\sigma_{m-1}(y)\\&-\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}-\frac{1}{\left(\frac{\|y\|}{R}\left\|x-y\frac{R^2}{\|y\|^2}\right\|\right)^{m-2}}\right)d\mu(y),\end{aligned}\tag{1.6}$$

где $d\sigma_{m-1}(y)$ – $(m-1)$-мерная мера Хаусдорфа на сфере $S(0,R)$.

Важны также частные случаи формул (1.5), (1.6), когда в качестве точки x (z) берётся точка 0.

$$v(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(Re^{i\varphi})d\varphi-\int\limits_0^R\frac{\mu(t)}{t}dt,\ m=2, \tag{1.7}$$

$$v(0)=\frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}v(y)d\sigma_{m-1}(y)-(m-2)\int\limits_0^R\frac{\mu(t)}{t^{m-1}}dt,\ m\geq 3. \tag{1.8}$$

В формулах (1.7) и (1.8) $\mu(t)=\mu(B(0,t))$.

Удобно иметь аналоги формул (1.5), (1.6), когда центр шара (круга) произволен.

Теорема 1.16. *Пусть* $v(z)$ *– субгармоническая функция в области* $G\subset\mathbb{C}$*, содержащей круг* $B(z_0,R)$*. Пусть* μ *– риссовская мера функции* $v(z)$*. Тогда в круге* $C(z_0,R)$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned} v(z)=&\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}v(z_0+Re^{i\varphi})d\varphi\\ &+\int\limits_{B(z_0,R)}\ln\left|\frac{R(z-\zeta)}{R^2-(z-z_0)(\overline{\zeta-z_0})}\right|d\mu(\zeta),\ z=z_0+re^{i\theta}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Теорема 1.17. *Пусть* $v(x)$ *– субгармоническая функция в области* $G\subset\mathbb{R}^m,\ m\geq 3$*, содержащей шар* $B(x_0,R)$*. Пусть* μ *– риссовская мера функции* $v(x)$*. Тогда в шаре* $C(x_0,R)$ *справедливо представление*

$$v(x)=\frac{1}{\sigma_{m-1}}\int\limits_{S(0,R)}\frac{R^2-\|x-x_0\|^2}{R\|x-x_0-y\|^m}v(x_0+y)d\sigma_{m-1}(y)$$

$$-\int\limits_{B(x_0,R)}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}-\frac{1}{\left(\frac{\|y-x_0\|}{R}\left\|x-x_0-(y-x_0)\frac{R^2}{\|y-x_0\|^2}\right\|\right)^{m-2}}\right)d\mu(y). \tag{1.10}$$

Напишем ещё аналоги равенств (1.9) и (1.10):

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(z_0+Re^{i\varphi})d\varphi-\int\limits_0^R\frac{\mu(B(z_0,t))}{t}dt,\ m=2; \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} v(x_0) =& \frac{1}{\sigma_{m-1}R^{m-1}} \int\limits_{S(0,R)} v(x_0+y)d\sigma_{m-1}(y) \\ & - (m-2)\int\limits_0^R \frac{\mu(B(x_0,t))}{t^{m-1}},\ m \geq 3. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Следствием равенств (1.11) и (1.12) является следующее утверждение.

Теорема 1.18. *Пусть* $v(x)$ *– субгармоническая функция в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ *и пусть* μ *– её риссовская мера. Тогда множество* $E_{-\infty}(v)$ *тех* $x \in G$*, где функция* v *обращается в* $-\infty$*, совпадает с множеством тех* x*, для которых при любом* $\delta > 0$ *расходится интеграл*

$$\int\limits_0^\delta \frac{\mu(B(x,t))}{t^{m-1}}dt. \tag{1.13}$$

Пусть $v(x)$ – субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Известно, что множество $E_{-\infty}(v)$ является множеством типа G_δ и имеет ёмкость ноль.

РАЗДЕЛ 2

РАДОНОВЫ МЕРЫ

В данном разделе теория предельных множеств, созданных Азариным [1], [2], [6], [27] для положительных мер, распространяется на класс общих радоновых мер. Мы также переносим некоторые результаты теории Азарина на радоновы меры. Основными результатами раздела являются три критерия того, чтобы заданное множество было предельным множеством некоторой радоновой меры. Теоремы такого типа нашёл Гинер [5] для положительных мер. Используя понятия и технику динамических систем, мы распространяем результаты Гинера на случай общих радоновых мер.

В подразделе 2.1 изучаются некоторые свойства предельных множеств для радоновых мер. В подразделе 2.2 вводится расстояние Хаусдорфа, с помощью которой устанавливаем сходимость последовательности компактов в метрике Хаусдорфа. В подразделе 2.3 мы изучаем некоторые свойства предельных множеств радоновых мер в пространстве с метрикой Хаусдорфа. Подраздел 2.4 посвящён понятию цепной рекурентности, с помощью которой доказываем теорему о существовании радоновой меры с заданным предельным множеством. В подраздел 2.5 вводится понятия псевдотраектории и изучаются свойства псевдотраектории в пространстве радоновых мер.

Результаты второго раздела опубликованы в [13].

В этом разделе считается, что уточнённый порядок $\rho(r)$ удовлетворяет дополнительному условию $\rho = \rho(\infty) > 0$. В дальнейшем это условие дополнительно не оговаривается.

2.1. Предельные множества Азарина радоновых мер

Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2$, $\rho(r)$ – уточнённый порядок. Величина
$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{|\mu|(B(0,r))}{V(r)}$$
называется типом меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Если $\sigma < \infty$, то мера μ называется мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Если мера μ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, то существует постоянная C такая, что при $r \geq 1$ выполняется неравенство
$$|\mu|(B(0,r)) \leq CV(r). \tag{2.1}$$

Если при этом мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$, то неравенство (2.1) выполняется при всех $r > 0$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, $\rho(r)$ – уточнённый порядок. Обозначим через μ_t $(t > 0)$ следующую меру
$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}.$$
Мы будем также писать $\mu_t = A_t\mu$. Отображение $A_t :\ \mu \to \mu_t$ мы будем называть отображением Азарина (порождённым уточнённым порядком $\rho(r)$).

Множество $\{\mu_t :\ t > 0\}$ называется траекторией меры μ.

Множество $\{\mu_t :\ t \geq 1\}$ называется положительной полутраекторией меры μ.

Множество мер ν вида $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n}$, где $t_n \to \infty$, мы будем называть предельным множеством Азарина меры μ (относительно уточнённого порядка $\rho(r)$) и обозначать $Fr[\mu]$ или если нужно $Fr[\mu, \rho(r)]$.

Меру μ_t можно рассматривать как значение отображения $A(t, \mu)$: $(0, \infty) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ в точке (t, μ).

Приведем нужные нам леммы, которые, по существу, вытекают из предыдущих определений и утверждений.

Лемма 2.1. *Отображение* $A(t,\mu)$ *непрерывно по совокупности переменных. Это означает, что если* $t \to t_0$, $\mu_n \to \mu$, *то* $(\mu_n)_t \to \mu_{t_0}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^m)$. Имеем

$$\begin{aligned}((\mu_n)_t, \varphi) &= \frac{1}{V(t)} \int \varphi\left(\frac{x}{t}\right) d\mu_n(x) = \frac{1}{V(t_0)} \int \varphi\left(\frac{x}{t_0}\right) d\mu_n(x) \\ &+ \int \left(\frac{1}{V(t)}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{1}{V(t_0)}\varphi\left(\frac{x}{t_0}\right)\right) d\mu_n(x) \\ &= J_1(n,t_0) + J_2(n,t,t_0).\end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n,t_0) = (\mu_{t_0}, \varphi)$

2)
$$|J_2(n,t,t_0)| \le \sup_{\substack{|t-t_0|\le\delta \\ x\in supp\ \varphi}} \left|\frac{1}{V(t)}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{1}{V(t_0)}\varphi\left(\frac{x}{t_0}\right)\right| |\mu_n|(K),$$

где K такой компакт, что $supp\ \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \subset K$ при t близких к t_0.

Из предложения 1.6 следует, что последовательность $|\mu_n|(K)$ ограничена. Из сказанного выше следует утверждение леммы. □

Лемма 2.2. *Пусть* μ *– финитная конечная борелевская мера,* $\rho(r)$ *– уточнённый порядок. Тогда для любого* $r > 0$ *выполняется*

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(B(0,r)) = 0.$$

Лемма очевидна.

Лемма 2.3. *Пусть* μ *– радонова мера,* λ *– ограничение меры* μ *на множество* $CB(0,1)$, $\rho(r)$ *– уточнённый порядок. Тогда множества* $Fr[\mu,\rho(r)]$ *и* $Fr[\lambda,\rho(r)]$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть λ_1 – ограничение меры μ на шар (круг) $B(0,1)$. Справедливо равенство $\mu = \lambda_1 + \lambda$. Теперь лемма следует из леммы 2.2. □

Лемма 2.4. *Пусть* μ *– радонова мера в* $\mathbb{R}^m$*, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть мера* μ *не нагружает шар (круг)* $B(0,1)$. *Тогда существует постоянная* C *такая, что при* $t > 0$ *и* $r > 0$ *выполняется неравенство*

$$|\mu_t|(B(0,r)) \leq C\gamma(r)r^\rho,\ \rho = \rho(\infty).$$

Доказательство. Имеем, учитывая неравенство (2.1),

$$|\mu_t|(B(0,r)) = \frac{|\mu|(B(0,rt))}{V(t)} \leq C\frac{V(rt)}{V(t)}.$$

Осталось применить неравенство (1.4). Лемма доказана. □

Лемма 2.5. *Пусть* μ *– радонова мера в* $\mathbb{R}^m$*, имеющаяся не более чем нормальный тип относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть мера* μ_t *строится с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Тогда положительная полутраектория меры* μ *есть компактное множество в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$.

Замечание. На языке теории динамических систем это означает, что мера μ положительно устойчива по Лагранжу.

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что лемму достаточно доказывает для случая, когда мера не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Теперь лемма следует из леммы 2.4 и теоремы 1.6. □

Обозначим через $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ множество тех функций φ из $\Phi(\mathbb{R}^m)$, для которых $0 \notin supp\, \varphi$.

Лемма 2.6. *Пусть* μ *– радонова мера в* $\mathbb{R}^m$*, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть мера* μ_t *построена с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть* ν *– радонова мера в* $\mathbb{R}^m$*, не нагружающая точку ноль. Пусть последовательность* $t_n \to \infty$ *такая, что для любой функции* $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ *выполняется равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_{t_n},\varphi) = (\nu,\varphi)$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{t_n} = \nu$.

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что доказательство достаточно проводить для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$, $1 = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ – такое непрерывное разбиение единицы, что $supp\ \psi_1 \cap B(0,\varepsilon) = \emptyset$, $supp\ \psi_2 \subset B(0,2\varepsilon)$. Имеем

$$|(\mu_{t_n} - \nu, \varphi)| \leq |(\mu_{t_n} - \nu, \varphi\psi_1)| + |(\mu_{t_n} - \nu, \varphi\psi_2)| = J_1(n) + J_2(n).$$

Поскольку функция $\varphi\psi_1 \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n) = 0$.

Для величины $J_2(n)$ с использованием леммы 2.4 получаем оценку

$$\begin{aligned} J_2(n) &\leq \|\varphi\| \left(|\mu_{t_n}|(B(0,2\varepsilon)) + |\nu|(B(0,2\varepsilon))\right) \\ &\leq \|\varphi\| \left(C\gamma(2\varepsilon)(2\varepsilon)^\rho + |\nu|(B(0,2\varepsilon))\right). \end{aligned}$$

Так как мера ν не нагружает точку 0, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} |\nu|(B(0,2\varepsilon)) = 0$

Из приведенных рассуждений следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu_{t_n}, \varphi) = (\nu, \varphi)$. Следовательно, $\mu_{t_n} \to \nu$. Лемма доказана $\square$

Иногда бывает полезен следующий аналог доказанной леммы.

Лемма 2.7. *Пусть последовательность μ_n радоновых мер в пространстве $\mathbb{R}^m$ такова, что величина $|\mu_n|(B(0,\varepsilon))$ равномерно относительно n стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Пусть для любой функции φ из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu_n,\ \varphi) = (\mu, \varphi)$, где $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ и $\mu(\{0\}) = 0$. Тогда $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$.*

Нетрудно изменить доказательство предыдущей леммы, чтобы получить доказательство выше сформулированной леммы.

Лемма 2.8. *Пусть G – область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, содержащая шар (круг) $B(0,1)$. Пусть μ_n такая последовательность радоновых мер в G, что $\mu_n \to \mu$, $|\mu_n| \to \hat{\mu}$, причём $\hat{\mu}(S(0,1)) = 0$. Пусть φ – ограниченная финитная в G борелевская функция в $\mathbb{R}^m$, непрерывная на множестве $\mathbb{R}^m \setminus S(0,1)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_G \varphi(x) d\mu_n(x) = \int\limits_G \varphi(x) d\mu(x).$$

Доказательство. Пусть $1 = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ такое непрерывное разбиение единицы, что $supp\,\psi_1 \cap R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon]) = \emptyset$, $supp\,\psi_2 \subset R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$. Имеем

$$\left|\int\limits_G \varphi(x)d(\mu_n - \mu)(x)\right| \leq \left|\int\limits_G \varphi(x)\psi_1(x)d(\mu_n - \mu)(x)\right|$$

$$+\left|\int\limits_G \varphi(x)\psi_2(x)d(\mu_n - \mu)(x)\right| \leq \left|\int\limits_G \varphi(x)\psi_1(x)d(\mu_n - \mu)(x)\right|$$

$$+\|\varphi\|(|\mu_n|(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])) + |\mu|(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]))).$$

Поскольку функция $\varphi(x)\psi_1(x)$ принадлежит множеству $\Phi(G)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_G \varphi(x)\psi_1(x)d(\mu_n - \mu)(x) = 0.$$

Если число ε выбирать так, чтобы выполнялись равенства $\hat{\mu}(S(0, 1 - 2\varepsilon)) = \hat{\mu}(S(0, 1+2\varepsilon)) = 0$, то из теоремы 0.5 [3] следует, что

$$\lim_{n\to\infty}|\mu_n|(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = \hat{\mu}(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]).$$

Поскольку $\hat{\mu}(S(0,1)) = 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\hat{\mu}(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = 0.$

Следовательно, величину $|\mu_n|(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$ выбором ε и n можно сделать сколь угодно малой. То же самое верно и для величины $\mu_n(R[1 - 2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = \mu_n^+(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) - \mu_n^-(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$ и, следовательно, для $\mu(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$.

Из этого, как легко усмотреть из предыдущих рассуждений, следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_G \varphi(x)d\mu_n(x) = \int\limits_G \varphi(x)d\mu(x).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.9. *Пусть радонова мера* μ *в пространстве* $\mathbb{R}^m$ *имеет тип* σ *относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть мера* μ_t *строится с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть* $\nu \in Fr[\mu]$. *Тогда для любого*

$r > 0$ *выполняется неравенство*

$$|\nu|(B(0,r)) \le \sigma r^{\rho}.$$

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что лемму достаточно доказывать при дополнительном предположении, что мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Имеем $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n}$, где $t_n \to \infty$. Из леммы 2.4 и теоремы 1.6 следует, что дополнительно можно считать, что $|\mu|_{t_n} \to \lambda$. Теперь из теоремы 1.11 следует, что если $\lambda(S(0,r)) = 0$, то

$$\lambda(B(0,r)) = \lim_{n\to\infty} |\mu|_{t_n}(B(0,r)).$$

Поэтому для всех r, за возможным исключением счётного множества, ввиду теоремы 1.2, выполняется неравенство

$$|\nu|(B(0,r)) \le \lambda(B(0,r)) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mu|(B(0,t_n r))}{V(t_n)} \le \sigma r^{\rho}.$$

Из этого следует утверждение леммы. □

Лемма 2.10. *Пусть* $\rho_1(r)$ *и* $\rho_2(r)$ *– уточнённые порядки такие, что* $\rho_1(\infty) = \rho_2(\infty)$. *Пусть радонова мера* μ *в* $\mathbb{R}^m$ *является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho_1(r)$, *а мера* λ *определяется формулой*

$$d\lambda(x) = \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d\mu(x).$$

Тогда при $t_n \to \infty$ *соотношение* $\mu_{t_n} \to \nu$ *эквивалентно соотношению* $\lambda_{t_n} \to \nu$. *При этом имеются в виду, что*

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V_1(t)},\ \lambda_t(E) = \frac{\lambda(tE)}{V_2(t)}.$$

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что доказательство достаточно проводить для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Пусть $\mu_{t_n} \to \nu$. Из леммы 2.9 следует, что мера ν не нагружает точку ноль. Пусть $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $0 < a < b < \infty$ такие числа, что

$supp\,\varphi \subset R([a,b])$. Имеем

$$\int \varphi(x)d\lambda_{t_n}(x) = \frac{1}{V_2(t_n)}\int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right)d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{V_2(t_n)}\int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right)\frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)}d\mu(x) = \frac{V_1(t_n)}{V_2(t_n)}\int \varphi(x)\frac{V_2(t_n\|x\|)}{V_1(t_n\|x\|)}d\mu_{t_n}(x)$$

$$= \int \varphi(x)d\mu_{t_n}(x) + \int\limits_{R[a,b]} \varphi(x)\left(\frac{V_2(t_n\|x\|)V_1(t_n)}{V_1(t_n\|x\|)V_2(t_n)} - 1\right)d\mu_{t_n}(x)$$

$$= J_1(n) + J_2(n).$$

Так как $\mu_{t_n} \to \nu$, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n) = (\nu, \varphi)$.

Для $J_2(n)$ справедлива оценка

$$|J_2(n)| \le \|\varphi\| \max_{x\in R([a,b])}\left|\frac{V_2(t_n\|x\|)V_1(t_n)}{V_1(t_n\|x\|)V_2(t_n)} - 1\right| |\mu_{t_n}|(B(0,b)).$$

Теперь из оценки $|\mu_{t_n}|(B(0,b)) \le M\gamma(b)b^\rho$, полученной из леммы 2.4, и теоремы 1.2 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} J_2(n) = 0.$$

Мы доказали, что для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_{t_n}, \varphi) = (\nu, \varphi).$$

Из леммы 2.6 следует, что $\lambda_{t_n} \to \nu$. В приведенном рассуждении меры μ и λ можно поменять местами. Лемма доказана. □

Обычно ([20], глава 5) динамическая система в метрическом пространстве X определяется так. Это однопараметрическая система отображений $\Phi_t,\ t \in (-\infty, \infty),\ \Phi_t :\ X \to X$, обладающая свойствами.

1) если $t \to t_0,\ x \to x_0$, то $\Phi_t x \to \Phi_{t_0} x_0$ (условие непрерывности по совокупности переменных);

2) $\Phi_0 x = x$ для любого $x \in X$ (начальное условие);

3) $\Phi_{t_1+t_2} x = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1} x)$ (групповое условие).

Нам будем удобно пользоваться другим определением динамической системы, в котором аддитивная группа вещественных чисел t заменяется на мультипликативную группу строго положительных вещественных чисел. Это означает, что однопараметрическая система отображений $\Phi_t,\ t \in (0,\infty),\ \Phi_t:\ X \to X$ называется динамической системой, если выполняются три условия:

1) если $t \to t_0,\ x \to x_0$, то $\Phi_t x \to \Phi_{t_0} x_0$ (условие непрерывности по совокупности переменных);

2) $\Phi_1 x = x$ для любого $x \in X$ (начальное условие);

3) $\Phi_{t_1 t_2} x = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1} x)$ (групповое условие).

Ясно, что любое утверждение о динамической системе в смысле первого определения стандартным образом переводится в аналогичное утверждение для динамической системы в смысле, второго определения и наоборот.

В дальнейшем нам будет нужен следующий факт из теории динамических систем

Лемма 2.11. *Пусть* $\Phi_t,\ t \in (0,\infty)$ *– динамическая система на метрическом компакте* (X,h). *Пусть* $[a,b]$ *– произвольный сегмент на полуоси* $(0,\infty)$ *и пусть*

$$g(\delta) = \sup\{h(\Phi_t x, \Phi_t y):\ x,y \in X,\ h(x,y) \le \delta,\ t \in [a,b]\}.$$

Тогда $\lim\limits_{\delta\to 0} g(\delta) = 0.$

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности x_n и y_n из пространства X, последовательность $t_n \in [a,b]$ такие, что $h(x_n,y_n) \le \frac{1}{n}$,

$$h(\Phi_{t_n} x_n, \Phi_{t_n} y_n) \ge \varepsilon_0. \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \xi \in X,\ \lim_{n\to\infty} t_n = \tau \in [a,b].$$

Справедливо неравенство

$$h(\Phi_{t_n}x_n, \Phi_{t_n}y_n) \le h(\Phi_{t_n}x_n, \Phi_{t_n}\xi) + h(\Phi_{t_n}\xi, \Phi_{t_n}y_n).$$

Так как функция $\Phi_t x$ непрерывна по совокупности переменных t и x, то

$$\lim_{n\to\infty} h(\Phi_{t_n}x_n, \Phi_{t_n}\xi) = \lim_{n\to\infty} h(\Phi_{t_n}y_n, \Phi_{t_n}\xi) = 0.$$

Это противоречит неравенству (2.2). Лемма доказана. □

Следующую теорему можно назвать первой теоремой о свойствах множества $Fr[\mu]$.

Теорема 2.1. *Пусть* μ *– радонова мера в* $\mathbb{R}^m$, $m \ge 2$, *имеющая тип* σ *относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Пусть мера* μ_t *построена с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) $Fr[\mu]$ *– непустой компакт в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$*;*

2) $Fr[\mu]$ *– связное множество в метрическом пространстве* $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$*;*

3) Функция F_t $\left(F_t:\ \mu(E) \to \frac{\mu(tE)}{t^\rho}\right)$ *для любого* $t > 0$ *взаимно-однозначно отображает множество* $Fr[\mu]$ *на себя;*

4) Для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ *и любого* $r > 0$ *выполняется неравенство* $|\nu|(B(0,r)) \le \sigma r^\rho$.

Замечание. В. Азарин ([27], теорема 3.1.3.3) получил эти результаты для положительных мер. Мы переносим его результаты на случай радоновых мер.

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что теорему достаточно доказывать для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Из леммы 2.10 следует, что теорему достаточно доказывать для случая, когда $\rho(r) \equiv \rho$. В этом случая из леммы 2.1 следует, что система отображений $A_t = F_t,\ t > 0$ является динамической системой (в смысле второго определения) во метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$.

Из леммы 2.5 следует, что положительная полутраектория меры μ является компактным множеством в пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. Множество $Fr[\mu]$ совпадает с ω-предельным множеством траектории $A_t\mu$. Теперь из теорем 10 и 13, [20], глава 5 следует что:

1) $Fr[\mu]$ есть непустой и связный компакт в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$;

2) $A_t(Fr[\mu]) \subset Fr[\mu]$.

Так как отображение A_t имеет обратное отображение равное $A_{\frac{1}{t}}$, то из 2) следует, что A_t есть взаимнооднозначное отображение множества $Fr[\mu]$ на себя.

Утверждения 1)-3) теоремы доказаны. Утверждение 4) следует из леммы 2.9. Теорема доказана. $\square$

Радонова мера μ в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется периодической мерой порядка ρ с периодом $T > 1$, если для любого компактного борелевского множества E выполняется равенство $\mu(TE) = T^\rho \mu(E)$.

Построим пример положительной радоновой меры μ порядка ρ с периодом $T > 1$.

Пример. Рассмотрим шаровой слой (кольцо) $R([1, T))$. Пусть μ_1 – некоторая положительная борелевская мера на $R([1, T))$. Определим теперь на борелевской σ-алгебре в пространстве $\mathbb{R}^m$ функцию множеств μ следующим образом. Если $E \subset R([1, T))$, то положим $\mu(E) = \mu_1(E)$. Если $E \subset R([T^n, T^{n+1})),\ n \in \mathbb{Z}$, то положим $\mu(E) = T^{n\rho}\mu_1(T^{-n}E)$.

Пусть теперь E – произвольное борелевское множество в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $E_n = E \cap R([T^n, T^{n+1}))$. Выполняется равенство

$$E \setminus \{0\} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E_n.$$

Положим $\mu(E) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mu(E_n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} T^{n\rho}\mu_1(T^{-n}E_n)$. Имеем

$$\mu(TE) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(TE_n).$$

Поскольку $TE_n \subset R([T^{n+1}, T^{n+2}))$, то $\mu(TE_n) = T^{(n+1)\rho}\mu_1\left(T^{-(n+1)}TE_n\right) = T^{(n+1)\rho}\mu_1 \quad (T^{-n}E_n)$. Отсюда следует, что $\mu(TE) = T^\rho\mu(E)$. Легко проверяется, что μ – положительная борелевская мера в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Нужный пример построен.

Если μ_1 и μ_2 – две такие меры, то мера $\mu = \mu_1 - \mu_2$ будет радоновой мерой порядка ρ с периодом T. Легко видеть, что любая радонова мера μ порядка ρ с периодом $T > 1$ получается из ограничения μ_1 меры μ на $R([1, T))$ с помощью изложенной процедуры.

Предложение 2.1. *Если μ – периодическая радонова мера порядка $\rho > 0$ с периодом T, то*

$$Fr[\mu, \rho] = \{\mu_t : \ t \in [1, T)\}.$$

Доказательство. Пусть $\tau \in [1, T),\ t_n = \tau T^n$. Пусть E – компактное борелевское множество. Имеем

$$\mu_{t_n}(E) = \frac{\mu(\tau T^n E)}{\tau^\rho T^{n\rho}} = \frac{T^{n\rho}\mu(\tau E)}{\tau^\rho T^{n\rho}} = \mu_\tau(E).$$

Отсюда следует, что $\mu_{t_n} = \mu_\tau$. Поэтому $\mu_\tau \in Fr[\mu]$.

Обратно, пусть $\nu \in Fr[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\mu_{t_n} \to \nu$. Всякое число $t_n > 0$ однозначно представляется в виде $t_n = \tau_n T^{k(n)}$, где $\tau_n \in [1, T),\ k(n)$ – целое число. Переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что $\tau_n \to \tau \in [1, T]$. Имеем $\mu_{t_n} = \mu_{\tau_n}$. По лемме 2.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\tau_n} = \mu_\tau$. Таким образом $\nu = \mu_\tau$. Учитывая равенство $\mu_1 = \mu_T$, можно считать, что $\tau \in [1, T)$. □

Замечание. Пусть $\tau > 0,\ n$ – целое. Можно считать, что $Fr[\mu] = \{\mu_t : t \in [\tau T^n, \tau T^{n+1})\}$.

С точки зрения предельных множеств наиболее простыми являются такие радоновы меры μ, для которых множества $Fr[\mu]$ состоят из одного элемента. Такие меры называются регулярными (в смысле Азарина) мерами. Далее мы изучим регулярные меры.

Пусть $r > 0,\ E \subset S(0,1)$. Обозначим

$$K(r,E) = [0,r] \times E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m :\ \|x\| \leq r,\ \frac{x}{\|x\|} \in E \right\}.$$

Множество $K(r,E)$ мы будем называть пространственным сектором радиуса r с основанием E.

Пусть λ – конечная борелевская мера на сфере (окружности) $S(0,1)$. Борелевское множество $E \subset S(0,1)$ мы будем называть измериммым по Жордану относительно меры λ, если $|\lambda|(\partial E) = 0$, где ∂E – граница множества E в относительной топологии (порождённой эвклидовой топологией пространства $\mathbb{R}^m$) на сфере $S(0,1)$.

Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m$. Говорят, что мера μ имеет конусную (угловую) плотность λ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, если для любого борелевского множества $E \subset S(0,1)$ измеримого по Жордану относительно меры λ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu(K(r,E))}{V(r)} = \lambda(E).$$

Теорема 2.2. *Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m$, имеющая не выше чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть мера μ имеет конусную (угловую) плотность λ относительно утонённого порядка $\rho(r)$. Тогда выполняется равенство*

$$Fr[\mu, \rho(r)] = \{\nu\},\ \nu = dr^\rho \times \lambda.$$

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что теорему достаточно доказать для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Пусть $\gamma \in Fr[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\mu_{t_n} \to \gamma$. Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $0 < a < b < \infty$ такие числа, что $supp\,\varphi \subset R((a,b])$. Имеем

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \int\limits_{R((a,b])} \varphi(x) d\mu_{t_n}(x).$$

Пусть $\delta > 0$. Множество $R((a,b])$ допускает разбиение $\prod$ вида

$$R((a,b]) = \bigsqcup_{k=1}^{N} H_k,$$

где H_k – дизъюнктная система множеств вида $H_k = (\alpha_k, \beta_k] \times E_k$, причём множества E_k измеримы по Жордану относительно меры λ и диаметр $d(H_k)$ множества H_k не превышает δ. Пусть x_k – некоторая точка из H_k. Тогда

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k)\mu_{t_n}(H_k) + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{H_k} (\varphi(x) - \varphi(x_k))\, d\mu_{t_n}(x) = J_1 + J_2.$$

Исследуем первое слагаемое

$$J_1 = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) \frac{\mu((t_n\alpha_k, t_n\beta_k] \times E_k)}{V(t_n)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) \frac{\mu(K(t_n\beta_k, E_k)) - \mu(K(t_n\alpha_k, E_k))}{V(t_n)}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(K(t_n\beta_k, E_k))}{V(t_n)} = \beta_k^{\rho}\lambda(E_k),$$

то

$$J_1 = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) \left((\beta_k^{\rho} - \alpha_k^{\rho})\lambda(E_k) + \varepsilon_k(n)\right),$$

где $\varepsilon_k(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$h_n\left(\prod\right) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k)\varepsilon_k(n).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует число $n_0 = n_0\left(\varepsilon, \prod\right)$ такое что при $n > n_0$ будет выполняться неравенство $h_n\left(\prod\right) < \varepsilon$.

Рассмотрим интеграл

$$\int \varphi(x)d\nu(x) = \int\limits_{R((a,b])} \varphi(x)d\nu(x) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{H_k} \varphi(x)d\nu(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k)(\beta_k^\rho - \alpha_k^\rho)\lambda(E_k) + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{H_k} (\varphi(x) - \varphi(x_k))d\nu(x).$$

Обозначим последнюю сумму через J_3. Справедлива оценка

$$|J_3| \le \omega_\varphi(\delta) \sum_{k=1}^{N} |\nu|(H_k) = \omega_\varphi(\delta)|\nu|(R((a,b])),$$

где $\omega_\varphi(\delta)$ – модуль непрерывности функции φ. Мы получаем

$$J_1 = \int \varphi(x)d\nu(x) - J_3 + h_n\left(\prod\right).$$

Далее оцениваем J_2.

$$|J_2| < \omega_\varphi(\delta) \sum_{k=1}^{N} |\mu|_{t_n}(H_k) = \omega_\varphi(\delta)|\mu|_{t_n}(R((a,b]))$$

$$\le \omega_\varphi(\delta)|\mu|_{t_n}(B(0,b)) \le C\omega_\varphi(\delta)\gamma(b)b^\rho.$$

Последняя оценка следует из леммы 2.4. Таким образом, справедлива оценка

$$|(\mu_{t_n}, \varphi) - \int \varphi(x)d\nu(x)| \le |J_2| + |J_3| + \left|h_n\left(\prod\right)\right|.$$

Из полученных оценок легко следует, что

$$(\gamma, \varphi) = \lim_{n\to\infty}(\mu_{t_n}, \varphi) = (\nu, \varphi).$$

Таким образом для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $(\gamma, \varphi) = (\nu, \varphi)$. Поскольку меры γ и ν не нагружают точку 0, то отсюда следует, что $\gamma = \nu$. Теорема доказана. □

Теорема 2.3. Пусть μ – радонова мера в пространстве $\mathbb{R}^m$, имеющая не выше чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $Fr[\mu, \rho(r)] = \{\nu\}$. Тогда $\nu = dt^\rho \times \lambda$, где λ – борелевская мера на сфере (окружности) $S(0,1)$, определяемая формулой $\lambda(E) = \nu(K(1,E))$.

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что $F_t(Fr[\mu]) = Fr[\mu]$. Поэтому выполняется равенство $F_t\nu = \nu$. Следовательно, $\nu(K(t,E)) = t^\rho\nu(K(1,E))$. Определим борелевскую меру λ на сфере $S(0,1)$ формулой $\lambda(E) = \nu(K(1,E))$. Обозначим $\gamma = dt^\rho \times \lambda$. Меры γ и μ совпадают на множествах $K(t,E)$, $t \in (0,\infty)$, E – борелевское множество на сфере $S(0,1)$. Поэтому выполняется равенство $\nu = \gamma$. Теорема доказана. □

Лемма 2.12. *Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m$, являющаяся мерой не выше чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $Fr[\mu,\rho(r)] = \{\nu\}$. Тогда для любой последовательности $t_n \to \infty$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n} = \nu$.*

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Это означает, что найдётся функция $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^m)$, для которой выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_{t_n},\varphi) \neq (\nu,\varphi)$. Это означает, что последовательность (μ_{t_n},φ) является либо расходящейся либо сходящейся, но с пределом отличным от (ν,φ). Из этого, в свою очередь, следует, что у последовательности t_n есть подпоследовательность $t_n^{(1)}$ такая, что последовательность $(\mu_{t_n^{(1)}},\varphi)$ будет сходящейся с пределом отличным от (ν,φ). Поскольку из леммы 2.5 положительная полутраектория меры μ есть компактное множество в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, то у последовательности $t_n^{(1)}$ есть подпоследовательность $t_n^{(2)}$ такая, что последовательность $\mu_{t_n^{(2)}}$ будет сходящейся. Пусть $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n^{(2)}}$. Мера $\gamma \in Fr[\mu]$. В силу условия леммы $\gamma = \nu$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_{t_n^{(2)}},\varphi) = (\nu,\varphi)$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Предложение 2.2. *Пусть μ – положительная борелевсккая мера в пространстве $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть выполняется равенство $Fr[\mu,\rho(r)] = \{\nu\}$. Тогда мера μ имеет конусную (угловую) плотность.*

Доказательство. По теореме 2.3 мера ν имеет вид $\nu = dt^\rho \times \lambda$, где λ – положительная борелевская мера на сфере (окружности) $S(0,1)$. Пусть борелевское множество $E \subset S(0,1)$ измеримо по Жордану относительно меры λ. Имеем $\partial K(1,E) = K(1,\partial E) \cup E$. Поэтому множество $K(1,E)$ измеримо по Жордану относительно меры ν.

Пусть $t_n \to \infty$ – произвольная последовательность. По лемме 2.12 $\mu_{t_n} \to \nu$. Из теоремы 0.5 [17] или из теоремы 3.4 [8] следует, что

$$\lambda(E) = \nu(K(1,E)) = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(K(1,E)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(K(t_n,E))}{V(t_n)}.$$

Тем самым доказано, что мера μ имеет конусную (угловую) плотность λ. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что предложение 2.2 для знакопеременных мер не верно. Это видно из следующего примера.

Пример. Пусть $m = 2,\ r_n = 3^{3^n},\ \rho > 0,\ \mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n^{\rho}(\delta(z - r_n) - \delta(z - r_n - 1))$.

Нетрудно видеть, что порядок $\rho(r) \equiv \rho$ является уточнённом порядком этой меры. Далее, для любой непрерывной финитной функции $\varphi(z)$ имеем

$$(A_t\mu, \varphi) = t^{-\rho} \int\limits_{\mathbb{C}} \varphi\left(\frac{z}{t}\right) d\mu = \sum_{r_n+1<t} \left(\frac{r_n}{t}\right)^{\rho} \left[\varphi\left(\frac{r_n}{t}\right) - \varphi\left(\frac{r_n+1}{t}\right)\right].$$

Так как φ непрерывна, то при больших t разность $\varphi\left(\frac{r_n}{t}\right) - \varphi\left(\frac{r_n+1}{t}\right)$ сколь угодно мала, поэтому $(A_t\mu, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$ и $Fr[\mu] = \{0\}$. С другой стороны, $\mu(K(r_n + \frac{1}{2}, S(0,1)) = r_n^{\rho},\ \mu(K(r_n + \frac{3}{2}, S(0,1)) = 0$, следовательно, мера μ не имеет угловой плотности.

2.2. Расстояние Хаусдорфа

Пусть (X,h) – метрическое пространство, $M_1,\ M_2$ – подмножества X. Введём следующие величины

$$\delta_1 = \sup_{x\in M_1} h(x, M_2),\ \delta_2 = \sup_{x\in M_2} h(x, M_1),\ H(M_1,M_2) = \max(\delta_1, \delta_2).$$

Величина $H(M_1, M_2)$ называется расстоянием Хаусдорфа между множествами M_1 и M_2. На множестве компактов в X, расстояние Хаусдорфа является метрикой.

Пусть $(M)_\varepsilon = \{x \in X : \ h(x, M) < \varepsilon\}$ – открытая ε-окрестность множества M. Выполняются соотношения

$$\delta_1 = \inf\{\varepsilon > 0 : \ M_1 \subset (M_2)_\varepsilon\}, \ \delta_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \ M_2 \subset (M_1)_\varepsilon\}.$$

Нам будет нужно следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть (X, h) – метрический компакт. Для того, чтобы последовательность компактов $M_k \subset X$ сходилась в метрике Хаусдорфа к компакту $M \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) если x_k такая последовательность точек, что $x_k \in M_{n_k}, \ n_k \to \infty$ и такая, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, то $x \in M$;

2) если $x \in M$, то существует последовательность точек $x_n \in M_n$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $M = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ и пусть $x_k \in M_{n_k}, \ n_k \to \infty, \ x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Имеем $h(x_k, M) \le \sup\limits_{x \in M_{n_k}} h(x, M) \le H(M_{n_k}, M)$. Поэтому во множестве M найдётся точка y_k такая, что $h(x_k, y_k) \le 2H(M_{n_k}, M)$. Поскольку M – компакт, то переходя, если нужно, к подпоследовательности можно считать, что выполняется неравенство $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$, где $y \in M$. Выполняется неравенство $h(x, y) \le h(x, x_k) + h(x_k, y_k) + h(y_k, y) \le h(x, x_k) + h(y_k, y) + 2H(M_{n_k}, M)$. Отсюда следует, что $h(x, y) = 0, \ x = y \in M$. Условие 1) предложения доказано.

Пусть теперь $x \in M$. Имеем

$$h(x, M_n) \le \sup_{y \in M} h(y, M_n) \le H(M, M_n).$$

Поэтому в множестве M_n найдётся точка такая x_n, что $h(x, x_n) \le H(M, M_n)$. Таким образом $x_n \in M_n, \ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Доказательство части предложения в сторону необходимости завершено.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1) и 2) предложения. Покажем, что выполняется соотношение

$$\delta_{1,n} = \sup_{x \in M_n} h(x, M) \to 0 \ (n \to \infty). \qquad (2.3)$$

Если это не так, то найдутся число $\delta > 0$ и последовательность $n_k \to \infty$ такие, что $\delta_{1,n} > \delta$. Поэтому найдётся точка $x_{n_k} \in M_{n_k}$ такая, что $h(x_{n_k}, M) \geq \frac{\delta}{2}$. Поскольку X – компакт, то переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняется равенство $x = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$. По условию 1) теоремы $x \in M$. Это противоречит неравенству $h(x_{n_k}, M) \geq \frac{\delta}{2}$. Тем самым соотношение (2.3) доказано.

Докажем ещё, что выполняется соотношение

$$\delta_{2,n} = \sup_{x \in M} h(x, M_n) \to 0. \qquad (2.4)$$

Если это не так, то существуют число $\delta_0 > 0$ и последовательность $n_k \to \infty$ такие, что для любого выполняется неравенство $\delta_{2,n_k} \geq 4\delta_0$. Из этого следует, что существует точка $x_{n_k} \in M$ такая, что выполняется неравенство $h(x_{n_k}, M_{n_k}) \geq 2\delta_0$.

Поскольку множество M есть компакт, то переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняется равенство $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in M$. Далее имеем

$$h(x, M_{n_k}) \geq h(x_{n_k}, M_{n_k}) - h(x_{n_k}, x) \geq \delta_0$$

для всех $k \geq k_1$, где k_1 – некоторые число, зависящее от δ_0. Полученное неравенство противоречит условию 2) теоремы. Тем самым соотношение (2.4) доказано. Из соотношений (2.3), (2.4) следует, что $H(M_n, M) \to 0$. Предложение доказано. □

2.3. Периодические предельные множества для радоновых мер

Мы начнём с вспомогательных утверждений.

Лемма 2.13. *Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка ρ и пусть $Fr[\mu] = Fr[\mu, \rho(r)]$ – её предельное множество. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} d(\mu_t, Fr[\mu]) = 0$$

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Тогда существуют число δ и последовательность $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ такие, что выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty} d(\mu_{t_n}, Fr[\mu]) \geq \delta. \tag{2.5}$$

Из леммы 2.5 следует, что существует подпоследовательность $t_n^{(1)}$ последовательности t_n такая, что $\mu_{t_n^{(1)}} \to \nu$. Мера ν принадлежит множеству $Fr[\mu]$. Это противоречит неравенству (2.5). Лемма доказана. □

Обозначим $\mathcal{L}(\tau_1, \tau_2) = \{\mu_t : \ \tau_1 \leq t \leq \tau_2\}$ – дугу траектории меры μ.

Лемма 2.14. *Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и пусть $Fr[\mu] = Fr[\mu, \rho(r)]$ – её предельное множество. Тогда для любых $\tau_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует число $\tau_2 > \tau_1$ такое, что выполняется соотношение*

$$Fr[\mu] \subset (\mathcal{L}(\tau_1, \tau_2))_\varepsilon .$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что множество $Fr[\mu]$ есть компакт в пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. Пусть $\{\nu_k, \ k \in \overline{1, N}\}$ есть $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть для множества $Fr[\mu]$. Существует последовательность $t_n^{(k)} \to \infty$ такая, что $\mu_{t_n^{(k)}} \to \nu_k$ $(n \to \infty)$. Пусть $t_{n_k}^{(k)}$ такое число, что выполняется соотношения: $t_{n_k}^{(k)} > \tau_1, \ d(\mu_{t_{n_k}^{(k)}}, \nu_k) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда можно взять $\tau_2 = \max\{t_k^{(k)} : \ k \in \overline{1, N}\}$. Лемма доказана. □

Предложение 2.4. *Пусть A – компактное множество в пространстве $\mathcal{M}(G)$ и $\bar{A}$ – замыкание A в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(G), d)$. Тогда $\bar{A}$ – компактное множество в пространстве $(\mathcal{M}(G), d)$.*

Доказательство. Поскольку A – компактное множество в $\mathcal{M}(G)$, то по теореме 1.6 это сильно ограниченное множество. Поэтому для любого компакта $K \subset G$ выполняется неравенство $c(K) = \sup\{|\nu|(K) : \ \nu \in A\} < \infty$. Пусть α – произвольная мера из $\bar{A}$. Тогда существует последовательность α_n мер из A такая, что $\alpha = d \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. По теореме 1.13 последовательность мер α_n широко сходится к мере α. Тем более выполняется равенство $\alpha = d \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Пусть γ_n – произвольная последовательность мер из $\bar{A}$. По доказанному существует мера λ_n из A такая, что $d(\gamma_n, \lambda_n) < \frac{1}{n}$. Поскольку A – компактное множество в пространстве $\Phi(G)$, то у последовательности λ_n есть широко сходящаяся подпоследовательность λ_{n_k}. Пусть $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k}$. Также выполняется равенство $\lambda = d \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k}$. Из этого следует, что $\lambda = d \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{n_k}$. Предложение доказано. $\square$

Обозначим через $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$ множество тех радоновых мер μ из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, для которых выполняется неравенство: $|\mu|(B(0,r)) \leq \sigma r^\rho, \ r \in (0, \infty)$.

Теорема 2.4. Пусть μ – радонова мера в $\mathbb{R}^m$, имеющая тип $\sigma < \infty$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $Fr[\mu, \rho(r)]$ – её предельное множество. Тогда существуют число $\sigma_1 > 0$ и последовательность периодических мер μ_n порядка ρ такие, что выполняются условия:

1) $\mu_n \in \mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$,
2) $Fr[\mu, \rho(r)] = H \lim\limits_{n\to\infty} Fr[\mu_n, \rho(r)]$.

Доказательство. Из леммы 2.10 следует, что дополнительно можно предположить, что $\rho(r) \equiv \rho$. Тогда имеем

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{|\mu|(B(0,r))}{r^\rho}.$$

Поэтому существует число $r_0 > 0$ такое, что при $r \geq r_0$ будет выполняться неравенство $|\mu|(B(0,r)) \leq (\sigma + 1) r^\rho$.

Пусть μ_1 – ограничение μ на множество $CB(0, r_0)$. Тогда для всех $r > 0$ будет выполняться неравенство $|\mu_1|(B(0, r)) \leq (\sigma + 1)r^\rho$. Из леммы 2.3 следует, что $Fr[\mu] = Fr[\mu_1]$.

Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем будет считать, что выполняются условия:

1) $\rho(r) \equiv \rho$,

2) для любого $r > 0$ выполняется неравенство $|\mu|(B(0, r)) \leq (\sigma+1)r^\rho$.

Пусть ν – некоторая мера из множества $Fr[\mu]$. Существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что выполняются условия $\mu_{t_k} \to \nu$, $|\mu|_{t_k} \to \hat{\nu}$, где $\hat{\nu}$ – некоторая положительная борелевская мера в $\mathbb{R}^m$. Дополнительно можно считать, что выполняется равенство $\hat{\nu}(S(0, 1)) = 0$. Если это не так, то меру ν следует заменить на меру ν_τ с подходящим τ.

Построим теперь три последовательность r_n, a_n, b_n следующим образом. В качестве r_1 возьмём некоторое $t_k > 2$. Далее положим $a_1 = 2r_1$. В качестве b_1 возьмём такое число $b_1 > a_1$, что будет выполняется соотношение $Fr[\mu] \subset (\mathcal{L}(a_1, b_1))_1$. Из леммы 2.14 следует, что такие числа существуют. В качестве r_2 возьмём такое t_k, чтобы выполнялось неравенство $r_2 \geq 3b_1$.

Пусть мы уже определим r_n. Тогда выбираем $a_n = (n + 1)r_n$. В качестве b_n выбираем такое число, чтобы выполнялись условия: $b_n > a_n$, $Fr[\mu] \subset (\mathcal{L}(a_n, b_n))_{\frac{1}{n}}$. Далее определяем r_{n+1} как одно из чисел t_k так, чтобы выполнялось неравенство $r_{n+1} \geq (n + 2)b_n$.

Тем самым последовательности r_n, a_n, b_n определены. Заметим, что r_n есть подпоследовательность последовательности t_k.

Теперь определим меру μ_n. Это периодическая мера порядка ρ, которая на множестве $R([r_n, r_{n+1}))$ совпадает с мерой μ и имеет период $T_n = \frac{r_{n+1}}{r_n} > 6$.

Пусть $r > 0$ и в остальном произвольно. Пусть k_0 – наибольшее из целых чисел, для которых выполняется неравенство $T_n^{k_0} r_{n+1} < r$. Имеем

$$|\mu_n|(C(0,r)) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} |\mu_n|(R([T_n^k r_n, T_n^{k+1} r_n))) + |\mu_n|(R([T_n^{k_0+1} r_n, r)))$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{k_0} T_n^{k\rho} |\mu|(R([r_n, r_{n+1})) + T_n^{(k_0+1)\rho} |\mu| \left(R\left(\left[r_n, \frac{r}{T_n^{k_0+1}} \right) \right) \right).$$

Справедливы неравенства

$$|\mu|(R[r_n, r_{n+1})) \le (\sigma+1) r_{n+1}^{\rho},\ |\mu| \left(R\left(\left[r_n, \frac{r}{T_n^{k_0+1}} \right) \right) \right) \le (\sigma+1) \frac{r^{\rho}}{T_n^{(k_0+1)\rho}}.$$

Из этого следует, что

$$|\mu_n|(C(0,r)) \le (\sigma+1) r_{n+1}^{\rho} \sum_{k=-\infty}^{k_0} T_n^{k\rho} + (\sigma+1) r^{\rho}$$

$$= (\sigma+1) r_{n+1}^{\rho} \frac{T_n^{k_0\rho}}{1 - \frac{1}{T_n^{\rho}}} + (\sigma+1) r^{\rho} \le \frac{\sigma+1}{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\rho}} r_{n+1}^{\rho} \left(\frac{r}{r_{n+1}} \right)^{\rho} + (\sigma+1) r^{\rho}$$

$$= (\sigma+1) r^{\rho} \left(1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\rho}} \right).$$

Обозначим

$$\sigma_1 = (\sigma+1) \left(1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\rho}} \right).$$

Мы доказали, что любая мера μ_n принадлежит классу $\mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$. Осталось доказать равенство

$$Fr[\mu] = H \lim_{n\to\infty} Fr[\mu_n]. \tag{2.6}$$

Имеем для любого $r > 0$

$$|\mu_n|_t(B(0,r)) = \frac{|\mu_n|(B(0,tr))}{t^{\rho}} \le \frac{\sigma_1 t^{\rho} r^{\rho}}{t^{\rho}} = \sigma_1 r^{\rho},$$

$$|\mu|_t(B(0,r)) = \frac{|\mu|(B(0,tr))}{t^{\rho}} \le \frac{(\sigma+1) t^{\rho} r^{\rho}}{t^{\rho}} = (\sigma+1) r^{\rho}.$$

Поэтому множества $D_1 = \{(\mu_n)_t : \ n = 1, 2, \ldots,\ t \in (0,\infty)\}$, $D_2 = \{\mu_t : \ t \in (0,\infty)\}$ являются сильно ограниченным, а значит по теореме 1.6 и компактными множествами в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Так как из широкой сходимости следует сходимость в пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$, то множество $X = \overline{D_1 \cup D_2}$ является компактом в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. Следовательно, пространство (X, d) есть метрический компакт.

Система отображений $A_t,\ t \in (0, \infty)$ есть динамическая система в пространстве (X, d).

Как следует из предложения 2.3 для доказательства равенства (2.6) достаточно доказать, что выполняются условия 1), 2) этого предложения.

Пусть $\lambda_n \in Fr[\mu_{k(n)}]$, где $k(n) \to \infty$ и пусть $\lambda_n \to \alpha$. Поскольку $\lambda_n \in Fr[\mu_{k(n)}]$, то из замечания к предложению 2.1 следует, что $\lambda_n = \left(\mu_{k(n)}\right)_{\tau_{k(n)}}$, где $\tau_{k(n)} \in \left[r_{k(n)}, r_{k(n)+1}\right)$. Не ограничивая общности, можно считать, что выполняется одно из трёх условий:

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}} = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)+1}} = 0;$

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}} = q_1 \in [1, \infty);$

В) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)+1}} = q_2 \in (0, 1].$

Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $supp\ \varphi \subset R([a, b])$. Дополнительно можно считать, что $a \in (0, 1),\ b \in (1, \infty)$.

Предположим, что выполняется условие А). Имеем

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{\tau_{k(n)}}(x). \tag{2.7}$$

Из условия А) следует, что для всех достаточно больших n выполняется соотношение.

$$R([a\tau_{k(n)}, b\tau_{k(n)}]) \subset R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1})).$$

На множестве $R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1}))$ меры $\mu_{k(n)}$ и μ совпадают. Поэтому существует число n_0 такое, что при $n \geq n_0$ выполняется равенство

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu(x) = (\mu_{\tau_{k(n)}}, \varphi). \tag{2.8}$$

Из леммы 2.5 следует, что у последовательности $\tau_{k(n)},\ n \geq n_0$ есть подпоследовательность $\tau_{k(n(j))}$ такая, что $\mu_{\tau_{k(n(j))}} \to \beta\ (j \to \infty)$, где β некоторая мера из $Fr[\mu]$. Беря в равенстве (2.8) $n = n(j)$ и переходя к пределу при $j \to \infty$, получим равенство $(\alpha, \varphi) = (\beta, \varphi)$. Таким образом для любого $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $(\alpha, \varphi) = (\beta, \varphi)$. Так как меры α и β не нагружают нуля, то отсюда следует, что $\alpha = \beta$.

Мы доказали, что если выполняется условие А), то мера $\alpha \in Fr[\mu]$.

Предположим теперь, что выполняется условие Б). В этом случае можно считать, что выполняется неравенство $a\tau_{k(n)} < r_{k(n)}$. Тогда равенство (2.7) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}, r_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x) \\
+ \frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([r_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Так как мера $\mu_{k(n)}$ имеет период $T_{k(n)}$, то выполняется равенства

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}, r_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x) \\
&= \frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}, r_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\left(\mu_{k(n)}\right)_{T_{k(n)}}(x) \\
&= \frac{1}{\left(\tau_{k(n)} T_{k(n)}\right)^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)} T_{k(n)}, r_{k(n)+1}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)} T_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x).
\end{aligned}
$$

Существует число n_1 такое, что при $n \geq n_1$ выполняются соотношения

$$
R([a\tau_{k(n)} T_{k(n)}, r_{k(n)+1})) \subset R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1})),
$$
$$
R([r_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])) \subset R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1})).
$$

Так как на множестве $R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1}))$ меры $\mu_{k(n)}$ и μ совпадают, то равенство (2.9) можно записать при $n \geq n_1$ в виде

$$
\begin{aligned}
(\lambda_n, \varphi) &= \frac{1}{\left(\tau_{k(n)} T_{k(n)}\right)^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}T_{k(n)}, r_{k(n)+1}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)} T_{k(n)}}\right) d\mu(x) \\
&+ \frac{1}{\tau_{k(n)}^{\rho}} \int\limits_{R([r_{k(n)}, b\tau_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu(x) \\
&= \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \int\limits_{R\left(\left[a\frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}}, 1\right)\right)} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x) \\
&+ \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \int\limits_{R\left(\left[1, b\frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}}\right)\right)} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Учитывая, что $supp\,\varphi \subset R([a,b])$ равенство (2.10) при $n \geq n_1$ можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
(\lambda_n, \varphi) &= \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \int\limits_{C(0,1)} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x) \\
&+ \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \int\limits_{R([1,b_1))} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

где b_1 – некоторое достаточно большое число. Далее преобразовываем формулу (2.11). Имеем

$$
\begin{aligned}
(\lambda_n, \varphi) &= \frac{1}{q_1^{\rho}} \int\limits_{C(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x) \\
&+ \frac{1}{q_1^{\rho}} \int\limits_{R([1,b_1))} \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x) + h_{1,n} + h_{2,n}.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

где

$$
h_{1,n} = \int\limits_{C(0,1)} \left(\left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) - \frac{1}{q_1^{\rho}} \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right)\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x),
$$

$$
h_{2,n} = \int\limits_{R([1,b_1))} \left(\left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) - \frac{1}{q_1^{\rho}} \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right)\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x).
$$

Далее, справедлива оценка

$$|h_{2,n}| \leq \sup_{x\in R([1,b_1))} \left| \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^{\rho} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) - \frac{1}{q_1^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) \right| (\sigma+1)b_1^{\rho}.$$

Из этой оценки следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_{2,n} = 0$. Аналогично получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_{1,n} = 0$. Тогда равенство (2.12) можно записать в виде

$$(\lambda_n, \varphi) = \int \varphi_1(x)d\mu_{r(n)+1}(x) + \int \varphi_2(x)d\mu_{r(n)}(x) + o(1). \tag{2.13}$$

Поскольку r_n есть подпоследовательность последовательности t_k, то $\mu_{r_{k(n)}} \to \nu$, $\mu_{r_{k(n)+1}} \to \nu$ $(n\to\infty)$. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные финитные функции на множестве $\mathbb{R}^m \backslash C(0,a)$. По леммы 2.8 выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_1(x)d\mu_{r_{k(n)+1}} = \int \varphi_1(x)d\nu(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_2(x)d\mu_{r_{k(n)}} = \int \varphi_2(x)d\nu(x).$$

Переходя в равенстве (2.13) к пределу при $n\to\infty$ получим равенство

$$(\alpha, \varphi) = \int (\varphi_1(x)+\varphi_2(x))d\nu(x) = \frac{1}{q_1^{\rho}} \int \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) d\nu(x) = (\nu_{q_1}, \varphi).$$

Мы доказали, что для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $(\alpha,\varphi) = (\nu_{q_1},\varphi)$. Поскольку меры α и ν_{q_1} не нагружают нуля, то отсюда следует, что $\lambda = \nu_{q_1} \in Fr[\mu]$. Таким образом, если выполняется условие Б), то мера $\lambda \in Fr[\mu]$.

Аналогично доказывается, что если выполняется условие В), то $\lambda \in Fr[\mu]$. Тем самым доказано, что условие 1) предложения 2.3 выполняется.

Далее покажем, что выполняется условие 2) предложения 2.3. Пусть λ – произвольная мера из множества $Fr[\mu]$. Поскольку $Fr[\mu] \subset (\mathcal{L}[a_n,b_n])_{\frac{1}{n}}$, то существует точка $t_n \in [a_n,b_n]$ такая, что $d(\lambda,\mu_{t_n}) < \frac{1}{n}$. Поэтому $\lambda = d\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n}$. Из предложения 2.4 следует, что последовательность μ_{t_n} широко сходится к мере λ. Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$, $supp\,\varphi \subset R([a,b])$. Имеем

$$(\lambda,\varphi) = \lim_{n\to\infty}(\mu_{t_n},\varphi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n^\rho}\int\limits_{R([at_n,bt_n])}\varphi\left(\frac{x}{t_n}\right)d\mu(x).$$

Существует число n_2 такое, что при $n \geq n_2$ будет выполняться соотношение

$$R([at_n,bt_n]) \subset R([r_n,r_{n+1})).$$

На множестве $R([r_n,r_{n+1}))$ меры μ и μ_n совпадают. Поэтому

$$(\lambda,\varphi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n^\rho}\int\varphi\left(\frac{x}{t_n}\right)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}((\mu_n)_{t_n},\varphi).$$

Из леммы 2.6 следует, что $(\mu_n)_{t_n} \to \lambda$. Поскольку мера μ_n является периодической, то $(\mu_n)_{t_n} \in Fr[\mu_n]$.

Тем самым условие 2) из предложения 2.3 выполняется. Из сказанного следует справедливость равенства (2.6). Теорема доказана. □

Следующую теорему можно рассматривать как обращение предыдущей теоремы.

Теорема 2.5. *Пусть μ_n – последовательность периодических порядка ρ вещественных радоновых мер в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ из класса $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$, и пусть последовательность $Fr[\mu_n,\rho(r)]$ сходится в метрике Хаусдорфа к компакту M. Тогда для любого уточнённого порядка $\rho(r)$ такого, что $\rho(\infty)=\rho$ существует радонова мера μ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ такая, что $Fr[\mu,\rho(r)] = M$.*

Доказательство. Докажем сначала теорему при дополнительном предположении, что $\rho(r) \equiv \rho$.

Из предложения 2.3 следует, что множество мер $\{(\mu_n)_t : n = 1,2,\ldots,\ t \in (0,\infty)\}$ компактно в метрическом пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому замыкание X этого множества в метрическом пространстве

$(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$ есть компакт в этом пространстве. Мы будем рассматривать динамическую систему $A_t,\ t \in (0, \infty)$ на метрическом компакте (X, d).

Поскольку μ_n – компактная последовательность в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, то переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \lambda,\ \lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n| = \hat{\lambda}$. Кроме того дополнительно можно считать, что $\hat{\lambda}(C(0,1)) = 0$. Из предложения 2.3 следует, что $\lambda \in M$. Отметим ещё, что компакт M инвариантен относительно преобразования A_t.

Если $T_n > 1$ – период меры μ_n, то при любом натуральном k число T_n^k также будет периодом μ_n. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Далее построим три последовательности $r_n,\ m_n,\ j_n$ следующим образом. Возьмём $r_1 = T_1,\ j_1 = 1$. В качестве r_2 возьмём число $r_2 = T_2^{j_2}$, причём натуральное число j_2 выберем так, чтобы выполнялись такие условия.

1. $j_2 \geq 2$;
2. $r_2 \geq r_1^2$;
3. существует натуральное число m_1 такое, что
$$\frac{T_1^{m_1}}{T_2^{j_2}} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Как следует из теоремы 5, глава 1, [15] для любого $\theta > 0$ существуют последовательности $q_n \to \infty$, $p_n \to \infty$ натуральных чисел такие, что выполняется неравенство
$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5} q_n^2},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Применим это неравенство к числу $\theta = \frac{\ln T_2}{\ln T_1}$ и перепишем его в эквивалентном виде
$$T_1^{\frac{-1}{\sqrt{5} p_n q_n}} < \frac{T_1^{p_n}}{T_2^{q_n}} < T_1^{\frac{1}{\sqrt{5} p_n q_n}}.$$
Из сказанного следует существование чисел m_1 и j_2 с перечисленными для них свойствами.

Пусть мы уже определили числа $r_1, \ldots, r_n, m_1, \ldots, m_n, j_1, \ldots, j_n$. Далее положим $r_{n+1} = T_{n+1}^{j_{n+1}}$, где натуральное число j_{n+1} выберем так, чтобы выполнялись такие условия.

1. $j_{n+1} \geq n+1$;

2. $r_{n+1} \geq r_n^2$;

3. Существует натуральное число m_n такое, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{T_n^{m_n}}{T_{n+1}^{j_{n+1}}} \in \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Из уже цитировавшейся теоремы 5, глава 1, [15] следует, что числа m_n и j_{n+1} с перечисленными выше свойствами существует. Тем самым процесс построения последовательностей $r_n,\ m_n,\ j_n$ описан.

Выполняются следующие условия:

i1) m_n и j_n – это последовательности натуральных чисел;

i2) выполняется неравенство $j_n \geq n$;

i3) выполняется равенство $r_n = T_n^{j_n}$;

i4) выполняется неравенство $r_{n+1} \geq r_n^2$;

i5) выполняется соотношение

$$\frac{T_n^{m_n}}{T_{n+1}^{j_{n+1}}} \in \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Определим теперь радонову меру μ в $\mathbb{R}^m$ следующим образом. Ограничение на шар (круг) $C(0, r_1)$ есть нулевая мера. Ограничения мер μ и μ_n на шаровой слой (кольцо) $R([r_n, r_{n+1}))$ совпадают.

Пусть $r \in [r_n, r_{n+1})$. Имеем

$$|\mu|(B(0,r)) = \sum_{n=1}^{k-1} |\mu| \left(R([r_n, r_{n+1})\right) + |\mu|(R([r_k, r]))$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} |\mu_n| \left(R([r_n, r_{n+1})\right) + |\mu_k|(R([r_k, r])) \leq \sigma \sum_{n=1}^{k-1} r_{n+1}^{\rho} + \sigma r^{\rho}.$$

Из неравенства $r_{n+1} \geq r_n^2$ следует, что при n достаточно больших $r_n^{\rho} \leq \frac{1}{2} r_{n+1}^{\rho}$.

Из этого, в свою очередь следует существование постоянной C такой, что для любого натурального k будет выполняться неравенство $\sum\limits_{n=1}^{k} r_n^\rho \leq Cr_k^\rho$. Поэтому

$$|\mu|(B(0,r)) \leq \sigma M r_k^\rho + \sigma r^\rho \leq \sigma(M+1)r^\rho.$$

Мы получим, что для любого $r > 0$ выполняется неравенство $|\mu|(B(0,r)) \leq \sigma_1 r^\rho$, где $\sigma_1 = \sigma(M+1)$. Это означает, что $\mu \in \mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$.

Теперь докажем, что выполняется равенство

$$Fr[\mu, \rho] = M.$$

Пусть $\nu \in Fr[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что $\mu_{t_k} \to \nu$. Не ограничивая общность, можно считать, что на каждом полуинтервале $[r_n, r_{n+1})$ лежит не более чем одна точка t_k. Пусть $t_k \in [r_{n(k)}, r_{n(k)+1})$. Дополнительно можно считать, что выполняется одно из трёх условий:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)}} = \infty, \ \lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)+1}} = 0; \tag{2.14}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)}} = q_1 \in [1, \infty); \tag{2.15}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)+1}} = q_2 \in (0, 1]. \tag{2.16}$$

Пусть φ – произвольная функция из пространстве $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $supp\, \varphi$ содержится в $R([a,b])$. Можно считать, что $a \in (0,1)$, $b \in (1, \infty)$. Имеем

$$(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\mu_{t_k}, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int\limits_{R([at_k, bt_k])} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu(x). \tag{2.17}$$

Предположим, что выполняется условие (2.14). Тогда для всех достаточно больших k выполняется соотношение $R([at_k, bt_k]) \subset R([r_{n(k)}, r_{n(k)+1}))$.

На множестве $R([r_{n(k)}, r_{n(k)+1}))$ меры μ и $\mu_{n(k)}$ совпадают. Тогда из равенства (2.17) следует, что

$$(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} ((\mu_{n(k)})_{t_k}, \varphi). \tag{2.18}$$

Имеем

$$|(\mu_{n(k)})_{t_k}|(B(0,\varepsilon)) = \frac{|\mu_{n_k}|(B(0,t_k\varepsilon))}{t_k^\rho} \le \sigma\varepsilon^\rho.$$

Равенство (2.18) выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Из леммы 2.7 следует, что

$$\nu = \lim_{k\to\infty} (\mu_{n(k)})_{t_n}.$$

Из предложения 2.3 следует, что $\nu \in M$. Мы показали, что если выполняется условие (2.14), то $\nu \in M$.

Предположим теперь, что выполняется условие (2.16). В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что выполняется неравенство $bt_k > r_{n(k)+1}$. Из равенства (2.17) следует, что

$$\begin{aligned}(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int\limits_{R([at_k, r_{n(k)+1}))} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu(x) \\ + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int\limits_{R([r_{n(k)+1}, bt_k])} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu(x).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Для всех достаточно больших k выполняются соотношения

$$R([at_k, r_{n(k)+1})) \subset R([r_{n(k)}, r_{n(k)+1})),\ R([r_{n(k)+1}, bt_k]) \subset R([r_{n(k)+1}, r_{n(k)+2})).$$

Поэтому равенство (2.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int\limits_{C(0, r_{n(k)+1})} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu_{n(k)}(x) \\ + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int\limits_{CB(0, r_{n(k)+1})} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu_{n(k)+1}(x) = \lim_{k\to\infty} (J_{1,k} + J_{2,k}).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Имеем

$$J_{2,k} = \frac{r_{n(k)+1}^\rho}{t_k^\rho} \int\limits_{CB(0,1)} \varphi\left(x\frac{r_{n(k)+1}}{t_k}\right) d(\mu_{n(k)+1})_{r_{n(k)+1}}(x).$$

Так как число $r_{n(k)+1}$ является периодом меры $\mu_{n(k)+1}$, то выполняется равенство

$$\left(\mu_{n(k)+1}\right)_{r_{n(k)+1}} = \mu_{n(k)+1}.$$

Таким образом, так как $\frac{q_2 r_{n(k)+1}}{t_k} \to 1$, а массы мер $\mu_{n(k)+1}$ равномерно ограничены на носителе функции φ, то можно в интеграле заменить $\frac{r_{n(k)+1}}{t_k}$ на $\frac{1}{q_2}$.

Итак

$$J_{2,k} = \frac{1}{q_2^\rho} \int\limits_{CB(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) \mu_{n(k)+1}(x).$$

Обозначим

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & \|x\| < 1 \\ \frac{1}{q_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right), & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Тогда $J_{2,k} = \int \varphi_2(x) d\mu_{n(k)+1}(x)$. По теореме 2.8

$$\lim_{k\to\infty} J_{2,k} = \int \varphi_2(x) d\lambda(x).$$

Далее находим

$$J_{1,k} = \frac{r^\rho_{n(k)+1}}{t_k^\rho} \int\limits_{C(0,1)} \varphi\left(x\frac{r_{n(k)+1}}{t_k}\right) d(\mu_{n(k)})_{r_{n(k)+1}}(x).$$

Так как $T_{n(k)}^{m_{n(k)}}$ есть период меры $\mu_{n(k)}$, то рассуждая как и выше, имеем

$$(\mu_{n(k)})_{r_{n(k)+1}} = (\mu_{n(k)})_{T_{n(k)}^{m_{n(k)}} \frac{r_{n(k)+1}}{T_{n(k)}^{m_{n(k)}}}} = (\mu_{n(k)})_{\frac{r_{n(k)+1}}{T_{n(k)}^{m_{n(k)}}}}.$$

По условию i5 следует, что

$$\beta_k = \frac{r_{n(k)+1}}{T_{n(k)}^{m_{n(k)}}} = \frac{T_{n(k)+1}^{j_{n(k)+1}}}{T_{n(k)}^{m_{n(k)}}} \to 1 \ (k \to \infty).$$

Следовательно,

$$J_{1,k} = \frac{1}{q_2^\rho} \int\limits_{C(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) d(\mu_{n(k)})_{\beta_k}(x)$$

$$= \frac{1}{q_2^\rho \beta_k^\rho} \int\limits_{C(0,\beta_k)} \varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) d\mu_{n(k)}(x).$$

Представим $J_{1,k}$ в виде $J_{1,k} = J_{3,k} + J_{4,k} + J_{5,k}$, где

$$J_{3,k} = \frac{1}{q_2^\rho} \int\limits_{C(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) d\mu_{n(k)}(x),$$

$$J_{4,k} = \int\limits_{C(0,1)} \left(\frac{1}{q_2^\rho \beta_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) - \frac{1}{q_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right)\right) d\mu_{n(k)}(x),$$

$$J_{5,k} = \begin{cases} \int\limits_{C(0,\beta_k)\setminus C(0,1)} \frac{1}{q_2^\rho \beta_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) d\mu_{n(k)}(x), \text{ если } \beta_k \geq 1 \\ -\int\limits_{C(0,1)\setminus C(0,\beta_k)} \frac{1}{q_2^\rho \beta_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) d\mu_{n(k)}(x), \text{ если } \beta_k \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{q_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right), \text{ если } \|x\| < 1 \\ 0, \text{ если } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Тогда $J_{3,k} = \int \varphi_1(x) d\mu_{n(k)}(x)$. По предложению 2.3

$$\lim_{k\to\infty} J_{3,k} = \int \varphi_1(x) d\lambda(x).$$

Справедлива оценка

$$|J_{4,k}| \leq \max_{\|x\|\leq 1} \left|\frac{1}{q_2^\rho \beta_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) - \frac{1}{q_2^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right)\right| |\mu_{n(k)}|(B(0,1)).$$

Так как $|\mu_{n(k)}|(B(0,1)) \leq \sigma$, то $\lim\limits_{k\to\infty} J_{4,k} = 0.$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$|J_{5,k}| \leq \frac{1}{q_2^\rho \beta_2^\rho}\|\varphi\| |\mu_{n(k)}|(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon]).$$

Если число ε таково, что выполняются равенства $\hat{\lambda}(S(0, 1-\varepsilon)) = 0$, $\hat{\lambda}(S(0, 1+\varepsilon)) = 0$, тогда из теоремы 1.11 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |\mu_{n(k)}|(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])) = \hat{\lambda}(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])).$$

Так как $\hat{\lambda}(S(0,1)) = 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{\lambda}(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])) = 0$.

Из сказанного легко следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} J_{5,k} = 0$.

Теперь равенство (2.20) переписывается в виде

$$(\nu, \varphi) = \int (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) d\lambda(x) = \frac{1}{q_2^\rho} \int \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) d\lambda(x) = (\lambda_{q_2}, \varphi). \quad (2.21)$$

Равенство (2.21) выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Так как $\nu(\{0\}) = 0,\ \lambda(\{0\}) = 0$, то отсюда следует, что $\nu = \lambda_{q_2}$. Так как $\lambda_{q_2} \in M$, то $\nu \in M$. Мы доказали, что если выполняется условие (2.16), то $\nu \in M$.

Аналогично доказывается, что если выполняется условие (2.15), то $\nu \in M$. Таким образом в любом случае $\nu \in M$. Мы доказали соотношение $Fr[\mu] \subset M$.

Пусть теперь $\nu \in M$. По предложению 2.3 существует последовательность мер $\nu_n \in Fr[\mu_n]$ такая, что $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n$.

Имеем $r_n = T_n^{j_n},\ r_{n+1} = T_{n+1}^{j_{n+1}}$. Так как выполняется неравенство $r_{n+1} \geq r_n^2$, то $r_{n+1} \geq T_n^{2j_n}$. При $n \geq 3$ выполняется соотношение $j_n + 3 \leq 2j_n$. Поэтому при $n \geq 3$ выполняется соотношение

$$R\left(\left[T_n^{j_n+1}, T_n^{j_n+3}\right]\right) \subset R([r_n, r_{n+1})).$$

Мера ν_n имеет вид $\nu_n = (\mu_n)_{t_n}$. Как следует из замечания к предложению 2.1 можно считать, что $t_n \in \left[T_n^{j_n+1}, T_n^{j_n+2}\right]$.

Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Имеем при подходящих $a,\ b$

$$(\nu_n, \varphi) = \frac{1}{t_n^\rho} \int\limits_{R([at_n, bt_n])} \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\mu_n(x). \quad (2.22)$$

При всех достаточно больших n выполняется соотношение $R([at_n, bt_n]) \subset R([r_n, r_{n+1}))$. На множестве $R([r_n, r_{n+1}))$ функции μ_n и μ совпадают. Поэтому равенство (2.22) можно переписать в виде

$$(\nu_n, \varphi) = (\mu_{t_n}, \varphi). \quad (2.23)$$

Существует подпоследовательность натуральных чисел $n(k)$ такая, что $\mu_{t_{n(k)}} \to \alpha$, где α – некоторая мера из множества $Fr[\mu]$. Беря в равенстве (2.23) $n = n(k)$ и переходя к пределу при $k \to \infty$ получим равенство $(\nu, \varphi) = (\alpha, \varphi)$. Это равенство выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Поскольку меры ν и α не нагружают нуля, то из этого равенства следует, что $\nu = \alpha$. Мы доказали включение $M \subset Fr[\mu]$, а вместе с ним и теорему для случая $\rho(r) \equiv \rho$.

В общем случае теорема следует из доказанного и леммы 2.10. □

2.4. Цепная рекурентность

Пусть $\Phi_t,\ t \in (0, \infty)$ – динамическая система в метрическом пространстве (X, h). Последовательность $p_0 = p, p_1, \dots, p_k = q$ точек из X называется (ω, ε)-цепью, соединяющей точки p и q, если существует последовательность $t_l,\ l \in \overline{0, k-1}$ такая, что $t_l \geq \omega$ и $h(\Phi_{t_l} p_l, p_{l+1}) < \varepsilon$.

Динамическая система Φ_t в метрическом пространстве (X, h) называется цепной рекурентностью, если для любых точек p и q из X и для любых $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует (ω, ε)-цепь, соединяющая точки p и q.

Предложение 2.5. *Пусть Φ_t – динамическая система в метрическом пространстве (X, h), является цепной рекурентностью, и пусть q_n – произвольная последовательность точек из X. Тогда существуют последовательность p_n точек из X и последовательности $\omega_n > 0,\ \alpha_n > 0,\ \varepsilon_n > 0$ такие, что выполняются условия:*

1) q_n – подпоследовательность последовательности p_n;

2) $\alpha_n \leq \frac{1}{2},\ \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$;

3) $\omega_n \geq 2,\ \lim\limits_{n \to \infty} \omega_n = \infty$;

4) $h(\Phi_{\omega_n} p_n, \Phi_{\alpha_{n+1}} p_{n+1}) < \varepsilon_n,\ \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Доказательство. Для любого $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим набор $\{\tau_k = \frac{1}{4^k}, T_k = 4^k, \gamma_k = 4^k, \delta_k = \frac{1}{4^k}\}$. Поскольку динамическая система Φ_t является цепной рекурентностью, то для любого $k \geq 1$ найдутся целое число $l_k \geq 1$, последовательность чисел $t_k(s),\ s \in \overline{0, l_k - 1}$ такая, что

$t_k(s) \geq \sqrt{T_k}$, последовательность точек из X $r_k(s),\ s \in \overline{0, l_k}$ такая, что $h(\Phi_{t_k(s)} r_k(s), r_k(s+1)) < \tau_k,\ s \in \overline{0, l_k - 1},\ r_k(0) = \Phi_{\gamma_k} q_k,\ r_k(l_k) = \Phi_{\delta_k} q_{k+1}$.

Далее образуем следующие последовательности.

1. $\nu_n :\ \nu_1 = 1,\ \nu_{n+1} = \nu_n + l_n + 1.$
2. $\varepsilon_j :\ \varepsilon_j = \tau_n$ при $j \in \overline{\nu_n, \nu_{n+1} - 1}$.
3. $\alpha_j :\ \alpha_{\nu_n} = \frac{1}{4^n},\ \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{t_n(s)}}$, если $j = \nu_n + s + 1,\ s \in \overline{0, l_n - 1}.$
4. $\omega_j :\ \omega_{\nu_n} = 4^n,\ \omega_j = \sqrt{t_n(s)}$, если $j = \nu_n + s + 1,\ s \in \overline{0, l_n - 1}.$
5. $p_j :\ p_{\nu_n} = q_n,\ p_j = \Phi_{\sqrt{t_n(s)}} r_n(s),\ j = \nu_n + s + 1,\ s \in \overline{0, l_n - 1}$.

Проверим, что для любого $j \geq 1$ выполняется неравенство

$$h(\Phi_{\omega_j} p_j, \Phi_{\alpha_{j+1}} p_{j+1}) < \varepsilon_j. \tag{2.24}$$

Пусть $j = \nu_n$. Имеем $\omega_j = 4^n = \gamma_n,\ p_j = q_n,\ \Phi_{\omega_j} p_j = \Phi_{\gamma_n} q_n = r_n(0)$. Далее находим $p_{j+1} = \Phi_{\sqrt{t_n(0)}} r_n(0),\ \alpha_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{t_n(0)}},\ \Phi_{\alpha_{j+1}} p_{j+1} = r_n(0)$.

Тем самым неравенство (2.24) при $j = \nu_n$ доказано.

Пусть теперь $j = \nu_n + s + 1,\ s \in \overline{0, l_n - 1}$. Имеем

$$p_j = \Phi_{\sqrt{t_n(s)}} r_n(s),\ \omega_j = \sqrt{t_n(s)},\ \Phi_{\omega_j} p_j = \Phi_{t_n(s)} r_n(s),$$
$$p_{j+1} = \Phi_{\sqrt{t_n(s+1)}} r_n(s+1),\ \alpha_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{t_n(s+1)}},\ \Phi_{\alpha_{j+1}} p_{j+1} = r_n(s+1).$$

Поэтому пользуясь определением величин $t_n(s),\ r_n(s),\ \tau_n,\ \varepsilon_j$ получаем

$$h(\Phi_{\omega_j} p_j, \Phi_{\alpha_{j+1}} p_{j+1}) = h(\Phi_{t_n(s)} r_n(s), r_n(s+1)) < \tau_n = \varepsilon_j.$$

Тем самым неравенство (2.24) выполняется для любого j. Для последовательностей p_n, $\omega_n, \alpha_n, \varepsilon_n$ выполняются все условия предложения. Предложение доказано. □

Пусть $\alpha_n \in (0, \frac{1}{2}]$ – последовательность, сходящаяся к нулю, $\omega_n \in [2, \infty)$ – последовательность, сходящаяся к бесконечности. Образуем ещё две последовательности τ_n и σ_n следующим образом: $\tau_1 = 1,\ \sigma_n = \omega_n \tau_n,\ \tau_{n+1} = \frac{\sigma_n}{\alpha_{n+1}}$. Заметим, что $\tau_{n+1} = \frac{\omega_n}{\alpha_{n+1}} \tau_n,\ \sigma_{n+1} = \frac{\omega_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \sigma_n$.

Лемма 2.15. *Пусть* $\chi(t)$ *– бесконечно дифференцируемая функция на оси* $(-\infty, \infty)$ *со значениями из сегмента* $[0,1]$, *которая убывает на полуоси* $[0,\infty)$. *Пусть, кроме того выполняются условия* $\chi(t) = 1$ *при* $t \in [-1,1]$ *и* $\chi(t) = 0$ *при* $|t| \geq 2$. *Пусть* α_n *и* ω_n *– две последовательности, удовлетворяющие сформулированным выше условиям, а* τ_n *и* σ_n *– две последовательности, построенные с помощью последовательностей* α_n *и* ω_n *указанным выше способом.*

Пусть $\chi_n(t) = \chi\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)$, $\psi_1(x) = \chi_1(\|x\|)$, $\psi_n(x) = \chi_n(x) - \chi_{n-1}(x)$, $n \geq 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $\psi_n(x)$ *– бесконечно дифференцируемая функция;*

2) $\psi_n(x) \in [0,1]$ *для любого* $x \in \mathbb{R}^m$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}^m$;

4) $\psi_n(x) = 1$, *если* $\|x\| \in [2\sigma_{n-1}, \sigma_n],\ n \geq 2$;

5) $supp\ \psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^m :\ \sigma_{n-1} \leq \|x\| \leq 2\sigma_n\},\ n \geq 2$;

6) $supp\ \psi_{n_2} \cap supp\ \psi_{n_1} = \emptyset$, *если* $|n_2 - n_1| \geq 2$;

7) существует постоянная C *такая, что для любого* $n \geq 1$ *выполняется неравенство*

$$\|grad\ \psi_n(x)\| \leq \frac{C}{\|x\|}.$$

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Функция $\chi_n(x)$ равна 1 в шаре $B(0,\sigma_n)$ в то время как $\chi_{n-1}(x) \leq 1$. Поэтому в шаре $B(0,\sigma_n)$ выполняется неравенство $\psi_n(x) \geq 0$. Если $\|x\| > \sigma_n$, то $\chi_{n-1}(x) = 0$. Поэтому неравенство $\psi_n(x) \geq 0$ выполняется во всём пространстве $\mathbb{R}^m$. Неравенство $\psi_n(x) \leq 1$ следует из того, что $\chi(t)$ убывающая на $(0,\infty)$ и $\sigma_n > \sigma_{n-1}$. Тем самым утверждение 2) доказано. Так как $\chi_{n-1}(x) = 0$ при $\|x\| \geq 2\sigma_{n-1}$, то $\psi_n(x) = 1$, если $\|x\| \in [2\sigma_{n-1}, \sigma_n]$. Тем самым утверждение 4) доказано. Если $\|x\| \geq 2\sigma_n$, то $\chi_n(x) = 0,\ \chi_{n-1}(x) = 0$. Если $\|x\| \leq \sigma_{n-1}$, то $\chi_n(x) = 1,\ \chi_{n-1}(x) = 1$. Тем самым утверждение 5) доказано. Утверждение 6) следует из утверждения 5). Далее,

$$\sum_{n=1}^{k} \psi_n(x) = \chi_k(x).$$

В шаре $B(0, \sigma_k)$ выполняется равенство $\chi_k(x) = 1$. Отсюда следует утверждение 3. Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \chi \left(\frac{\|x\|}{\sigma_n} \right) = \chi' \left(\frac{\|x\|}{\sigma_n} \right) \frac{x_j}{\|x\|} \frac{\|x\|}{\sigma_n} \frac{1}{\|x\|}.$$

Правая часть может быть отлична от нуля только если выполняются неравенства $\sigma_n \leq \|x\| \leq 2\sigma_n$. Из этого следует утверждение 7) леммы. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.6. *Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок такой, что $\rho = \rho(\infty) > 0$. Пусть M – компакт в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, инвариантный относительно преобразования F_t $\left(F_t : \ \mu(E) \to \frac{\mu(tE)}{t^\rho}\right)$ и принадлежащий множеству $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$. Пусть динамическая система F_t на метрическом пространстве (M, d) является цепной рекурентностью. Тогда существует радонова мера $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ такая, что $Fr[\mu, \rho(r)] = M$.*

Доказательство. Вначале предположим, что $\rho(r) \equiv \rho$. Поскольку M – компакт, то в M существует счётная всюду плотная последовательность q_n. По предложению 2.5 существуют последовательности $p_n \in M,\ \omega_n > 0,\ \alpha_n > 0,\ \varepsilon_n > 0$, обладающие свойствами, перечисленными в этом предложении. Пусть τ_n и σ_n – последовательности построенные с помощью последовательностей ω_n и α_n по способу, описанному в тексте перед леммой 2.15. Пусть $\psi_n(x)$ – последовательность из леммы 2.15. Обозначим

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) F_{\frac{1}{\tau_n}} p_n.$$

Нетрудно видеть, что $\mu \in \mathcal{M}(\rho, \sigma)$. Докажем, что $Fr[\mu, \rho] = M$.

Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$, $supp\ \varphi \subset R([a,b])$. Имеем

$$\begin{aligned}(F_{\tau_n}\mu,\varphi) &= \frac{1}{\tau_n^\rho}\int\limits_{R([a\tau_n,b\tau_n])}\varphi\left(\frac{x}{\tau_n}\right)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\tau_n^\rho}\int\limits_{R([a\tau_n,b\tau_n])}\varphi\left(\frac{x}{\tau_n}\right)d\left(\sum_{k=1}^\infty \psi_k F_{\frac{1}{\tau_k}}p_k\right)(x).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Из леммы 2.15 следует, что выполняются соотношения $supp\ \psi_k \subset R([\sigma_{k-1},2\sigma_k]), \psi_k(x)\ = 1$ при $x\in[2\sigma_{k-1},\sigma_k]$. Если $k\le n-1$, то для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство $2\sigma_k < a\tau_n = a\frac{\sigma_{n-1}}{\alpha_n}$. Если $k\ge n+1$, то для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство $b\tau_n < 2\sigma_{k-1}\le 2\sigma_n = 2\omega_n\tau_n$. Поэтому сумму в правой части неравенства (2.25) можно заменить на $\psi_n(x)F_{\frac{1}{\tau_n}}p_n$. Кроме того $\psi_n(x)=1$ при $x\in R([a\tau_n,b\tau_n])$. Мы получим

$$(F_{\tau_n}\mu,\varphi) = \frac{1}{\tau_n^\rho}\int\varphi\left(\frac{x}{\tau_n}\right)d\left(F_{\frac{1}{\tau_n}}p_n\right)(x) = (p_n,\varphi),\ n\ge n_1. \tag{2.26}$$

Пусть ν – произвольная мера из M. Поскольку последовательность p_n всюду плотная в M, то существует последовательность $n=n(j)$ такая, что $\lim\limits_{j\to\infty}p_{n(j)}=\nu$. Теперь из (2.26) следует, что

$$(\nu,\varphi)=\lim_{j\to\infty}(\mu_{\tau_{n(j)}},\varphi).$$

Это равенство выполняется для любой функции $\varphi\in\Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Поскольку мера ν не нагружает точку ноль, то из этого равенства и леммы 2.6 следует, что

$$\nu=\lim_{j\to\infty}\mu_{\tau_{n(j)}}\in Fr[\mu].$$

Мы доказали включение $M\subset Fr[\mu]$. Теперь будем доказывать включение $Fr[\mu]\subset M$.

Пусть $\nu\in Fr[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_n\to\infty$ такая, что

$$\nu=\lim_{n\to\infty}F_{t_n}\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_{t_n}.$$

Не ограничивая общность, можно считать, что на любом сегменте $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ находится не более одной точки t_n. Пусть $t_n \in [\sigma_{k(n)-1}, \sigma_{k(n)}]$. Дополнительно можно считать, что выполняется одно из трёх условий

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)-1}} = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)}} = 0; \tag{2.27}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)-1}} = a_1 \in [1, \infty); \tag{2.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)}} = a_2 \in (0, 1]. \tag{2.29}$$

Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и $supp\,\varphi \subset R([a,b])$. Тогда

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \frac{1}{t_n^\rho} \int\limits_{R([at_n, bt_n])} \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\left(\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k F_{\frac{1}{\tau_k}} p_k\right)(x). \tag{2.30}$$

Предположим, что выполнено условие (2.27). Тогда существует число n_1 такое, что для всех $n \geq n_1$ будут выполняться неравенства $at_n > 2\sigma_{k(n)-1}$, $bt_n < \sigma_{k(n)}$. Из этих неравенств следует, что на множестве $R([at_n, bt_n])$ для любого $k = k(n)$ будет выполняться равенство $\psi_k(x) = 0$, а если $k = k(n)$, то $\psi_k(x) = 1$. Поэтому равенство (2.30) можно переписать в виде

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \frac{1}{t_n^\rho} \int\limits_{R([at_n, bt_n])} \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\left(F_{\frac{1}{\tau_{k(n)}}} p_{k(n)}\right)(x) = (\lambda_n, \varphi), \tag{2.31}$$

где $\lambda_n = \left(p_{k(n)}\right)_{\frac{t_n}{\tau_{k(n)}}}$.

Мера λ_n принадлежат компакту M. Поэтому найдётся последовательность $n = n(j)$ такая, что $\lambda_{n(j)} \to \lambda \in M$ $(j \to \infty)$. Беря в равенстве (2.31) $n = n(j)$ и переходя к пределу при $j \to \infty$ получим, что $(\nu, \varphi) = (\lambda, \varphi)$. Это равенство для любой φ функции из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Однако, поскольку меры ν и λ не нагружают нуля, из него следует, что $\nu = \lambda \in M$. Мы показали, что если выполняется условие (2.27), то $\nu \in M$.

Предположим теперь, что выполняется условие (2.28). Тогда равенство (2.30) переписывается в виде

$$
\begin{aligned}
(\mu_{t_n},\varphi) &= \frac{1}{t_n^\rho}\int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right)\psi_{k(n)-1}(x)d\left(F_{\frac{1}{\tau_{k(n)-1}}}p_{k(n)-1}\right)(x)\\
&\quad+\frac{1}{t_n^\rho}\int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right)\psi_{k(n)}(x)d\left(F_{\frac{1}{\tau_{k(n)}}}p_{k(n)}\right)(x)\\
=\frac{\sigma_{k(n)-1}^\rho}{t_n^\rho}&\int\varphi\left(x\frac{\sigma_{k(n)-1}}{t_n}\right)\psi_{k(n)-1}(\sigma_{k(n)-1}x)d\left((p_{k(n)-1})_{\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)-1}}}\right)(x)\\
+\frac{\sigma_{k(n)-1}^\rho}{t_n^\rho}&\int\varphi\left(x\frac{\sigma_{k(n)-1}}{t_n}\right)\psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x)d\left((p_{k(n)})_{\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)}}}\right)(x).
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Как следует из леммы 2.1, в рассматриваемом случае не ограничивая общности можно считать, что выполняется равенство $t_n = a_1\sigma_{k(n)-1}$. Учитывая это равенство, также равенства

$$
\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)-1}} = \omega_{k(n)-1},\ \frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)}} = \alpha_{k(n)},
$$

(2.32) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
(\mu_{t_n},\varphi) &= \frac{1}{a_1^\rho}\int\varphi\left(\frac{x}{a_1}\right)\psi_{k(n)-1}(\sigma_{k(n)-1}x)d\left((p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}\right)(x)\\
&\quad+\frac{1}{a_1^\rho}\int\varphi\left(\frac{x}{a_1}\right)\psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x)d\left((p_{k(n)})_{\omega_{k(n)}}\right)(x).
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Имеем

$$
\psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) = \chi\left(\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\sigma_{k(n)}}\|x\|\right) - \chi(\|x\|).
$$

В интегралах из равенства (2.33) интегрирование можно вести по шару $B(0,ba_1)$. Если $x\in B(0,ba_1)$ то для всех достаточно больших n будет выполняться равенство $\chi\left(\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\sigma_{k(n)}}\|x\|\right) = 1$. Обозначим второе слагаемое из правой части равенства (2.33) через $J_{2,n}$. Его можно преобразовать следующим образом

$$
J_{2,n} = \frac{1}{a_1^\rho}\int\varphi\left(\frac{x}{a_1}\right)\psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x)d(p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}(x) + h_n,
$$

где

$$
h_n = \frac{1}{a_1^\rho}\int\varphi\left(\frac{x}{a_1}\right)(1-\chi(\|x\|))\,d\left((p_{k(n)})_{\alpha_{k(n)}} - (p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}\right)(x).
$$

По построению для динамической системы F_t выполняется условие 4) предложения 2.5, поэтому мера $(p_{k(n)})_{\alpha_{k(n)}} - (p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Так как $aa_1 \leq \|x\| \leq ba_1$, то $\psi_{k(n)-1}(\sigma_{k(n)-1}x) + \psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) = 1$. Следовательно, равенство (2.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (\mu_{t_n}, \varphi) &= \frac{1}{a_1^\rho} \int \varphi\left(\frac{x}{a_1}\right) d(p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}(x) + h_n \\ &= \int \varphi(x) d(p_{k(n)-1})_{a_1\omega_{k(n)-1}}(x) + h_n. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Меры $\lambda_n = (p_{k(n)-1})_{a_1\omega_{k(n)-1}}$ лежат а компакте M. Поэтому существует последовательность $n = n(j)$ такая, что $\lambda_{n(j)} \to \lambda \in M$. Беря в равенстве (2.34) $n = n(j)$ и переходя к пределу при $j \to \infty$, получим равенство $(\nu, \varphi) = (\lambda, \varphi)$. Это равенство выполняется для всех $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Поскольку меры ν и λ не нагружают точку ноль, то отсюда следует, что $\nu = \lambda \in M$. Мы доказали, что если выполняется условие (2.28), то мера $\nu \in M$. Аналогично показывается, что если выполняется условие (2.29), то в этом случае мера также принадлежит M. Таким образом соотношение $\nu \in M$ выполняется в любом случае. Тем самым доказано включение $Fr[\mu] \subset M$, а вместе с ним и теорема для случая когда $\rho(r) \equiv \rho$. Теперь утверждение теоремы следует из доказанного и леммы 2.10. Теорема доказана. □

2.5. Псевдотраектории

Пусть (X, h) – метрическое пространство. Отображение $\lambda(t):\ (0, \infty) \to X$ (не обязательно непрерывное) мы будем называть кривой в метрическом пространстве X.

Кривая $\lambda(t)$ называется всюду плотной на бесконечности в пространстве X, если для любой точки $x \in X$ существует $t_n \to \infty$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n)$.

Отображение $\lambda(t)$ будем называть кусочно непрерывным, если множество точек разрыва этого отображения не имеет конечных предельных точек.

Пусть Φ_t – динамическая система на метрическом пространстве (X, h). Кривая $\lambda(t)$ называется псевдотраекторией, если для любого $\tau > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{t \to \infty} h(\Phi_t \lambda(t), \lambda(t\tau)) = 0,$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Теорема 2.7. *Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок. Пусть μ – радонова мера в пространстве $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, пусть $M = Fr[\mu, \rho(r)]$. Тогда система F_t $\left(F_t : \mu(E) \to \frac{\mu(tE)}{t^\rho}\right)$ есть динамическая система в метрическом пространстве (M, d) и в этом пространстве есть кусочно непрерывная псевдотраектория, всюду плотная на бесконечности в множестве M.*

Доказательство. Из леммы 2.10 следует, что не ограничивая общности можно считать, что $\rho(r) \equiv \rho$.

Из леммы 2.3 следует, что дополнительно можно считать, что $\mu \in \mathcal{M}(\rho, \sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. В этом случае траектория $\mu_t,\ t \in (0, \infty)$ будет сильно ограниченным, а следовательно, согласно теореме 1.6 и компактным множеством в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через X замыкание праектории $\mu_t,\ t \in (0, \infty)$ в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. По предложению 2.4 множество X будет компактом в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ и d-сходимость на X будет эквивалентна широкой сходимости.

Так как траектория $\mu_t,\ t \in (0, \infty)$ инвариантна относительно преобразования F_t, то множество X будет также инвариантным относительно этого преобразования. Поэтому система отображений $F_t,\ t \in (0, \infty)$ будет динамической системой на метрическом компакте (X, d).

Обозначим через $\tilde{\mu}_n$ точку из M ближайшую к точке $\mu_n = F_n \mu$. По лемме 2.13 $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mu_n, \tilde{\mu}_n) = 0$. Определим теперь кривую $\lambda(t)$ в метрическом пространстве (M, d) следующим образом

$$\lambda = \begin{cases} \tilde{\mu}_n, \ t \in [n, n+1), \ n \geq 1 \\ \tilde{\mu}_1, \ t \in (0, 1). \end{cases}$$

Очевидно, что $\lambda(t)$ – кусочно непрерывная кривая.

Пусть ν – произвольная мера из M. Существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\nu = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_{t_k}$. Пусть $n_k = [t_k]$. Очевидно, что $\frac{n_k}{t_k} \to 1 \ (k \to \infty)$. Далее имеем $\mu_{n_k} = (\mu_{t_k})_{\frac{n_k}{t_k}}$. Из леммы 2.1 следует, что $\mu_{n_k} \to \nu$. Поэтому $\nu = d\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n_k} = d\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\mu}_{n_k} = d\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(n_k)$. Тем самым доказано, что кривая $\lambda(t)$ плотна на бесконечности в пространстве M.

Пусть теперь $[a, b]$ – произвольный сегмент, лежащий на полуоси (o, ∞) и пусть $\tau \in [a, b]$. Имеем

$$K(t, \tau) = d\left(F_\tau \lambda(t), \lambda(t\tau)\right) = d\left((\tilde{\mu}_n)_\tau, \tilde{\mu}_{[t\tau]}\right)$$
$$\leq d\left((\tilde{\mu}_n)_\tau, (\mu_n)_\tau\right) + d\left((\mu_n)_\tau, \mu_{[t\tau]}\right) + d\left(\mu_{[t\tau]}, \tilde{\mu}_{[t\tau]}\right), \ n = [t].$$

Из леммы 2.13 легко следует, что функция $d\left(\mu_{[t\tau]}, \tilde{\mu}_{[t\tau]}\right)$ равномерно относительно τ на сегменте $[a, b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Пусть g – функция из леммы 2.11. Выполняется неравенство

$$d\left((\tilde{\mu}_n)_\tau, (\mu_n)_\tau\right) \leq g\left(d\left(\tilde{\mu}_n, \mu_n\right)\right).$$

Из леммы 2.11 следует, что функция $d\left((\tilde{\mu}_n)_\tau, (\mu_n)_\tau\right)$ равномерно относительно τ на сегменте $[a, b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Докажем теперь, что функция $d\left((\mu_n)_\tau, \mu_{[t\tau]}\right)$ равномерно относительно $\tau \in [a, b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Если это не так, то существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $t_k \to \infty$ и $\tau_k \in [a, b]$ такие, что выполняется неравенство

$$d\left((\mu_{[t_k]})_{\tau_k}, \mu_{[t_k \tau_k]}\right) \geq \varepsilon_0. \tag{2.35}$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\mu_{t_k} \to \alpha \in M,\ \tau_k \to \tilde{\tau} \in [a,b]$. Так как функция $F_t\mu$ непрерывна по совокупности переменных, то

$$\mu_{t_k\tilde{\tau}} = F_{\tilde{\tau}}(\mu_{t_k}) \to F_{\tilde{\tau}}\alpha = \alpha_{\tilde{\tau}},$$
$$(\mu_{[t_k]})_{\tau_k} = F_{\frac{[t_k]\tau_k}{t_k\tilde{\tau}}}(\mu_{t_k\tilde{\tau}}) \to \alpha_{\tilde{\tau}},$$
$$\mu_{[t_k\tau_k]} = F_{\frac{[t_k\tau_k]}{t_k\tilde{\tau}}}(\mu_{t_k\tilde{\tau}}) \to \alpha_{\tilde{\tau}}.$$

Справедливо неравенство

$$d\left((\mu_{[t_k]})_{\tau_k}, \mu_{[t_k\tau_k]}\right) \leq d((\mu_{[t_k]})_{\tau_k}, \alpha_{\tilde{\tau}}) + d(\alpha_{\tilde{\tau}}, \mu_{[t_k\tau_k]}).$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Это противоречит неравенству (2.35). Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Тем самым доказано, что функция $K(t,\tau)$ равномерно относительно τ на сегменте $[a,b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Это означает, что кривая $\lambda(t)$ является псевдотраекторией. теорема доказана. □

Теорема 2.8. *Пусть* $\rho(r)$ *– уточнённый порядок. Пусть* μ *– радонова мера в* $\mathbb{R}^m$ *не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$*, пусть* $M = Fr[\mu, \rho(r)]$*. Тогда динамическая система* $F_t,\ t \in (0,\infty)$ *на метрическом пространстве* (M,d) *является цепной рекурентностью.*

Доказательство. Пусть p и q – произвольные точки из M, а ω и ε – произвольные строго положительные числа. По теореме 2.7 в множестве M существует кусочно непрерывная псевдотраектория $\lambda(t)$ плотная на бесконечности в пространстве M. Поэтому существуют две последовательности $t_n^{(1)} \to \infty$ и $t_n^{(2)} \to \infty$ такие, что выполняются равенства $p = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n^{(1)}),\ q = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n^{(2)})$.

Пусть числа $t_{n_1}^{(1)}$ и $t_{n_2}^{(1)}$ связанны соотношением

$$\frac{\ln t_{n_2}^{(2)} - \ln t_{n_1}^{(1)}}{\ln(\omega+1)} = k + \theta, \tag{2.36}$$

где k – натуральные число, $\theta \in [0,1)$. Найдём число x такое, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\ln t_{n_2}^{(2)} - \ln t_{n_1}^{(1)}}{\ln(\omega + x)} = k.$$

Тогда $\frac{\ln(\omega+x)}{\ln(\omega+1)} = 1 + \frac{\theta}{k}$, $\omega + x = (\omega+1)^{1+\frac{\theta}{k}}$. Если число k таково, что выполняется неравенство

$$k > \frac{\ln(\omega+1)}{\ln\frac{\omega+2}{\omega+1}}, \tag{2.37}$$

то будет выполняться соотношение $x \in [1,2]$.

В дальнейшем будем считать, что числа $t_{n_1}^{(1)}$ и $t_{n_2}^{(1)}$ таковы, что выполняется неравенство (2.37). В этом случае $t_{n_2}^{(2)} = t_{n_1}^{(1)}\tau^k$, $\tau = \omega + x$.

Построим теперь последовательность p_j, $j \in \overline{0,k}$ следующим образом: $p_0 = p$, $p_k = q$, $p_j = \lambda(\tau^j t_n^{(1)})$, $j = \overline{1, k-1}$.

Так как кривая $\lambda(t)$ является псевдотраекторией то существует число T такое, что для всех $t \geq T$ и для всех $\tau_1 \in [\omega+1, \omega+2]$ будет выполняться неравенство

$$d(F_{\tau_1}\lambda(t), \lambda(\tau_1 t)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.38}$$

Нам будем нужна оценка величины $d\left(F_\tau p, F_\tau\left(\lambda(t_{n_1}^{(1)}\right)\right)$. Считая, что $[a,b] = [\omega+1, \omega+2]$ рассмотрим функцию g из леммы 2.11. Справедлива оценка

$$d\left(F_\tau p, F_\tau\left(\lambda(t_{n_1}^{(1)}\right)\right) \leq g\left(d\left(p, \lambda\left(t_{n_1}^{(1)}\right)\right)\right). \tag{2.39}$$

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(p, \lambda\left(t_n^{(1)}\right)\right) = 0$. Из леммы 2.11 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} g\left(d\left(p, \lambda\left(t_n^{(1)}\right)\right)\right) = 0.$$

Поэтому существует число N такое, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$g\left(d\left(p, \lambda\left(t_n^{(1)}\right)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.40}$$

В качестве n_1 возьмём такое число, чтобы выполнялись неравенства $n_1 > N$, $t_{n_1}^{(1)} > T$. Очевидно, что такой выбор возможен. Теперь из неравенств (2.39) и (2.40) следует, что будет выполняться неравенство

$$d\left(F_\tau p, F_\tau\left(\lambda\left(t_{n_1}^{(1)}\right)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.41}$$

а из неравенства (2.38) следует, что будет выполняться неравенство

$$d\left(F_\tau\left(\lambda\left(t_{n_1}^{(1)}\right)\right), F_\tau\left(\lambda\left(t_{n_1}^{(1)}\right)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.42}$$

Число n_1 мы уже выбрали. Займёмся теперь выбором числа n_2. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} d\big(q,\ \lambda\big(t_n^{(2)}\big)\big) = 0$. Поэтому найдется число N_1 такое, что для всех $n > N_1$ будет выполняться неравенство

$$d\left(q, \lambda\left(t_n^{(2)}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.43}$$

Пусть целое число k_n определяется равенством

$$\frac{\ln t_n^{(2)} - \ln t_{n_1}^{(1)}}{\ln(\omega+1)} = k_n + \theta_n,$$

где $\theta_n \in [0,1)$. Выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$. Поэтому существует число N_2 такое, что для всех $n > N_2$ будет выполняться неравенство

$$k_n > \frac{\ln(\omega+1)}{\ln\frac{\omega+2}{\omega+1}}. \tag{2.44}$$

Возьмем теперь в качестве n_2 какое-нибудь число, удовлетворяющее неравенствам $n_2 > N_1$ и $n_2 > N_2$. Тогда из неравенства (2.43) будет следовать неравенство

$$d\left(q, \lambda\left(t_{n_2}^{(2)}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.45}$$

Из неравенства (2.44) следует, что если число x определять из условия

$$\frac{\ln t_{n_2}^{(2)} - \ln t_{n_1}^{(1)}}{\ln(\omega+x)} = k_{n_2},$$

то для x будет справедливо соотношение $x \in [1,2]$.

Мы выбрали числа n_1 и n_2. Будем считать, что последовательность p_j построена с помощью этих чисел. Справедливы следующие свойства этой последовательности

1. $d(F_\tau p_0, p_1) \le d\left(F_\tau p, F_\tau\left(\lambda\left(t_{n_1}^{(1)}\right)\right)\right) + d\left(F_\tau\left(\lambda\left(t_{n_1}^{(1)}\right)\right), \lambda\left(\tau t_{n_1}^{(1)}\right)\right)$.

Теперь из неравенств (2.41) и (2.42) следует неравенство $d(F_\tau p_0, p_1) < \varepsilon$.

2. $d(F_\tau p_{k-1}, p_k) \le d\left(F_\tau\left(\lambda\left(\tau^{k-1} t_{n_1}^{(1)}\right)\right), \lambda\left(\tau^k t_{n_1}^{(1)}\right)\right) + d\left(\lambda\left(t_{n_2}^{(2)}\right), q\right)$.

Так как $\tau^{k-1} t_{n_1}^{(1)} > T$, то из неравенства (2.38) следует, что

$$d\left(F_\tau\left(\lambda\left(\tau^{k-1} t_{n_1}^{(1)}\right)\right), \lambda\left(\tau^k t_{n_1}^{(1)}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вместе с неравенством (2.45) это даёт, что $d(F_\tau p_{k-1}, p_k) < \varepsilon$.

3. Пусть $j \in \overline{1, k-2}$. Тогда

$$d(F_\tau p_j, p_{j+1}) = d\left(F_\tau\left(\lambda\left(\tau^j t_{n_1}^{(1)}\right)\right), \lambda\left(\tau^{j+1} t_{n_1}^{(1)}\right)\right).$$

Так как $\tau^j t_{n_1}^{(1)} > T$, то из неравенства (2.38) следует, что $d(F_\tau p_j, p_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Так как $\tau = \omega + x > \omega$, то последовательность $p_0,\ p_1, \ldots,\ p_k$ есть (ω, ε)-цепь, соединяющая точки p и q.

Таким образом динамическая система $F_t,\ t \in (0, \infty)$ есть цепная рекурентность на метрическом пространстве (M, d). Теорема доказана □

Из приведенного доказательства следует, что справедлива также и следующая теорема

Теорема 2.9. *Пусть M – компакт, лежащий в метрическом пространстве $\left(\mathcal{M}(\mathbb{R}^M),\ d\right)$, инвариантный относительно преобразования F_t и принадлежащий множеству $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. Пусть на множестве M существует кусочно непрерывная псевдотраектория $\lambda(t)$, плотная на бесконечности в множестве M. Тогда динамическая система $F_t,\ t \in (0, \infty)$ на метрическом пространстве (M, d) является цепной рекурентностью.*

В заключение раздела мы сформулируем три критерия того, чтобы множество M из пространства $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ представлялось в виде $M = Fr[\mu, \rho(r)]$.

Теорема 2.10. *Пусть* $\rho(r)$ *– уточнённый порядок. Пусть* M *– компакт в метрическом пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, *инвариантный относительно преобразования* F_t *и лежащий в множестве* $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$ *с некоторым* $\sigma > 0$. *Для того, чтобы существовала радонова мера* μ *в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, *являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *и такая, что* $M = Fr[\mu,\rho(r)]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность периодических мер* μ_n *порядка* ρ *из множества* $\mathcal{M}(\rho,\sigma_1)$ *с некоторым* σ_1 *такая, что в метрике Хаусдорфа* H *выполняется равенство*

$$M = H\lim_{n\to\infty} Fr[\mu_n,\rho(r)].$$

Теорема 2.11. *Пусть функция* $\rho(r)$ *и множество* M *удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Для того, чтобы существовала радонова мера* μ *в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, *являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *и такая, что* $M = Fr[\mu,\rho(r)]$, *необходимо и достаточно, чтобы динамическая система* $F_t,\ t\in(0,\infty)$ *на метрическом пространстве* (M,d) *была цепной рекурентностью.*

Теорема 2.12. *Пусть* $\rho(r)$ *и множество* M *удовлетворяют условиям теоремы 2.10. Для того, чтобы существовала радонова мера* μ *в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, *являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *и такая, что* $M = Fr[\mu,\rho(r)]$, *необходимо и достаточно, чтобы в множестве* M *существовала кусочно непрерывная псевдотраектория* $\lambda(t)$, *плотная на бесконечности во множестве* M.

Теорема 2.10 есть объединение теорем 2.4 и 2.5, теорема 2.11 есть объединение теорем 2.6 и 2.8, а теорема 2.12 есть объединение теорем 2.6, 2.7 и 2.9.

2.6. Выводы к разделу 2

Основными результатами данного раздела являются следующие:

1. Теорема 2.1, в которой доказаны основные свойства предельных множеств радоновых мер.
2. Теоремы 2.2, 2.3, в которых описана связь между регулярностью радоновой меры и существованием конусной плотности.
3. Теоремы 2.4, 2.5, в которых дано описание предельного множества радоновой меры как предел в метрике Хаусдорфа последовательности периодических мер.
4. Теоремы 2.10, 2.11, 2.12, в которых в терминах теории динамических систем указаны различные критерии того, чтобы заданное множество было предельным множеством для некоторой радоновой меры.

РАЗДЕЛ 3

ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В данном разделе изучаются условия, при которых из сходимости последовательности $v_n(x)$ как последовательности обобщённых функций следует ее сходимость в пространствах Лебега $L_p(\gamma)$. Наиболее близкие к нашим результатам были получены ранее в работах Хёрмандера [34], а также Гришина и Шуиги [11]. В работе Хёрмандера исследовался случай, когда γ – некоторое ограничение m-мерной меры Лебега, а в работе Гришина и Шуиги рассматривался случай $m = 2$. В нашей работе рассматривается случай $m > 2$ и общей меры γ.

В этом разделе мы также предлагаем усиление варианта Азарина [27] теоремы о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка. Далее, мы строим теорию предельных множеств, созданной Азариным [1], [2], [6], [27] для субгармонических функций, для более широкого класса δ-субгармонических функций и также изучаем их свойства.

В конец раздела мы отвечаем на вопрос: "Какой должен быть уточнённый порядок $\rho(r)$, чтобы он был уточнённым порядком целой трансцендентной функции? ". Мы обсуждаем решение, полученное раньше в случае $\rho > 0$ и предлагаем наше решение в случае $\rho = 0$.

В подразделе 3.1 мы рассматриваем некоторые свойства функции $\|x - y\|^{2-m}, \ m > 2$. В подразделе 3.2 мы исследуем связи сходимости последовательности субгармонических и δ-субгармонических функций в смысле теории обобщённых функций с другими видами сходимости. Подраздел 3.3 посвящён теоремам о представлении δ-субгармонических функций. В подразделе 3.4 мы изучаем некоторые свойства предельных множеств для δ-субгармонических функций. В подразделе 3.5 обсуждаем вопрос о существовании целых функций с заданным уточнённым порядком.

Результаты третьего раздела опубликованы в [9], [12], [13], [21], [22], [23], [36].

3.1. Некоторые свойства функции $\|x-y\|^{2-m}$

В теории субгармонических в пространстве $\mathbb{R}^m,\ m>2$ функций важную роль играет ядро

$$h_m(x-y)=\|x-y\|^{2-m}.$$

Перечислим теперь необходимые нам свойства ядра $h_m(x-y)$. Справедливо следующее утверждение

Предложение 3.1. Пусть $a(x)$ – непрерывная финитная функция в $\mathbb{R}^m$ и пусть

$$b(y)=\int a(x)h_m(x-y)dx.$$

Тогда $b(y)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Заметим, что замена переменных $\tilde{x}=x-y$ в интеграле даёт равенство

$$b(y)=\int a(\tilde{x}+y)h_m(\tilde{x})d\tilde{x}.$$

Пусть $\delta>0$ – произвольное число. Будем считать, что выполняется неравенство $\|y_1-y_0\|\le\delta$. Имеем

$$\begin{aligned}|b(y_1)-b(y_0)| &\le \int |a(x+y_1)-a(x+y_0)|h_m(x)dx\\ &\le M\sup|a(x+y_1)-a(x+y_0)|.\end{aligned}$$

Из этого неравенства легко следует утверждение предложения. □

Предложение 3.2. Пусть $p \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Пусть γ – положительная конечная борелевская мера такая, что

$$\sup \left\{ \int\limits_{B(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) : y \in \mathbb{R}^m \right\} \to 0 \quad (\delta \to 0). \tag{3.1}$$

Тогда функция $F(y) = \left(\int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}$ является равномерно непрерывной в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. 1. Обозначим

$$\psi(y_1, y_2) = \left(\int |h_m(x-y_1) - h_m(x-y_2)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как ядро $h_m(x-y)$ как функция из $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$ не ограничена, то нужно доказать сходимость введенных интегралов. Из неравенства Минковского следует, что

$$F(y) \leq \left(\int\limits_{B(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{CB(y,\delta)} |h_m(x-y)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} = J_1 + J_2,$$

где $CB(y,\delta) = \mathbb{R}^m \setminus B(y,\delta)$. При $x \in CB(y,\delta)$ выполняется неравенство

$$|h_m(x-y)| \leq \delta^{2-m}.$$

Из этого неравенства следует, что $J_2 \leq \delta^{2-m}(\gamma(\mathbb{R}^m))^{\frac{1}{p}}$. По условию теоремы $J_1 \leq 1$ при достаточно малых δ. Отсюда получаем конечность $F(y)$. Доказанное можно формулировать и так: при любом $y \in \mathbb{R}^m$ ядро $h_m(x-y)$ есть элемент пространства $L_p(\gamma)$. Из неравенства $\psi(y_1, y_2) \leq F(y_1) + F(y_2)$ следует конечность $\psi(y_1, y_2)$.

2. Докажем, что при $\|x-y\| \geq \delta$, выполняется неравенство

$$\| \nabla_y h_m(x-y) \| \leq \frac{m-2}{\delta^{m-1}}. \tag{3.2}$$

Имеем

$$(h_m(x-y))'_{y_i} = (m-2) \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^m} \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Из этой формулы легко получается неравенство (3.2).

3. Теперь докажем, что выполняется соотношение

$$\psi(y,y_0)\to 0 \quad (y\to y_0).$$

Пусть $\delta>0$ – произвольное число. Будем считать, что выполняется неравенство $\|y-y_0\|\le\delta$. Последовательное применение неравенства Минковского и включения $B(y_0,2\delta)\subset B(y,3\delta)$ даёт

$$\begin{aligned}\psi(y,y_0)\le&\left(\int\limits_{CB(y_0,2\delta)}|h_m(x-y)-h_m(x-y_0)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\&+\left(\int\limits_{B(y_0,2\delta)}|h_m(x-y_0)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{B(y,3\delta)}|h_m(x-y)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\&=J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

Если $x\notin B(y_0,2\delta),\|y-y_0\|\le\delta$, то для любого $w\in B(y_0,\|y-y_0\|)$ будут выполняться неравенства $\|x-w\|\ge\delta,\|\nabla_y h_m(x-w)\|\le\frac{m-2}{\delta^{m-1}}$. Из оценки градиента следует, что

$$|h_m(x,y)-h_m(x,y_0)|\le\frac{m-2}{\delta^{m-1}}\|y-y_0\|,\quad J_1\le\frac{m-2}{\delta^{m-1}}\left(\gamma(\mathbb{R}^m)\right)^{\frac{1}{p}}\|y-y_0\|.$$

Из условий теоремы получаем, что $J_2\rightrightarrows 0, J_3\rightrightarrows 0 \quad (\delta\to 0)$, что доказывает требуемое утверждение.

4. Предположим, что утверждение предложения неверно. Тогда существуют число $\eta>0$, последовательности y_{2n},y_{1n} такие, что $y_{2n}-y_{1n}\to 0$ $(n\to\infty),\psi(y_{2n},y_{1n})\ge\eta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $y_{1n}\to y_0\in\mathbb{R}^m\cup\{\infty\}$ $(n\to\infty)$.

Так как мера γ конечна, то существует число R такое, что

$\gamma(CB(0,R)) < \varepsilon$. Имеем

$$F(y_{1n}) \leq \left(\int\limits_{B(0,R)} |h_m(x - y_{1n}|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int\limits_{B(y_{1n},\delta)} |h_m(x - y_{1n}|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{E} |h_m(x - y_{1n}|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3,$$

где $E = CB(0,R) \setminus B(y_{1n},\delta)$. При $x \in E$ выполняется неравенство

$$h_m(x - y_{1n}) \leq \delta^{2-m}.$$

Из этого неравенства следует, что $J_3 \leq \delta^{(2-m)p}\gamma(CB(0,R)) < \delta^{(2-m)p}\varepsilon$. По условию теоремы $J_2 < \varepsilon$. Отсюда получаем, что $F(y_{1n}) \to 0$, если $y_{1n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Аналогично $F(y_{2n}) \to 0$ $(y_{2n} \to \infty$ $(n \to \infty))$. Из неравенства $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \leq F(y_{1n}) + F(y_{2n})$ следует, что $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \to 0$, при условиях $y_{2n} - y_{1n} \to 0,$ $y_{1n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Это противоречит принятому предположению $\psi(y_{2n}, y_{1n}) \geq \eta$ и , тем самым, $y_0 \neq \infty$.

Из неравенства Минковского следует, что

$$\psi(y_{2n}, y_{1n}) \leq \psi(y_{2n}, y_0) + \psi(y_{1n}, y_0).$$

Набор полученных нами утверждений в совокупности противоречив. Тем самым предложение доказано. □

Далее приведем примеры конкретных мер γ, для которых справедливы условие (3.1).

Пример 3.1. Пусть λ – мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Мы будем использовать стандартное обозначение $d\lambda = dx$. Рассматриваем интеграл, входящий в условие (3.1) и, сделав параллельный перенос, получаем равенство:

$$J_1 = \int\limits_{B(y,\delta)} \|x - y\|^{p(2-m)} dx = \int\limits_{B(0,\delta)} \|x\|^{p(2-m)} dx.$$

Введём полярные координаты:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ \qquad\qquad \ldots, \\ x_{m-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1}, \\ x_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Получаем равенство

$$\int\limits_{B(0,\delta)} \|x\|^{p(2-m)}dx = \sigma_{m-1}\int\limits_0^\delta r^{(m-1)+p(2-m)}dr,$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Из этого следует, что при $p \in [1, \frac{m}{m-2})$ интеграл J_1 стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$.

Пример 3.2. Пусть γ – ограничение $(m-1)$-мерной меры Хаусдорфа на сферу $S(0,R) = \{x : \|x\| = R\}$. Имеем

$$J_2 = J_2(y,\delta) = \int\limits_{B(y,\delta)} \|x-y\|^{p(2-m)}d\gamma(x) = \int\limits_{B(y,\delta)\cap S(0,R)} \|x-y\|^{p(2-m)}dS(x).$$

Обозначим $R_1 = \|y\|, y_0 = (R_1, 0, ..., 0), \tilde{x} = (x_2, ..., x_m), \sigma = B(y_0,\delta) \cap S(0,R)$. Функция $J_2(y,\delta)$ является радиально симметричной функцией по переменной y. Поэтому

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_\sigma \|x-y_0\|^{p(2-m)}dS(x) \\ &= \int\limits_\sigma \frac{1}{((x_1-R_1)^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{\frac{p(m-2)}{2}}}dS(x) \le \int\limits_\sigma \frac{dS(x)}{\|\tilde{x}\|^{p(m-2)}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Если $|R_1 - R| \ge \delta$, то $J_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $R_1 \in (R-\delta, R+\delta)$. Введём на сфере $S(0,R)$ полярные координаты (3.3) с $r = R$. Выполняется равенство

$$dS(x) = R^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1 ... \sin\varphi_{m-2}d\varphi_1 ... d\varphi_{m-1}. \tag{3.5}$$

Кроме того

$$\|\tilde{x}\|^2 = R^2 - x_1^2 = R^2 - R^2\cos^2\varphi_1 = R^2\sin^2\varphi_1. \tag{3.6}$$

Если $x \in \sigma$, то выполняются неравенства $R - 2\delta < R_1 - \delta \leq x_1 \leq R$. Поэтому

$$R - 2\delta \leq R\cos\varphi_1 \leq R, \quad \left(\frac{R-2\delta}{R}\right)^2 \leq \cos^2\varphi_1 \leq 1,$$

$$0 \leq \sin^2\varphi_1 \leq \frac{4\delta(R-\delta)}{R^2} \leq \frac{4\delta}{R}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \arcsin 2\sqrt{\frac{\delta}{R}}. \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.4) – (3.7) следует неравенство

$$J_2 \leq 2R^{m-1-p(m-2)}\pi^{m-1} \int\limits_0^{\arcsin 2\sqrt{\frac{\delta}{R}}} \frac{\sin^{m-2}\varphi_1}{\sin^{p(m-2)}\varphi_1} d\varphi_1.$$

Из этого неравенства, в свою очередь, следует, что при $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$ величина $J_2(y,\delta)$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$ стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Пример 3.3. Пусть γ – ограничение $(m-1)$-мерной меры Хаусдорфа на гиперплоскость $L = \{x : \ x_m = 0\}$. Рассматриваем следующую величину

$$J_3 = J_3(y,\delta) = \int\limits_{B(y,\delta)} \|x-y\|^{p(2-m)} d\gamma(x) = \int\limits_{B(y,\delta)\cap L} \|x-y\|^{p(2-m)} dS(x).$$

Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Заметим, что если $|y_m| \geq \delta$, то $J_3 = 0$. Поэтому мы будем считать, что $y_m \in (-\delta, \delta)$. Имеем

$$J_3 = \int\limits_{B(y,\delta)\cap L} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1}(x_i - y_i)^2 + y_m^2\right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x),$$

$$J_3 \leq \int\limits_{B(y,\delta)\cap L} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} dS(x). \tag{3.8}$$

Введём на L новые координаты $x = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{m-1}, 0)$. Тогда

$$dS(x) = d\tilde{x}_1 \ldots d\tilde{x}_{m-1}. \tag{3.9}$$

Более того имеем

$$\begin{gathered}B(y,\delta) \cap L = \left\{ (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{m-1}, 0) : \sum_{i=1}^{m-1} (\tilde{x}_i - y_i)^2 \le \delta^2 - y_m^2 \right\} \\ \subset \left\{ (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{m-1}, 0) : \sum_{i=1}^{m-1} (\tilde{x}_i - y_i)^2 \le \delta^2 \right\} = B^{m-1}(y,\delta).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.8) – (3.10) следует неравенство

$$J_3 \le \int\limits_{B^{m-1}(y,\delta)} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} (\tilde{x}_i - y_i)^2 \right)^{\frac{p(m-2)}{2}}} d\tilde{x}_1 \ldots d\tilde{x}_{m-1}.$$

Заметим, что последний интеграл можно рассмотреть, как и в примере 3.1, но теперь в случае пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Отсюда следует, что при $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$ величина $J_3(y,\delta)$ стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^m$.

3.2. Сходимости последовательностей δ-субгармонических функций в $\mathbb{R}^m$

Обычно δ-субгармонической функцией называют функцию представимую в виде разности субгармонических функций. Однако, такое определение нуждается в корректировке. Скорректированное определение δ-субгармонической функции приведено в [9].

Функция w в области $G \subset \mathbb{R}^m$ называется δ-субгармонической, если выполняются следующие три условия.

1. Существует множество F ёмкости ноль такое, что на множестве $G \setminus F$ справедливо представление

$$\mathrm{w}(x) = \upsilon_1(x) - \upsilon_2(x),$$

где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ – субгармонические функции в области G.

С помощью этого представления определяется риссовская мера μ функции w по формуле $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – риссовские меры функций v_1 и v_2.

Определяющее множество H функции w – это множество таких точек $x \in G$, для которых найдётся $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\int\limits_0^\delta \frac{|\mu|(B(x,t))}{t^{m-1}} dt < \infty.$$

2. Для любой точки $x \in H$ выполняется равенство

$$\mathrm{w}(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sigma_{m-1}\delta^{m-1}} \int\limits_{S(0,\delta)} \mathrm{w}(x+y) d\sigma_{m-1}(y), \qquad (3.11)$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$, $d\sigma_{m-1}$ – это мера Лебега на сфере.

3. $\mathrm{w}(x) = 0$ для $x \in G \setminus H$.

Предложение 3.3. *Пусть* $\mathrm{w}(x)$– δ*-субгармоническая функция в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. *Тогда в области* G *существуют субгармонические функции* $v_1(x)$ *и* $v_2(x)$ *с взаимно сингулярными риссовскими мерами такие, что функции* $\mathrm{w}(x)$ *и* $v_1(x) - v_2(x)$ *совпадают почти всюду в* G.

Доказательство. Пусть μ – риссовская мера функции w. Имеем $\mu = \mu_+ - \mu_-$. В области G существует субгармоническая функция v_3 с риссовской мерой μ_+ и существует субгармоническая функция v_4 с риссовской мерой μ_-. Обозначим $\mathrm{w}_1(x) = v_3(x) - v_4(x)$. Для локально интегрируемой в G функции $\mathrm{w}_2(x) = \mathrm{w}(x) - \mathrm{w}_1(x)$ выполняется равенство $\triangle \mathrm{w}_2 = 0$. Поэтому функция w_2 является гармонической. Имеем $\mathrm{w}(x) = \mathrm{w}_1(x) + \mathrm{w}_2(x)$. В качестве $v_1(x)$ можно взять функцию $v_3(x) + \mathrm{w}_2(x)$, а в качестве $v_2(x)$ – функцию $v_4(x)$. Предложение доказано. □

Заметим, что теоремы 1.14 – 1.17 справедливы для δ-субгармонических функций. Равенства (1.7), (1.8), (1.11), (1.12) также справедливы для δ-субгармонических функций.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 3.4. *Пусть последовательность борелевских мер μ_n на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, рассматриваемая как последовательность элементов пространства $C^*(K)$, слабо сходится к нулю. Пусть M – компактное множество в $C(K)$. Тогда*

$$\sup\{|(\mu_n, \varphi)| : \varphi \in M\} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Из слабой сходимости и принципа равномерной ограниченности следует, что существует число a_1 такое, что для всех n выполняется неравенство $|\mu_n|(K) \le a_1$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, а $\varphi_1, ..., \varphi_N$ – ε-сеть в M. Поскольку μ_n слабо сходится к нулю, то существует N_1 такое, что при $n > N_1$ будут выполняться неравенства $|(\mu_n, \varphi_k)| < \varepsilon, k = 1, ..., N$. Пусть φ – произвольный элемент из M. Существует k такое, что $\|\varphi - \varphi_k\| \le \varepsilon$. Тогда при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|(\mu_n, \varphi)| \le |(\mu_n, \varphi_k)| + a_1\|\varphi - \varphi_k\| \le (1 + a_1)\varepsilon.$$

Из этого неравенства следует утверждение предложения. □

Предложение 3.5. (частный случай теоремы 4.4.2, [33]) *Пусть последовательность гармонических функций $u_n(x)$ в области $G \subset \mathbb{R}^m$, рассматриваемая как последовательность обобщённых функций, сходится к обобщённой функции u. Тогда u – регулярная обобщённая функция, представимая некоторой гармонической функцией $u(x)$ в области G. Кроме того, на любом компакте K в области G последовательность $u_n(x)$ равномерно сходится к $u(x)$.*

Сформулируем и докажем основные результаты этого подраздела.

Теорема 3.1. *Пусть* $\upsilon_n(x)$ *– последовательность субгармонических функций в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, *которая сходится как последовательность обобщённых функций к обобщённой функции* w. *Тогда*

1) обобщённая функция w является регулярной обобщённой функцией, которая представляется субгармонической функцией w *в области* G*;*

2) если μ *– риссовская мера функции* w, *а* μ_n *– риссовская мера функции* υ_n, *то* $\mu = \lim \mu_n$ $(n \to \infty)$*;*

3) справедлив принцип повышения: если $x_n \to x \in G$ $(n \to \infty)$, *то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \upsilon_n(x_n) \leq \mathrm{w}(x);$$

4) множество точек $x \in G$, *для которых выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \upsilon_n(x) < \mathrm{w}(x),$$

имеет ёмкость нуль;

5) для любой точки $x \in G$ *выполняется равенство*

$$\left(\varlimsup_{n\to\infty} \upsilon_n(x)\right)^* = \mathrm{w}(x),$$

где $u^*(x) = \varlimsup_{y\to x} u(y)$;

6) если β *– финитная борелевская мера в* G *такая, что функция* $b(y) = \int h_m(x-y)d\beta(x)$ *непрерывна, а функция* $\int h_m(x-y)d|\beta|(x)$ *локально ограничена, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int \upsilon_n(x)d\beta(x) = \int \mathrm{w}(x)d\beta(x);$$

7) пусть $p \geq 1$, *если* γ *– положительная конечная финитная борелевская мера в* G *такая, что функция* $F(y) = \left(\int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ *является равномерно непрерывной, то*

$$\int |\upsilon_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p d\gamma(x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Замечание. Наиболее близкие к нашим результатам были получены ранее в работах Хёрмандера [34], а также Гришина и Шуиги [11]. В работе

Хёрмандера исследовался случай, когда γ – некоторое ограничение m-мерной меры Лебега, а в работе Гришина и Шуиги рассматривался случай $m = 2$. В нашей работе рассматривается случай $m > 2$ и общей меры γ.

Доказательство. Пусть μ_n – риссовская мера v_n. Функция v_n и её риссовская мера μ_n связаны соотношением

$$\mu_n = \frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}} \triangle v_n, \tag{3.12}$$

где σ_{m-1} – площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Так как операция дифференцирования непрерывна в $\mathscr{D}'(G)$, то последовательность μ_n является $\mathcal{T}$-сходящейся. Из теоремы 1.7 следует, что μ_n есть широкая сходящаяся последовательность. Пусть

$$\mu = \mathcal{T} \lim \mu_n \quad (n \to \infty).$$

Пусть G_1 – область компактно вложенная в G. Это означает, что множество $K = \overline{G_1}$ является компактом и что $K \subset G$. Пусть, кроме того, $\mu(\partial G_1) = 0$. Так как $\partial K \subset \partial G_1$, то $\mu(\partial K) = 0$. Тогда из теоремы 1.11 следует, что

$$\mu_K = \mathrm{w} \lim_{n \to \infty} (\mu_n)_K, \tag{3.13}$$

где индекс K означает, что берётся ограничение соответствующей меры на компакт K. Теорема Рисса о представлении даёт равенство

$$v_n(x) = -\int\limits_K h_m(x-y) d(\mu_n)_K(y) + u_n(x), \tag{3.14}$$

где $u_n(x)$ – гармоническая функция во внутренности $\overset{\circ}{K}$ и тем более в G_1. Пусть $a(x)$ – финитная в области G_1 бесконечно дифференцируемая функция. Умножим равенство (3.14) на $a(x)$ и проинтегрируем его. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int v_n(x)a(x)dx = \int b_1(y) d(\mu_n)_K(y) + \int u_n(x)a(x)dx, \tag{3.15}$$

где

$$b_1(y) = -\int h_m(x-y)a(x)dx.$$

По предложению 3.1 функция $b_1(y)$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$ и, в частности, на компакте K. Теперь из (3.13) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int b_1(y)d(\mu_n)_K(y) = \int b_1(y)d\mu_K(y).$$

По условию теоремы

$$\lim_{n\to\infty}\int v_n(x)a(x)dx = (\mathrm{w}, a(x)).$$

Тем самым доказано, что для любой функции $a(x)$ из $\mathscr{D}(G_1)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int u_n(x)a(x)dx.$$

По предложению 3.5 существует гармоническая в области G_1 функция $u(x)$ такая, что последовательность $u_n(x)$ равномерно сходится к $u(x)$ на любом компакте, лежащем в G_1.

Переходя к пределу в равенстве (3.15), получаем

$$\begin{aligned}(\mathrm{w}, a(x)) &= \int b_1(y)d\mu_K(y) + \int u(x)a(x)dx \\ &= \int\limits_{\overset{\circ}{K}} \left(-\int h_m(x-y)d\mu_K(y) + u(x)\right) a(x)dx \\ &= \int\limits_{\overset{\circ}{K}} \left(-\int\limits_K h_m(x-y)d\mu(y) + u(x)\right) a(x)dx.\end{aligned}$$

В качестве G_1 можно брать любую компактно вложенную в G область такую, что мера μ не нагружает её границу. Из этого следует, что $\mathrm{w}(x)$ есть регулярная обобщённая функция, которая представляется субгармонической функцией в области G. Утверждение 1) теоремы доказано.

Пусть μ – риссовская мера функции $\mathrm{w}(x)$, $\varphi(x)$ – функция из пространства $\mathscr{D}(G)$. Тогда

$$(\mu, \varphi) = \frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}}(\triangle \mathrm{w}, \varphi) = \frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}}\lim_{n\to\infty}(\triangle v_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty}(\mu_n, \varphi).$$

Из этого и теоремы 1.9 следует утверждение 2) теоремы.

Утверждения 3) – 5) теоремы следуют из хорошо известных фактов теории потенциала. Так, утверждение 3) есть следствие теоремы 1.3 из [17]. Утверждение 4) есть следствие теоремы 3.8 из [17], утверждение 5) следует из замечания 2 к теореме 3.8 из [17].

Докажем утверждение 6). По условию мера β финитна в области G. Поэтому существует компакт $K_1 \subset G$ такой, что $\operatorname{supp}\beta \subset K_1$. Пусть в равенстве (3.14) компакт $K = \overline{G}_1$ таков, что $K_1 \subset G_1$. Интегрируя равенство (3.14) по мере β, получаем

$$\int \upsilon_n(x)d\beta(x) = \int b(y)d(\mu_n)_K(y) + \int u_n(x)d\beta(x),$$

где

$$b(y) = -\int h_m(x-y)d\beta(x).$$

Произведенное изменение порядка интегрирования законно, потому что $h_m(x-y) \in L_1(|\beta| \times (\mu_n)_K)$. Так как $b(x)$ – непрерывная функция, то

$$\lim_{n\to\infty} \int \upsilon_n(x)d\beta(x) = \int b(y)d\mu_K(y) + \int u(x)d\beta(x)$$

$$= \int \left(-\int\limits_K h_m(x-y)d\mu_K(y) + u(x) \right) d\beta(x) = \int \mathrm{w}(x)d\beta(x).$$

Утверждение 6) доказано.

Докажем теперь утверждение 7). Пусть

$$J_n = \left(\int |\upsilon_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p d\gamma(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

и пусть n_k – такая последовательность, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} J_n = \lim_{k\to\infty} J_{n_k}.$$

Пусть G_1 – область, компактно вложенная в G такова, что $\operatorname{supp}\gamma \subset G_1$

и что $\mu(\partial G_1) = 0$. Тогда, применяя неравенство Минковского, получаем

$$J_{n_k} \le \left(\int \left|\int h_m(x-y)d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y)\right|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left(\int |u_{n_k}(x)-u(x)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} = J_{1k} + J_{2k},$$

где $K = \overline{G}_1$. Очевидно, что $J_{2k} \to 0 \ \ (k \to \infty)$. Пусть $p > 1$. Для J_{1k} справедлива формула

$$J_{1k} = \sup_{\|s\|_q \le 1} \left|\int s(x) \int h_m(x-y)d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y)d\gamma(x)\right|, \qquad (3.16)$$

где q определяется из равенства $1/p + 1/q = 1$, а норма функции s вычисляется в пространстве $L_q(\gamma)$. Имеем

$$\int \left(\int |s(x)| h_m(x-y)d\gamma(x)\right) d(\mu_{n_k})_K(y)$$
$$\le \int \left(\int h_m^p(x-y)d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} d(\mu_{n_k})_K(y).$$

Из условия 7) теоремы следует, что функция $\left(\int h_m^p(x-y)d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ непрерывна по y и поэтому ограничена на компакте K. Поэтому

$$\int \left(\int |s(x)| h_m(x-y)d\gamma(x)\right) d(\mu_{n_k})_K(y) \le M_1 \mu_{n_k}(K).$$

Аналогично

$$\int \left(\int |s(x)| h_m(x-y)d\gamma(x)\right) d(\mu)_K(y) \le M_1 \mu(K).$$

Теперь из теорем Тонелли (обратная теорема Фубини) [14] и Фубини [14] следует, что в интеграле из (3.16) возможна перестановка порядка интегрирования. Поэтому

$$J_{1k} = \sup_{\|s\|_q \le 1} \left|\int \left(\int s(x) h_m(x-y)d\gamma(x)\right) d((\mu_{n_k})_K - \mu_K)(y)\right|,$$

При $y \in K$ справедлива оценка

$$\left|\int s(x)h_m(x-y)d\gamma(x)\right| \le \left(\int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}} \le M_1.$$

Заметим, что последовательность $\mu_{n_k}(K)$ ограничена. Тем самым доказано, что семейство функций

$$F_s(y) = \int s(x)h_m(x-y)d\gamma(x), \quad \|s\|_q \leq 1,$$

равномерно ограничено. Неравенство Гёльдера дает

$$|F_s(y_2) - F_s(y_1)| \leq \left(\int |h_m(x-y_2) - h_m(x-y_1)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь из пункта 7) теоремы следует, что семейство функций $F_s(y)$ равностепенно непрерывно. По теореме Арцела (см. например [14]) семейство $F_s(y)$ компактно. Далее предложение 3.4 дает $J_{1k} \to 0 \ (k \to \infty)$.

Мы рассмотрели случай $p > 1$. Пусть теперь $p = 1$. Тогда

$$J_{1k} = \int \left(\int s_k(x)h_m(x-y)d\gamma(x)\right) d\left((\mu_{n_k})_K - \mu_K\right)(y),$$

где

$$s_k(x) = \mathrm{sign} \int h_m(x-y)d\left((\mu_{n_k})_K - \mu_K\right)(y).$$

Последовательность

$$F_k(y) = \int s_k(x)h_m(x-y)d\gamma(x)$$

является компактной в $C(K)$. Так же как и ранее, получаем, что $J_{1k} \to 0$ $(k \to \infty)$. Поэтому $J_n \to 0 \ (n \to \infty)$. Утверждение 7) и, следовательно, вся теорема доказаны. □

Как мы увидим ниже незначительным изменением рассуждений можно доказать аналог теоремы 3.1 для δ-субгармонических функций.

Теорема 3.2. *Пусть* $v_n(x)$ *– последовательность* δ*-субгармонических функций в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, *которая сходится как последовательность обобщённых функций к обобщённой функции* w, *причём последовательность риссовских мер* μ_n *функций* v_n *слабо ограничена. Тогда*

1) обобщённая функция w *является регулярной обобщённой функцией, которая представляется* δ*-субгармонической функцией* $\mathrm{w}(x)$ *в области* G*;*

2) если μ *– риссовская мера функции* w*, то* $\mu = \lim \mu_n \quad (n \to \infty)$*;*

3) если β *– финитная борелевская мера в* G *такая, что функция* $b(y) = \int h_m(x-y)d\beta(x)$ *непрерывна, а функция* $\int h_m(x-y)d|\beta|(x)$ *локально ограничена, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int \upsilon_n(x)d\beta(x) = \int \mathrm{w}(x)d\beta(x);$$

4) пусть $p \geq 1$*, если* γ *– положительная конечная финитная борелевская мера в* G *такая, что функция* $F(y) = \left(\int |h_m(x-y)|^p d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ *является равномерно непрерывной, то*

$$\int |\upsilon_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p d\gamma(x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Так как последовательности $\mu_n, \ (\mu_n)_+, \ (\mu_n)_-, \quad |\mu_n|$ являются компактными, то без ограничения общности при доказательстве утверждения 1) их можно считать широко сходящимися. Пусть

$$\mu = \lim \mu_n, \quad \bar{\mu} = \lim |\mu_n| \quad (n \to \infty).$$

Теперь для доказательства утверждения 1) повторяется процесс доказательства утверждения 1) теоремы 3.1 с единственным изменением: условие $\mu(\partial G_1) = 0$ нужно заменить на условие $\overline{\mu}(\partial G_1) = 0$.

Доказательства остальных утверждений теоремы повторяют доказательства соответствующих утверждений теоремы 3.1.

Отметим, что в теореме 3.2 нет аналогов утверждений 3) – 5) теоремы 3.1. В теореме 3.1 эти утверждения доказываются с использованием таких свойств субгармонических функций, которых нет у δ-субгармонических функций. □

Из теорем 3.1, 3.2 и примеров 3.1 – 3.3 получаются следующие следствия.

Следствие 3.1. *Пусть последовательность* υ_n δ*- субгармонических функций в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, *сходится как последовательность обобщённых функций к обобщённой функции* w. *Пусть последовательность* μ_n *риссовских мер функций* υ_n *слабо ограничена. Тогда для любой области* G_1, *компактно вложенной в* G, *и любого* $p \in [1, \frac{m}{m-2})$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_1} |\upsilon_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p dx = 0.$$

В частном случае, когда υ_n – субгармонические функции, это следствие совпадает с результатом Хёрмандера из [34].

Следствие 3.2. *Пусть последовательность* υ_n δ*- субгармонических функций в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, *сходится как последовательность обобщённых функций к обобщённой функции* w. *Пусть последовательность* μ_n *риссовских мер функций* υ_n *слабо ограничена. Тогда если сфера* $S(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| = r\}$ *лежит в области* G *и* $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$, *то выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{S(x_0,r)} |\upsilon_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p ds = 0.$$

Следствие 3.3. *Пусть последовательность* υ_n δ*- субгармонических функций в области* $G \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, *сходится как последовательность обобщённых функций к обобщённой функции* w. *Пусть последовательность* μ_n *риссовских мер функций* υ_n *слабо ограничена. Тогда если* σ *– компакт, лежащий в* $(m-1)$*-мерной плоскости и содержащийся в* G, *и* $p \in [1, \frac{m-1}{m-2})$, *то выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\sigma} |\upsilon_n(x) - \mathrm{w}(x)|^p ds = 0.$$

В следствиях 3.1 и 3.3 написанные интегралы – это поверхностные интегралы первого рода.

3.3. Теоремы о представлении δ-субгармонических функций

При изучении субгармонических и δ-субгармонических функций в пространстве $\mathbb{C}$ используются неванлинновские характеристические функции. Такие функции мы определим для специального класса $\delta S^{(0)}$ δ-субгармонических функций. Этот класс состоит из δ-субгармонических функций $\mathrm{w}(z)$ в пространстве $\mathbb{C}$ таких, что ноль входит в определяющее множество функции w и выполняется равенство $\mathrm{w}(0) = 0$.

Неванлинновские функции приближения определяются равенствами.

$$m(r, \infty, \mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}_+(re^{i\varphi})d\varphi,$$

$$m(r, 0, \mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}_-(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Неванлинновские считающие функции определяются равенствами.

$$N(r, \infty, \mathrm{w}) = \int\limits_0^r \frac{\mu_-(t)}{t}dt,$$

$$N(r, 0, \mathrm{w}) = \int\limits_0^r \frac{\mu_+(t)}{t}dt.$$

Функция $T(r, \mathrm{w}) = m(r, \infty, \mathrm{w}) + N(r, \infty, \mathrm{w})$ называется неванлинновской характеристикой δ-субгармонической функции w.

Формулу (1.7) для функции w можно переписать в виде

$$T(r, \mathrm{w}) = m(r, 0, \mathrm{w}) + N(r, 0, \mathrm{w}) \text{ или } T(r, \mathrm{w}) = T(r, -\mathrm{w}). \qquad (3.17)$$

Важно, что мы рассматриваем не произвольные δ-субгармонические функции в плоскости, а функции из класса $\delta S^{(0)}$.

Пусть w_1 и w_2 – δ-субгармонические функции из класса $\delta S^{(0)}$ и μ_1, μ_2 – их риссовские меры. Тогда риссовской мерой функции $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2$ будет $\mu_1 + \mu_2$. Имеем $\mu_1 = (\mu_1)_+ - (\mu_1)_-$, $\mu_2 = (\mu_2)_+ - (\mu_2)_-$, $\mu_1 + \mu_2 =$

$((\mu_1)_+ + (\mu_2)_+) - ((\mu_1)_- + (\mu_2)_-)$. Отсюда следуют неравенства $(\mu_1+\mu_2)_- \le (\mu_1)_- + (\mu_2)_-$, $N(r,\infty,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2) \le N(r,\infty,\mathrm{w}_1) + N(r,\infty,\mathrm{w}_2)$. Кроме того выполняется неравенство $m(r,\infty,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2) \le m(r,\infty,\mathrm{w}_1) + m(r,\infty,\mathrm{w}_2)$. Мы получаем неравенство

$$T(r,\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2) \le T(r,\mathrm{w}_1) + T(r,\mathrm{w}_2).$$

Предложение 3.6. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция в плоскости* $\mathbb{C}$ *из класса* $\delta S^{(0)}$. *Пусть* $\mathrm{w}(z) = v_1(z) - v_2(z)$, *где* $v_1(z)$ *и* $v_2(z)$ *– субгармонические функции в пространстве* $\mathbb{C}$ *с взаимно сингулярными риссовскими мерами, причём* $v_1(0) = v_2(0) = 0$. *Тогда выполняется равенство*

$$T(r,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(v_1(re^{i\varphi}), v_2(re^{i\varphi}))d\varphi.$$

Доказательство. Выполняется равенство

$$\mathrm{w}_+(z) = \max(v_1(z), v_2(z)) - v_2(z).$$

Из него следует равенство

$$m(r,\infty,\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(v_1(re^{i\varphi}), v_2(re^{i\varphi}))d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_2(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Из равенства (1.7) для функции $v_2(z)$ следует, что последний интеграл равен $N(r,\infty,\mathrm{w})$. Тем самым предложение доказано. □

Заметим, что из предложения 3.6 и равенства (1.7) следует, что $T(r,\mathrm{w})$ является возрастающей функцией.

Величина

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,\mathrm{w})}{\ln r}$$

называется порядком функции $T(r,\mathrm{w})$, а также порядком δ-субгармонической функции из класса $\delta S^{(0)}$.

Если w – произвольная δ-субгармоническая функция в с риссовской мерой μ, то образуем функции

$$\mathrm{w}_1(z) = \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta|d\mu(\zeta) + c,\ \mathrm{w}_2(z) = \mathrm{w}(z) - \mathrm{w}_1(z),$$

где число c выбирается из условия $\mathrm{w}_2(0) = 0$. Функция w_2 принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Порядком функции w называется порядок функции w_2.

Условием $\rho < \infty$ выделяется важный класс δ-субгармонических функций конечного порядка.

Нам будет нужна следующая простая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть*

$$b(r,x) = \sum_{|\alpha|\le n} c_\alpha(r) x^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ *– мультииндекс порядка* m. *Пусть существует поточечный предел* $\lim\limits_{r\to\infty} b(r,x)$. *Тогда для любого мультииндекса* α *существует предел*

$$c_\alpha = \lim_{r\to\infty} c_\alpha(r)$$

и выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} b(r,x) = \sum_{|\alpha|\le n} c_\alpha x^\alpha.$$

Доказательство. Мы будем применять операторы взятия разности с шагом 1: $\triangle\, f(t) = f(t+1) - f(t)$. Через $\triangle\,(\alpha) = \triangle\,(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ мы будем обозначать такой оператор, что по переменной x_k он применяется α_k раз, $k \in \overline{1,m}$. Имеем

$$\triangle\,(\alpha) x^\alpha = \alpha!.$$

Во множестве мультииндексов α введём лексикографическое упорядочение: $(\alpha_1, ...,\ \alpha_m) \ge (\beta_1, ..., \beta_m)$ если $(\alpha_1, ..., \alpha_m) = (\beta_1, ..., \beta_m)$ или, если k наименьшее число такое, что $\alpha_k \ne \beta_k$, то $\alpha_k > \beta_k$. Если $\beta < \alpha$, то $\triangle\,(\alpha) x^\beta = 0$.

Пусть $\alpha^{(1)}$ – наибольший мультииндекс такой, что $c_{\alpha^{(1)}}(r) \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\alpha^{(1)}! c_{\alpha^{(1)}}(r) = \triangle\ (\alpha^{(1)}) b(x, r).$$

Из условия теоремы следует, что существует предел на бесконечности у функции $\triangle\ (\alpha^{(1)}) b(x, r)$, а значит и у функции $c_{\alpha^{(1)}}(r)$.

Дальше наше рассуждение нужно повторить для функции $b(x, r) - c_{\alpha^{(1)}}(r) x^{\alpha^{(1)}}$. Через конечное число шагов мы получим утверждение леммы. □

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция порядка* ρ *в плоскости* $\mathbb{C}$ *из класса* $\delta S^{(0)}$, $p = [\rho]$. *Пусть* μ *– риссовская мера функции* w. *Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(z) = \int \mathrm{Re}\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + ... + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right) d\mu(\zeta) + \sum_{n=1}^{p} \mathrm{Re}\ c_n z^n, \quad (3.18)$$

причём имеют место формулы

$$c_n = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi + \frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} - \frac{1}{\zeta^n}\right) d\mu(\zeta)\right). \quad (3.19)$$

Замечание. Символ $[\rho]$ обозначает целую часть ρ. Если у интеграла не указана область интегрирования, то таковой является всё пространство. Существование предела (3.19) не является тривиальным фактом. Его существование – одно из утверждений теоремы. Мы даём не только новое доказательство известной теоремы о представлении, но и несколько усиливаем её, давая формулы для коэффициентов c_n.

Функция $\mathrm{w}(z)$, будучи гармонической функцией в круге $C(0, 1)$, представляется в этом круге рядом

$$\mathrm{w}(z) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Равенство (3.19) даёт формулы для коэффициентов c_n для $n \in \overline{1,p}$. Для $n > p$ справедлива формула, которая следует из формулы (3.19)

$$c_n = \frac{1}{n}\int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^n}.$$

Теории субгармонических и δ-субгармонических функций в плоскости и в пространствах $\mathbb{R}^m,\ m \geq 3$ различаются. Поэтому теоремы о представлении для случаев $m = 2$ и $m \geq 3$ доказываются различно. В работе предлагается теорема для случае $m = 2$, а для случае $m \geq 3$ можно найти в нашей работе [9], теоремы 11, 12.

В книге Азарина ([27], теорема 2.9.3.1) доказывается теорема о представлении δ-субгармонических функций конечного порядка в пространстве $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2$. В книге Хеймана и Кеннеди ([25], теорема 4.2) доказывается аналогичная теорема для субгармонических функций. Предлагаемые доказательства позволяют несколько усилить результаты из [27] и [25].

Доказательство. Перепишем формулу (1.5) для функции $\mathrm{w}(z)$ в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{w}(z) =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}v(Re^{i\varphi})d\varphi + \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)d\mu(\zeta) \\ &+ \int\limits_{B(0,R)} \ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta) - \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{R^2}\right)d\mu(\zeta).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z} &= \mathrm{Re}\frac{1+\frac{z}{Re^{i\varphi}}}{1-\frac{z}{Re^{i\varphi}}} = 1 + 2\mathrm{Re}\frac{z}{Re^{i\varphi}}\frac{1}{1-\frac{z}{Re^{i\varphi}}} \\ &= 1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}} + 2\mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n}{R^n e^{in\varphi}},\end{aligned}$$

$$-\mathrm{Re}\ln\left(1-\frac{z\overline{\zeta}}{R^2}\right) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} + \mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}.$$

Далее формулу (3.20) перепишем в виде

$$\mathrm{w}(z) = \int \mathrm{Re}\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + \ldots + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta) + b(R,z) + a(R,z), \tag{3.21}$$

где

$$b(R,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\int\limits_{B(0,R)}\ln\frac{|\zeta|}{R}d\mu(\zeta)$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{p}z^n\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right),$$

$$a(R,z)=-\int\limits_{CB(0,R)}\mathrm{Re}\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+...+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right)d\mu(\zeta)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{Re}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n}{R^ne^{in\varphi}}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi+\mathrm{Re}\int\limits_{B(0,R)}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{z^n\overline{\zeta}^n}{nR^{2n}}d\mu(\zeta).$$

В написанной формуле символ $CB(0,R)$ обозначает дополнение к кругу $B(0,R)$.

Так как функция $\mathrm{w}(z)$ имеет порядок ρ, то для любого ε, существует постоянная M_ε такая, что выполняются неравенства

$$|\mu|(B(0,R))<M_\varepsilon R^{\rho+\varepsilon},\ R>0,$$

$$\int|\mathrm{w}(Re^{i\varphi})|d\varphi<M_\varepsilon R^{\rho+\varepsilon},\ R>1.$$

Из этих неравенств легко следует, что для любого z выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}a(R,z)=0.$$

Теперь из равенства (3.21) следует, что для любого z существует предел

$$\lim_{R\to\infty}b(R,z).$$

Если $z=x+iy$, то функция $b(R,z)$ как функция переменных x и y является многочленом степени p. Теперь из леммы 3.1 следует, что при $n\in\overline{1,p}$ функции

$$c_n(R)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi+\frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)}\left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}}-\frac{1}{\zeta^n}\right)d\mu(\zeta)\right)$$

имеют предел при $R \to \infty$.

Заметим, что из формулы (1.7) для функции $\mathrm{w}(z)$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi})d\varphi + \int\limits_{B(0,R)} \ln\frac{|\zeta|}{R} d\mu(\zeta) = 0.$$

Переходя в равенстве (3.21) к пределу при $R \to \infty$, получим утверждения теоремы. Теорема доказана. □

В теореме 3.3 предполагается, что функция $\mathrm{w}(z)$ принадлежит классу $\delta S^{(0)}$. Сформулируем теорему для общего случая.

Теорема 3.4. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция порядка* ρ *в плоскости* $\mathbb{C}$, μ – *её риссовская мера,* $p = [\rho]$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathrm{w}(z) = \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\mu(\zeta)$$

$$+ \int\limits_{CB(0,1)} \mathrm{Re}\left(\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \frac{z}{\zeta} + \ldots + \frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right) d\mu(\zeta) + \sum_{n=0}^{p} \mathrm{Re} c_n z^n.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathrm{w}_1(z) = \mathrm{w}(z) - \int\limits_{B(0,1)} \ln|z-\zeta| d\mu(\zeta) - c,$$

причём постоянную c выбираем из условия $\mathrm{w}_1(0) = 0$. Функция $\mathrm{w}_1 \in \delta S^{(0)}$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 3.3. □

Замечание. В общем случае существуют аналоги соотношений (3.19) при $n \in \overline{1,p}$

$$c_n = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi R^n}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{w}(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi + \frac{1}{n}\int\limits_{B(0,R)\setminus B(0,1)} \left(\frac{\overline{\zeta}^n}{R^{2n}} - \frac{1}{\zeta^n}\right) d\mu(\zeta)\right).$$

3.4. Предельные множества Азарина для δ-субгармонических функций

В этом подразделе считается, что уточнённый порядок $\rho(r)$ удовлетворяет дополнительному условию $\rho = \rho(\infty) > 0$. В дальнейшем это условие дополнительно не оговаривается.

Говорят, что последовательность δ-субгармонических функций $\mathrm{w}_n(z)$ сходится к δ-субгармонической функции $\mathrm{w}(z)$ в пространстве $\Phi'(G),\ G \subset \mathbb{C}$, если для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathrm{w}_n(z)\varphi(z)dm_2(z) = \int \mathrm{w}(z)\varphi(z)dm_2(z),$$

где m_2 – плоская мера Лебега.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть R – произвольное число строго положительное число и пусть комплексные числа $z = re^{i\varphi}$ и ζ удовлетворяют неравенствам $|z| < R,\ |\zeta| < R$. Тогда выполняется равенство*

$$J := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\frac{R(re^{i\varphi}-\zeta)}{R^2 - re^{i\varphi}\bar{\zeta}}\right| d\varphi = -\left(\ln R - \max(\ln r, \ln|\zeta|)\right).$$

Доказательство. Мы будем исходить из равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\zeta - re^{i\varphi}\right| d\varphi = \max(\ln r, \ln|\zeta|).$$

Далее имеем

$$J = \ln R + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\zeta - re^{i\varphi}\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|R^2 - re^{i\varphi}\zeta\right| d\varphi$$

$$= \ln R + \max(\ln r, \ln|\zeta|) - 2\ln R.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\ln\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right|d\varphi \le 2\ln\left(1+\frac{r}{|\zeta|}\right).$$

Доказательство. Обозначим написанный интеграл через J. Выполняется равенство

$$J=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|d\varphi.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|d\varphi=\ln^+\frac{r}{|\zeta|}\ge 0.$$

Поэтому

$$J\le\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|d\varphi\le\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left(1+\frac{r}{|\zeta|}\right)d\varphi=2\ln\left(1+\frac{r}{|\zeta|}\right).$$

Лемма доказана. □

Предложение 3.7. *Пусть* $R>0$ *– некоторое число, а* z *и* ζ *комплексные числа из круга* $C(0,R)$. *Пусть* μ_n *– последовательность радоновых мер в области* $G\subset\mathbb{C}$, *содержащей круг* $B(0,R)$, *которая широко сходится к мере* μ. *Тогда последовательность*

$$u_n(z)=\int\limits_{B(0,R)}\ln\left|\frac{R(re^{i\varphi}-\zeta)}{R^2-re^{i\varphi}\overline{\zeta}}\right|d\mu_n(\zeta)$$

δ*-субгармонических функций в круге* $C(0,R)$ *широко сходится к функции*

$$u(z)=\int\limits_{B(0,R)}\ln\left|\frac{R(re^{i\varphi}-\zeta)}{R^2-re^{i\varphi}\overline{\zeta}}\right|d\mu(\zeta).$$

в пространстве $\Phi'(C(0,R))$

Доказательство. Пусть φ – произвольная функция из пространства

$\Phi(C(0,R))$. Имеем

$$(u_n,\varphi)=\int\limits_{B(0,R)}\left(\int\limits_{B(0,R)}\varphi(z)\ln\left|\frac{R(re^{i\varphi}-\zeta)}{R^2-re^{i\varphi}\overline{\zeta}}\right|dxdy\right)d\mu_n(\zeta).$$

Обозначим

$$\psi(\zeta)=\int\limits_{B(0,R)}\varphi(z)\ln\left|\frac{R(re^{i\varphi}-\zeta)}{R^2-re^{i\varphi}\overline{\zeta}}\right|dxdy.$$

В теории потенциала хорошо известно, что потенциал непрерывной финитной функции является непрерывной функцией в $\mathbb{C}$ (см. например [17], теорема 1.7). Из этого легко получить, что ψ – непрерывная функция в $\mathbb{C}$. Очевидно, что $\psi(\zeta)=0$, если $|\zeta|=R$. В дальнейшем будем считать, что $\psi(\zeta)=0$ при $|\zeta|\geq R$.

Пусть ε – произвольное строго положительное число. Существует $\delta>0$ такое, что выполняется неравенство $|\psi(\zeta)|<\varepsilon$, если $|\zeta|\in[R-2\delta,R]$.

Пусть $1=\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta)$ такое непрерывное разбиение единицы в $\mathbb{C}$, что выполняются соотношения $supp\,\psi_1\subset B(0,R-\delta)$, $supp\,\psi_2\cap B(0,R-2\delta)=\emptyset$.

Далее находим

$$(u_n-u,\varphi)=\int\limits_{B(0,R)}\psi(\zeta)\psi_1(\zeta)d(\mu_n-\mu)(\zeta)$$
$$+\int\limits_{B(0,R)}\psi(\zeta)\psi_2(\zeta)d(\mu_n-\mu)(\zeta)=J_{1,2}+J_{2,n}.$$

Поскольку функция $\psi(\zeta)\psi_1(\zeta)$ принадлежит пространству $\Phi(C(0,R))$, то $\lim\limits_{n\to\infty}J_{1,n}=0$. Поскольку $supp\ \psi(\zeta)\psi_2(\zeta)$ принадлежит кольцу $R-2\delta\leq|\zeta|\leq R$, то выполняется неравенство $|J_{2,n}|\leq\varepsilon(|\mu_n|(B(0,R))+|\mu|(B(0,R)))$.

Поскольку последовательность μ_n радоновых мер в области G является широко сходящейся, то из теоремы 1.6 следует, что это сильно ограниченная последовательность в G. Поэтому последовательность $|\mu_n|(B(0,R))$ является ограниченной. Из сказанного следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n,\varphi)=(u,\varphi)$. Предложение доказано. $\square$

Предложение 3.8. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– семейство* δ*-субгармонических функций в плоскости из класса* $\delta S^{(0)}$*. Если для любого* $r>0$ *множество* $\{T(r,\mathrm{w}):\ \mathrm{w}\in\mathfrak{F}\}$ *ограничено, то семейство* $\mathfrak{F}$ *компактно в пространстве* $\Phi'(\mathbb{C})$*, а множество риссовских мер* $\{\mu_{\mathrm{w}}:\ \mathrm{w}\in\mathfrak{F}\}$ *сильно ограничено в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{C})$*.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{w}\in\mathfrak{F}$, а $\mu=\mu_{\mathrm{w}}$ – риссовская мера функции w. Имеем

$$\mu_+(B(0,r))\le\int\limits_r^{er}\frac{\mu_+(B(0,t)}{t}dt\le\int\limits_0^{er}\frac{\mu_+(B(0,t))}{t}dt\le T(er,\mathrm{w}).$$

Мы доказали, что множество $\{(\mu_{\mathrm{w}})_+(B(0,r)):\ \mathrm{w}\in\mathfrak{F}\}$ является ограниченным. Из равенства (3.17) следует, что аналогично доказывается ограниченность множества $\{(\mu_{\mathrm{w}})_-(B(0,r)):\ \mathrm{w}\in\mathfrak{F}\}$. Таким образом мы доказали, что множество $\{(\mu_{\mathrm{w}}):\ \mathrm{w}\in\mathfrak{F}\}$ является сильно ограниченным множеством в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. По теореме 1.6 это компактное множество в этом пространстве.

Пусть w_n – произвольная последовательности функций из $\mathfrak{F}$. Переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что последовательность μ_n риссовских мер этих функций широко сходится к мере $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Пусть R – произвольное строго положительное число. В круге $C(0,R+2)$ справедливо представление

$$\mathrm{w}_n(z)=\int\limits_{B(0,R+2)}\ln\left|\frac{(R+2)(\zeta-z)}{(R+2)^2-z\overline{\eta}}\right|d\mu_n(\zeta)+h_n(z),\tag{3.22}$$

где

$$h_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R+2)^2-r^2}{(r+2)^2-2(R+2)r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{w}_n((R+2)e^{i\varphi})d\varphi.$$

В круге $B(0,R+1)$ выполняется неравенство

$$|h_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi}(2R+3)\int\limits_0^{2\pi}|\mathrm{w}_n((R+2)e^{i\varphi})|d\varphi \leq 2(2R+3)T(R+2,\mathrm{w}_n).$$

Последовательность гармонических функций $h_n(z)$ равномерно ограничена в круге $B(0,\ R{+}1)$. Поэтому у неё есть подпоследовательность $h_{n_k}(z)$, которая сходится равномерно в круге $B(0,R)$. Из равенства (3.22) с $n=n_k$ и предложения 3.7 следует, что последовательность $\mathrm{w}_{n_k}(z)$ сходится в пространстве $\Phi'(C(0,R))$.

Мы доказали следующее утверждение, назовём его утверждением A.

Пусть w_n – произвольная последовательность функций из $\mathfrak{F}$, R – произвольное строго положительное число. Тогда у последовательности w_n есть подпоследовательность w_{n_k}, которая сходится в пространстве $\Phi'(C(0,R))$.

Пусть теперь w_n – произвольная последовательность функций из $\mathfrak{F}$, а $R_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ – строго возрастающая последовательность. Из утверждения A следует, что у последовательности w_n есть подпоследовательность $\mathrm{w}_{n_k^{(1)}}$, которая сходится в пространстве $\Phi'(C(0,R_1))$. Применяя ещё раз утверждение A получим, что у последовательности $\mathrm{w}_{n_k^{(1)}}$ есть подпоследовательность $\mathrm{w}_{n_k^{(2)}}$, которая сходится в пространстве $\Phi'(C(0,R_2))$. Продолжая этот процесс, получим что у последовательности $\mathrm{w}_{n_k^{(s-1)}}$ есть подпоследовательность $\mathrm{w}_{n_k^{(s)}}$, которая сходится в пространстве $\Phi'(C(0,R_s))$. Диагональная последовательность $\mathrm{w}_{n_s^{(s)}}$ есть подпоследовательность последовательности w_n, которая сходится в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Предложение доказано. □

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ *–* δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$. *Тогда существует* δ*-субгармоническая функция* $\mathrm{w}_1(z)$ *в* $\mathbb{C}$ *такая, что выполняются условия:* $\mathrm{w}_1(z)=\mathrm{w}(z)$ *при* $|z|>3,$ $\mathrm{w}_1(z)=0$ *при* $z\in C(0,1)$.

Доказательство. Существуют субгармонические функции $v_1(z)$ и

$\upsilon_2(z)$ такие, что вне полярного множества выполняется равенство $\mathrm{w}(z) = \upsilon_1(z) - \upsilon_2(z)$. Пусть $\upsilon_3(z)$ – функция, которая совпадает с $\upsilon_1(z)$ при $|z| \geq 3$, а в круге $C(0,3)$ совпадает с гармоническим продолжением функции $\upsilon_1(z)$ окружности $S(0,3)$ в круг $C(0,3)$. Известно, что $\upsilon_3(z)$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}$. Аналогично, по субгармонической функции $\upsilon_2(z)$ строим субгармоническую функцию $\upsilon_4(z)$. Далее в круге $C(0,2)$ функцию $\upsilon_3(z)$ изменяем следующим образом. В кольце $1 \leq |z| < 2$ функцию $\upsilon_3(z)$ заменяем на решение задачи Дирихле: $\triangle \upsilon = 0,\ \upsilon(2e^{i\varphi}) = \upsilon_3(2e^{i\varphi}),\ \upsilon(e^{i\varphi}) = 0$. В круге $B(0,1)$ функцию $\upsilon_3(z)$ заменяем на ноль. Так изменённую функцию $\upsilon_3(z)$ обозначим $\upsilon_5(z)$. Если аналогичную процедуру проделать с функцией $\upsilon_4(z)$, то получим функцию $\upsilon_6(z)$. Функции $\upsilon_5(z)$ и $\upsilon_6(z)$ это δ-субгармонические функции в $\mathbb{C}$. В качестве $\mathrm{w}_1(z)$ можно взять функцию $\mathrm{w}_1(z) = \upsilon_5(z) - \upsilon_6(z)$. Лемма доказана. $\square$

Пусть $\mathrm{w}(z)$ – δ-субгармоническая функция в $\mathbb{C}$, $\rho(r)$ – уточнённый порядок. Обозначим через w_t $(t > 0)$ следующую функцию

$$\mathrm{w}_t(z) = \frac{\mathrm{w}(tz)}{V(t)}.$$

Множество $\{\mathrm{w}_t :\ t > 0\}$ называется траекторией функции w.

Множество $\{\mathrm{w}_t :\ t \geq 1\}$ называется положительной полутраекторией функции w.

Множество δ-субгармонических функций вида $u(z) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{w})_{t_n}(z)$, где $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, предел берётся в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$, называется предельным множеством функции w относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и обозначается $Fr[\mathrm{w}, \rho(r)]$ или короче $Fr[\mathrm{w}]$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$*, которая обращается в ноль при* $|z| > r_0 \in (0, \infty)$*. Пусть функция* w_t *построена с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$*. Тогда для любой функции* $\varphi \in \Phi(\mathbb{C})$ *выполняется равенство*

$$\lim_{t\to\infty}(\mathrm{w}_t, \varphi) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{C})$. Имеем

$$(\mathrm{w}_t, \varphi) = \frac{1}{V(t)} \int \mathrm{w}(tz)\varphi(z)dm_2(z).$$

Сделав в интеграле замену $\zeta = tz$, мы получим

$$(\mathrm{w}_t, \varphi) = \frac{1}{t^2 V(t)} \int \mathrm{w}(\zeta)\varphi\left(\frac{\zeta}{t}\right) dm_2(\zeta),$$

$$|(\mathrm{w}_t, \varphi)| \leq \frac{1}{t^2 V(t)} \|\varphi\| \int |\mathrm{w}(\zeta)| dm_2(\zeta).$$

Из этого следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.6. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$*, которая является функцией не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *и которая обращается в ноль в некоторой окрестности нуля. Тогда для любого* $r > 0$ *множество* $\{T(r, (\mathrm{w})_t) : \ t \in (0, \infty)\}$ *является ограниченным.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что существует постоянная M такая, что для всех $r > 0$ будет выполняться неравенство $T(r, \mathrm{w}) \leq MV(r)$. Далее, применяя неравенство (1.4), получим $T(r, \mathrm{w}_t) = \frac{1}{V(t)} T(rt, \mathrm{w}) \leq M\frac{V(rt)}{V(t)} \leq M\gamma(r)r^{\rho}$. Лемма доказана. □

Нам будет нужно следующее утверждение.

Предложение 3.9. (см. [11], Теорема 16). *Пусть* $\mathrm{w}_n(z)$ *– последовательность* δ*-субгармонических функций в* $G \subset \mathbb{C}$*, которая как последовательность обобщённых функций сходится к обобщённой функции* $\mathrm{w}(z)$*, причём последовательность* μ_n *мер Рисса функций* $\mathrm{w}_n(z)$ *слабо ограничена. Пусть* $p \geq 1$ *– произвольное число, а круг* $B(z_0, r)$ *входит в* G*. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{B(z_0, r)} |\mathrm{w}_n(z) - \mathrm{w}(z)|^p dm_2(z) = 0.$$

Лемма 3.7. *Пусть* $\mathrm{w}_n(z)$, $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармонические функции и последовательность* $\mathrm{w}_n(z)$ *сходится к функции* $\mathrm{w}(z)$ *в пространстве*

$\Phi'(\mathbb{C})$. *Пусть последовательность* μ_n *риссовских мер функций* w_n *компактна в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. *Пусть* t_n *– такая последовательность, что* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t > 0$. *Тогда последовательность* $(\mathrm{w}_n)_t(z)$ *функций сходится к функции* $(\mathrm{w})_t(z)$ *в пространстве* $\Phi'(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть φ – произвольная функция из пространства $\Phi(\mathbb{C})$. Имеем

$$\begin{aligned}
((\mathrm{w}_n)_{t_n}(z), \varphi) &= \frac{1}{V(t_n)} \int \mathrm{w}_n(t_n z)\varphi(z) dm_2(z) \\
&= \frac{1}{t_n^2 V(t_n)} \int \mathrm{w}_n(\zeta)\varphi\left(\frac{\zeta}{t_n}\right) dm_2(\zeta) \\
&= \frac{1}{t_n^2 V(t_n)} \int \mathrm{w}_n(\zeta)\varphi\left(\frac{\zeta}{t}\right) dm_2(\zeta) \\
&+ \frac{1}{t_n^2 V(t_n)} \int \mathrm{w}_n(\zeta)\left(\varphi\left(\frac{\zeta}{t_n}\right) - \varphi\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right) dm_2(\zeta) \\
&= J_{1,n} + J_{2,n}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_{1,n} = (\mathrm{w}_t, \varphi)$.

Пусть n_0 – такое число, что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|t_n - t| \leq \frac{1}{2}t$. Пусть R – такое число, что выполняется соотношение $supp\ \varphi \subset B(0, R)$. Тогда при $n \geq n_0$ будет выполняется соотношение $supp\ \left(\varphi\left(\frac{\zeta}{t_n}\right) - \varphi\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right) \subset B\left(0, \frac{3}{2}tR\right)$. Поэтому при $n \geq n_0$ будет выполняться неравенство

$$|J_{2,n}| \leq \frac{1}{t_n^2 V(t_n)} \sup\left\{\left|\varphi\left(\frac{\zeta}{t_n}\right) - \varphi\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right| :\ \zeta \in \mathbb{C}\right\} \int\limits_{B(0,\frac{3}{2}tR)} |\mathrm{w}_n(\zeta)| dm_2(\zeta). \tag{3.23}$$

По предложению 3.9 последовательность $\mathrm{w}_n(\zeta)$ сходится к $\mathrm{w}(\zeta)$ в пространстве $L_1(B(0,\ \frac{3}{2}tR))$. Поэтому последовательность $\int\limits_{B(0,\frac{3}{2}tR)} |\mathrm{w}_n(\zeta)| dm_2(\zeta)$ ограничена. Из этого и равенства (3.23) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_{2,n} = 0$. □

Из этой леммы следует следующее утверждение

Лемма 3.8. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$*,* $\rho(r)$ – *произвольный уточнённый порядок. Тогда кривая* $(\mathrm{w})_t(z)$*,* $t \in (0,\infty)$ *является непрерывной кривой в пространстве* $\Phi'(\mathbb{C})$.

Предложение 3.10. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$ *не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$*,* μ – *её риссовская мера. Тогда выполняются следующие условия.*

1. Положительная полутраектория $(\mathrm{w})_t$*,* $t \in [1,\infty)$ *является компактным множеством в пространстве* $\Phi'(\mathbb{C})$.

2. Семейство мер μ_t*,* $t \in [1,\infty)$ *сильно ограничено в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{w}_1(z)$ такая δ-субгармоническая функция в $\mathbb{C}$, что выполняется условия: $\mathrm{w}_1(z) = \mathrm{w}(z)$ при $|z| > 3$, $\mathrm{w}_1(z) = 0$ при $|z| < 1$. Существование такой функции следует из леммы 3.4. Обозначим $\mathrm{w}_2(z) = \mathrm{w}(z) - \mathrm{w}_1(z)$. Пусть μ_1 и μ_2 – риссовские меры функций w_1 и w_2. Выполняется равенство $\mu = \mu_1 + \mu_2$. По лемме 3.6 множество $\{T(r,(\mathrm{w}_1)_t) : t \in (0,\infty)\}$ ограничено при любом $r > 0$. Имеем, учитывая определение $T(r,\mathrm{w})$

$$|\mu|_t(B(0,r)) \le |\mu_1|_t(B(0,r)) + |\mu_2|_t(B(0,r))$$
$$\le \int_r^{er} \frac{|\mu_1|_t dt}{t} + |\mu_2|(B(0,r))$$
$$\le 2T(er,(\mathrm{w}_1)_t) + \frac{|\mu_2|(B(0,rt))}{V(t)} \le 2T(er,(\mathrm{w}_1)_t) + \frac{|\mu_2|(\mathbb{C})}{V(t)}.$$

Из этого неравенства следует утверждение 2 теоремы.

Из леммы 3.6 и предложения 3.8 следует, что семейство функций $(\mathrm{w}_1)_t$, $t \in (0,\infty)$ компактно в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Пусть $t_n \ge 1$ – произвольная последовательность. Переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняется одно из двух условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t \ge 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. По лемме 3.8 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{w}_{t_n} = \mathrm{w}_t$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$. По предложению 3.8 существует подпоследовательность $t_n^{(1)}$ последовательности t_n такая, что последовательность $(\mathrm{w}_1)_{t_n^{(1)}}$ будет сходящейся в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. По лемме 3.5 последовательность $(\mathrm{w}_2)_{t_n^{(1)}}$ сходится к нулю в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Поэтому последовательность $(\mathrm{w})_{t_n^{(1)}} = (\mathrm{w}_1)_{t_n^{(1)}} + (\mathrm{w}_2)_{t_n^{(1)}}$ является сходящейся в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Теорема доказана. □

В теории субгармонических и δ-субгармонических функций важную роль играет ядро

$$K_p(z,\zeta) = Re\left(\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\frac{z}{\zeta}+\dots+\frac{1}{p}\frac{z^p}{\zeta^p}\right),$$

где $p \in \mathbb{N}$. Для всех $z,\ \zeta \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство ([18], лемма 2)

$$|K_p(z,\zeta)| \le M(p)\frac{|z|^p}{|\zeta|^p}\min\left\{1,\frac{|z|}{|\zeta|}\right\}, \tag{3.24}$$

где $M(p)$ зависит только от p.

Пусть $\rho \ge 1$ – целое число. Рассмотрим δ-субгармоническую функцию в $\mathbb{C}$ порядка ρ вида

$$\mathrm{w}(z) = \int K_\rho(z,\zeta)d\mu(\zeta) + \sum_{k=1}^{\rho} Re\ c_k z^k,$$

где мера μ такова, что функции $\ln|\zeta|,\ \frac{1}{\zeta^k},\ k=\overline{1,\rho}$ принадлежат пространству $L_1(B(0,1),\mu)$. Функция $\delta(r) = \frac{1}{\rho}\int\limits_{B(0,r)}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}+c_\rho$ называется функцией равновесия Линделёфа функции $\mathrm{w}(z)$.

Предложение 3.11. *Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок такой, что $\rho=\rho(\infty)\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathrm{w}(z)$ – δ-субгармоническая функция порядка ρ, риссовская мера μ которой является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и кроме того удовлетворяет условию: функции $\ln|\zeta|,\ \frac{1}{\zeta^k},\ k=\overline{1,\rho}$ принадлежат классу $L_1(B(0,1),\mu)$.*

Для того, чтобы функция $\mathrm{w}(z)$ *была функцией не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{r^{\rho}|\delta(r)|}{V(r)}<\infty. \tag{3.25}$$

Доказательство. Достаточность. При $r=|z|$ имеем

$$\begin{gathered}\mathrm{w}(z)=\int K_{\rho}(z,\zeta)d\mu(\zeta)+\sum_{k=1}^{\rho}Re\ c_k z^k\\ =\int\limits_{B(0,r)}K_{\rho-1}(z,\zeta)d\mu(\zeta)+\int\limits_{CB(0,r)}K_{\rho}(z,\zeta)d\mu(\zeta)\\ +Re\ z^{\rho}\delta(r)+\sum_{k=1}^{\rho-1}Re\ c_k z^{k-1}=J_1(z)+J_2(z)+J_3(z)+J_4(z).\end{gathered} \tag{3.26}$$

Справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|J_1(re^{i\varphi})|d\varphi\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B(0,r)}\int\limits_0^{2\pi}\left|\ln\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right|d\varphi d|\mu|(\zeta)\\ +\sum_{k=1}^{\rho-1}\frac{r^k}{k}\int\limits_{B(0,r)}\frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta|^k}=J_5(r)+J_6(r).\end{gathered} \tag{3.27}$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$\begin{gathered}J_5(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B(0,r)}\int\limits_0^{2\pi}\left|\ln\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right|d\varphi d|\mu|(\zeta)\le 2\int\limits_{B(0,r)}\ln\left(1+\frac{r}{|\zeta|}\right)d|\mu|(\zeta)\\ =\int\limits_0^r\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)d|\mu|(B(0,t))\le 2\ln 2|\mu|(B(0,r))+2\int\limits_0^r\frac{r|\mu|(B(0,t))}{t(t+r)}dt\\ \le 2\ln 2|\mu|(B(0,r))+2\int\limits_0^1\frac{|\mu|(B(0,t))}{t}dt+2\int\limits_1^r\frac{|\mu|(B(0,t))}{t}dt.\end{gathered} \tag{3.28}$$

Из соотношения $\ln|\zeta|\in L_1(B(0,1),\mu)$, после интегрирования по частям, следует конечность величины $2\int\limits_0^1\frac{|\mu|(B(0,t))}{t}dt$. Так как мера μ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, то существует постоянная M_1 такая, что будет выполняться неравенство

$$|\mu|(B(0,t)) \leq M_1 V(t),\ t \geq 1. \tag{3.29}$$

Поэтому

$$\int\limits_1^r \frac{|\mu|(B(0,t))}{t} dt \leq M_1 \int\limits_0^r \frac{V(t)}{t} dt \leq M_1 \int\limits_0^1 \frac{V(\tau r)}{\tau} d\tau$$

$$\leq M_1 V(r) \int\limits_0^1 \tau^{\rho-1}\gamma(\tau) d\tau \leq M_1 V(r) \int\limits_0^1 \gamma(\tau) d\tau.$$

Теперь из неравенства (3.28) следует, что существует постоянная M_2 такая, что для всех $r \geq 1$ будет выполняется неравенство $J_5(r) \leq M_2 V(r)$. Имеем

$$\int\limits_{B(0,r)} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta|^k} = \int\limits_{B(0,1)} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta|^k} + \int\limits_{B(0,r)\setminus B(0,1)} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta|^k}.$$

Из соотношения $\frac{1}{|\zeta|^k} \in L_1(B(0,1),\mu)$ следует конечность величины

$$\int\limits_{B(0,1)} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta|^k},\ k \in \overline{1, \rho-1}.$$

Далее замечаем, что

$$\int\limits_{B(0,r)\setminus B(0,1)} \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta|^k} = \int\limits_1^r \frac{d|\mu|(B(0,t)))}{t^k} \leq \frac{|\mu|(B(0,r))}{r^k} + \frac{1}{k}\int\limits_1^r \frac{|\mu|(B(0,t))}{t^{k+1}} dt$$

$$\leq M_1 \frac{V(r)}{r^k} + \frac{M_1}{k} \int\limits_1^r \frac{V(t)}{t^{k+1}} dt \leq M_1 \frac{V(r)}{r^k} + \frac{M_1}{k}\frac{1}{r^k} \int\limits_0^1 \frac{V(\tau r)}{\tau^{k+1}} d\tau$$

$$= M_1 \frac{V(r)}{r^k} + \frac{M_1}{k}\frac{V(r)}{r^k} \int\limits_0^1 \tau^{\rho-k-1}\gamma(\tau) d\tau.$$

По ходу рассуждений мы использовали неравенства (3.29) и (1.4). Теперь из неравенства (3.27) следует, что существует постоянная M_3 такая, что для всех $r \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |J_1(re^{i\varphi})|d\varphi \leq M_3V(r). \tag{3.30}$$

Используя лемму 3.2, неравенство (3.24), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |J_2(re^{i\varphi})|d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R((r,2r])}\int\limits_0^{2\pi} |K_\rho(re^{i\varphi},\zeta)|d\varphi d|\mu|(\zeta)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{CB(0,2r)}\int\limits_0^{2\pi} |K_\rho(re^{i\varphi},\zeta)|d\varphi d|\mu|(\zeta) \leq \left(2\ln 2 + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\rho}\frac{1}{k}\right)|\mu|(R((r,2r]))$$

$$+M(\rho)\int\limits_{CB(0,2r)} \frac{r^{\rho+1}}{|\zeta|^{\rho+1}}d|\mu|(\zeta) \leq \left(2\ln 2 + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\rho}\frac{1}{k}\right)|\mu|(R((r,2r]))$$

$$+M(\rho)r^{\rho+1}\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{d|\mu|(B(0,t))}{t^{\rho+1}}.$$

Теперь из того, что мера μ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, следует, что существует постоянная M_4 такая, что для всех $r \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |J_2(re^{i\varphi})|d\varphi \leq M_4V(r). \tag{3.31}$$

Из равенства (3.26), неравенств (3.30), (3.31), (3.25) следует, что существует постоянная M_5 такая, что для всех $r \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{w}(re^{i\varphi})|d\varphi \leq M_5V(r).$$

Далее находим

$$m(r,\infty,\mathrm{w})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{w}^+(re^{i\varphi})d\varphi\le M_5V(r),$$

$$N(r,\infty,\mathrm{w})=\int\limits_0^r\frac{\mu_0(B(0,t))}{t}dt\le\int\limits_0^r\frac{|\mu|(B(0,t))}{t}dt.$$

Далее применяя рассуждения, приведённые после формулы (3.28) получим, что существует постоянная M_6 такая, что для всех $r\ge1$ будет выполняться неравенство $N(r,\infty,\mathrm{w})\le M_6V(r)$. Таким образом $T(r,\mathrm{w})\le(M_5+M_6)V(r),\ r\ge1$. Это означает, что w – функция не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Достаточность доказана.

Необходимость. Имеем $\delta(r)=e^{i\varphi(r)}|\delta(r)|$. Пусть $z=re^{i\theta}$. Тогда равенство (3.26) можно переписать в виде

$$\cos(\rho\theta+\varphi(r))r^\rho|\delta(r)|=\mathrm{w}-J_1(z)-J_2(z)-J_4(z)=\mathrm{w}_3(z). \tag{3.32}$$

По условию теоремы функция w является функцией не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Поэтому существует постоянная M_7 такая, что для всех $r\ge1$ будет выполняться неравенство $T(r,\mathrm{w})\le M_7V(r)$.

Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathrm{w}(re^{i\varphi})|d\varphi\le 2T(r,\mathrm{w})\le 2M_7V(r).$$

Отсюда, а также из неравенств (3.30) и (3.31) следует, что существует постоянная M_8 такая, что для всех $r\ge1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathrm{w}_3(re^{i\varphi})|d\varphi\le M_8V(r). \tag{3.33}$$

Из неравенства (3.33) следует, что существует постоянная M_9 такая, что на любой окружности $|z|=r\ge1$ найдётся точка $re^{i\theta(r)}$ такая, что будут выполняться неравенства:

$$|\mathrm{w}_3(re^{i\theta(r)})| \leq M_9 V(r),\ \cos(\rho\theta(r) + \varphi(r)) \geq \frac{1}{2}.$$

Если в равенстве (3.32) взять $\theta = \theta(r)$, то получим неравенство $r^\rho|\delta(r)| \leq 2M_9 V(r)$, из которого следует неравенство (3.25). Теорема доказана. $\square$

Обозначим через $L(\alpha),\ \alpha > 0$ линейное нормированное пространство, состоящее из локально интегрируемых в $\mathbb{C}$ функций $g(z)$, для которых конечна величина

$$\|g\|_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int \frac{|g(z)|}{1+|z|^\alpha}dxdy,$$

называемая нормой функции $g(z)$.

Предложение 3.12. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$ *не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Тогда при* $\alpha > \rho+2$ *кривая* $(\mathrm{w})_t$ *является непрерывной кривой в пространстве* $L(\alpha)$, *а множество функций* $(\mathrm{w})_t(z),\ t \geq 1$ *является компактным множеством в этом пространстве.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{w}_1(z)$ – δ-субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция такая, что выполняются условия: $\mathrm{w}_1(z) = \mathrm{w}(z)$ при $|z| > 3,\ \mathrm{w}_1(z) = 0$ при $|z| < 1$. Существование такой функции утверждается в лемме 3.4. Обозначим $\mathrm{w}_2(z) = \mathrm{w}(z) - \mathrm{w}_1(z)$. Пусть $\mu,\ \mu_1,\ \mu_2$ – риссовские меры функций $\mathrm{w},\ \mathrm{w}_1,\ \mathrm{w}_2$. Выполняется равенство $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Имеем для любого $R > 0$

$$(|\mu_2|)_t(B(0,R)) = \frac{|\mu_2|(B(0,tR))}{V(t)} \leq \frac{|\mu_2|(\mathbb{C})}{V(t)}.$$

Поэтому для любого $t_0 > 0$ множество мер $(\mu_2)_t,\ t \geq t_0$ сильно ограничено в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

По лемме 3.8 кривая $(\mathrm{w}_2)_t,\ t \in (0,\infty)$ непрерывна в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Кроме того, для любого $t_0 > 0$ множество $(\mu_2)_t,\ t \geq t_0$ мер сильно ограничено в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Применяя предложение 3.9, получим, что для любого $R > 0$ кривая $(\mathrm{w}_2)_t(z),\ t \in (0,\infty)$ является непрерывной кривой в пространстве $L_1(B(0,R))$. Так как функция $\mathrm{w}_2(z)$ обращается в ноль при $|z|>3$, то

$$\int\limits_{CB(0,R)} \frac{|(\mathrm{w}_2)_t(z)|}{1+|z|^\alpha} dxdy = 0$$

при $R > \frac{3}{t}$. Из вышесказанного следует непрерывность кривой $(\mathrm{w}_2)_t(z),\ t\in(0,\infty)$ в пространстве $L(\alpha)$.

Рассмотрим теперь кривую $(\mathrm{w}_1)_t(z),\ t\in(0,\infty)$. По лемме 3.8 эта кривая непрерывна в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Из леммы 3.6 следует, что для любого $r>0$ множество $\{T(r,(\mathrm{w}_1)_t):\ t\in(0,\infty)\}$ является ограниченным. Из предложения 3.8 следует, что множество мер $(\mu_1)_t(z),\ t\in(0,\infty)$ является сильно ограниченным множеством в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Далее применяя предложение 3.9 получим, что для любого $R>0$ кривая $(\mathrm{w}_1)_t(z),\ t\in(0,\infty)$ непрерывна в пространстве $L_1(B(0,R))$. Назовём это утверждением B.

Функция $\mathrm{w}_1(z)$ является функцией не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Кроме того, $\mathrm{w}_1(z)=0$ при $|z|<1$. Поэтому существует постоянная M_1 такая, что выполняется неравенство $T(r,\mathrm{w}_1)\le M_1V(r),\ r>0.$

Далее находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{CB(0,R)} \frac{|(\mathrm{w}_1)_t(z)|}{1+|z|^\alpha} dxdy = \frac{1}{V(t)}\int\limits_R^\infty \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{w}_1(tre^{i\varphi})|d\varphi\right)\frac{rdr}{1+r^\alpha}$$

$$= \frac{2}{V(t)}\int\limits_R^\infty \frac{rT(tr,\mathrm{w}_1)}{1+r^\alpha}dr \le \frac{2M_1}{V(t)}\int\limits_R^\infty \frac{rV(tr)}{1+r^\alpha}dr.$$

Применяя неравенство (1.4), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{CB(0,R)} \frac{|(\mathrm{w}_1)_t(z)|}{1+|z|^\alpha} dxdy \le 2M_1\int\limits_R^\infty \frac{r^{\rho+1}\gamma(r)}{1+r^\alpha}dr. \tag{3.34}$$

Из утверждения B и неравенства (3.34) следует, что если $\alpha>\rho+2$, то кривая $(\mathrm{w}_1)_t(z),\ t\in(0,\infty)$ является непрерывной кривой в пространстве

$L(\alpha)$. Тогда кривая $(\mathrm{w})_t(z) = (\mathrm{w}_1)_t(z) + (\mathrm{w}_2)_t(z)$ также будет непрерывной кривой в этом пространстве.

Осталось доказать, что множество функций $(\mathrm{w})_t(z),\ t \geq 1$ компактно в пространстве $L(\alpha)$ при $\alpha > \rho + 2$. Пусть $t_n \geq 1$ – произвольная последовательность. У последовательности t_n есть такая подпоследовательность $t_n^{(1)}$, что выполняется одно из двух условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(1)} = \tau \geq 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(1)} = \infty$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(1)} = \tau \geq 1$. Поскольку кривая $(\mathrm{w})_t(z)$ непрерывна в пространстве $L(\alpha)$, то в этом пространстве выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{w})_{t_n^{(1)}}(z) = (\mathrm{w})_\tau(z)$. В этом случае мы доказали, что у последовательности $(\mathrm{w})_{t_n}(z)$ есть сходящаяся в пространстве $L(\alpha)$ подпоследовательность $(\mathrm{w})_{t_n^{(1)}}(z)$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(1)} = \infty$. По предложению 3.10 существуют δ-субгармоническая функция $v(z)$ в $\mathbb{C}$ и подпоследовательность $(\mathrm{w})_{t_n^{(2)}}(z)$ последовательности $(\mathrm{w})_{t_n^{(1)}}(z)$ такие, что последовательность $(\mathrm{w})_{t_n^{(2)}}(z)$ сходится к $v(z)$ в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Кроме того, в той же предложении 3.10 утверждается, что множество мер $(\mu)_t,\ t \geq 1$ является сильно ограниченным множеством в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Теперь из предложения 3.9 следует, что последовательность $(\mathrm{w})_{t_n^{(2)}}(z)$ сходится к $v(z)$ в пространстве $L_1(B(0,R))$ для любого $R > 0$.

Далее будем считать, что $R > 3$. Можно также считать, что выполняется неравенство $t_n^{(2)} > 1$. Тогда $(\mathrm{w}_2)_{t_n^{(2)}}(z) = 0$ при $|z| > R$. Теперь из неравенства (3.34) будет следовать неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{CB(0,R)} \frac{|(\mathrm{w})_{t_n^{(2)}}(z)|}{1+|z|^\alpha} dxdy \leq 2M_1 \int\limits_R^\infty \frac{r^{\rho+1}\gamma(r)}{1+r^\alpha} dr.$$

Из этого неравенство и из того, что последовательность $(\mathrm{w})_{t_n^{(2)}}(z)$ сходится к $v(z)$ в пространствах $L_1(B(0,R)),\ R > 0$, следует, что эта последовательность сходится к $v(z)$ в пространстве $L(\alpha),\ \alpha > \rho + 2$. Теорема доказана. $\square$

Предложение 3.13. *Пусть* $\rho_1(r)$ *и* $\rho_2(r)$ *– уточнённые порядки такие, что* $\rho = \rho_1(\infty) = \rho_2(\infty) > 0$. *Пусть* $\mathrm{w}_1(z)$ *–* δ*-субгармоническая функция уточнённого порядка* $\rho_1(r)$. *Тогда существует* δ*-субгармоническая функция* $\mathrm{w}_2(z)$ *уточнённого порядка* $\rho_2(r)$ *такая, что соотношения* $(\mathrm{w}_1)_{t_n}(z) \to u(z)$, $(\mathrm{w}_2)_{t_n}(z) \to u(z)$ *эквивалентны, где* $t_n \to \infty$, *а под сходимостью функций понимается сходимость в пространстве* $\Phi'(\mathbb{C})$. *При этом*

$$(\mathrm{w}_1)_{t_n}(z) = \frac{\mathrm{w}_1(t_n z)}{V_1(t_n)},\ (\mathrm{w}_2)_{t_n}(z) = \frac{\mathrm{w}_2(t_n z)}{V_2(t_n)}.$$

Замечание. Если в условии теоремы требование, что функции $\mathrm{w}_1(z)$ и $\mathrm{w}_2(z)$ является δ-субгармоническими заменить на требование, чтобы они были субгармоническими, то получим теорему 4 из [10]. Однако, приведенное там доказательство распространяется и на сформулированный нами случай.

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ *–* δ*-субгармоническая функция в* $\mathbb{C}$ *не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Тогда множество* $Fr[\mathrm{w}] = Fr[\mathrm{w}, \rho(r)]$ *обладает следующими свойствами:*

1. $Fr[\mathrm{w}]$ *– непустой связный компакт нормированном пространстве* $L(\alpha),\ \alpha > \rho + 2$, *состоящий из* δ*-субгармонических функций в* $\mathbb{C}$.

2. Множество $Fr[\mathrm{w}]$ *инвариантно относительно преобразований* F_t,

$$(F_t v)(z) = \frac{v(tz)}{t^\rho}.$$

3. Существует постоянная $\sigma_1 > 0$ *такая, что для любой функции* $v \in Fr[\mathrm{w}]$ *и любого* $r > 0$ *выполняется неравенство* $T(r, v) \le \sigma_1 r^\rho$.

Замечание. В. Азарин [27], теорема 3.1.2.2, получил такие свойства предельного множества для субгармонических функций. Мы переносим его результаты на случай δ-субгармонических функций.

Доказательство. Из предложения 3.13 следует, что теорему достаточно доказать для случая, когда $\rho(r) \equiv \rho$. Далее пусть $\mathrm{w}_1(z)$ – такая δ-субгармоническая функция, что выполняются: $\mathrm{w}_1(z) = \mathrm{w}(z)$ при $|z| > 3$ и $\mathrm{w}_1(z) = 0$ при $|z| < 1$. Существование такой функции следует из леммы 3.4. Обозначим $\mathrm{w}_2(z) = \mathrm{w}(z) - \mathrm{w}_1(z)$. Пусть $t_n \to \infty$. Из леммы 3.5 следует, что последовательность $(\mathrm{w}_2)_{t_n}(z)$ сходится к нулю в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Тем самым показано, что доказательство достаточно вести при дополнительных предположениях: $\rho(r) \equiv \rho$ и $\mathrm{w} = 0$ при $|z| < 1$.

Поскольку $\mathrm{w}(z)$ – функция не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r) \equiv \rho$ и поскольку $\mathrm{w}(z) = 0$ при $|z| < 1$, то существует постоянная $M_1 > 0$ такая, что будет выполняется неравенство при всех $r > 0$

$$T(r, \mathrm{w}) < M_1 r^\rho. \tag{3.35}$$

Обозначим через $L(\alpha, M)$ метрическое пространство, являющееся подпространством метрического пространства $L(\alpha)$, состоящее из δ-субгармонических функций, которые входят в класс $\delta S^{(0)}$ и удовлетворяют соотношению $T(r, u) \leq M r^\rho,\ r > 0$.

Пусть $v \in L(\alpha, M), \nu$ – мера Рисса функции v. Имеем

$$\nu_-(B(0,R)) \leq \int\limits_R^{eR} \frac{\nu_-(B(0,\tau))}{\tau} d\tau \leq \int\limits_0^{eR} \frac{\nu_-(B(0,\tau))}{\tau} d\tau \leq T(eR, v) \leq e^\rho M R^\rho.$$

Аналогично получаем, что $\nu_+(B(0,R)) \leq e^\rho M R^\rho$. Таким образом при $R > 0$ выполняется неравенство $|\nu|(B(0,R)) \leq 2e^\rho M R^\rho$. Заметим, что если $v \in L(\alpha, M)$, то функция $(v)_t(z)$ также принадлежит $L(\alpha, M)$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Пусть $v \in L(\alpha, M),\ \nu$ – её риссовская мера. Тогда для любых $t > 0$ и

$r > 0$ выполняется неравенство

$$(|\nu|)_t(B(0,r)) \leq 2e^\rho M r^\rho. \tag{3.36}$$

Покажем теперь, что система отображений $F_t,\ t \in (0,\infty)$ является динамической системой в метрическом пространстве $L(\alpha, M)$. Пусть $\upsilon_n \to \upsilon$ в пространстве $L(\alpha, M),\ t_n \to t$. Из леммы 3.8 следует, что последовательность функций $(F_{t_n}\upsilon_n)(z)$ сходится к функции $(F_t\upsilon)(z)$ в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Пусть β_n – риссовская мера функции $F_{t_n}\upsilon_n$. Из неравенства (3.36) следует, что

$$|\beta_n|(B(0,r)) \leq 2e^\rho M r^\rho.$$

Тем самым последовательность мер β_n является сильно ограниченной в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Из сходимости последовательности $F_{t_n}\upsilon_n$ в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$ и сильной ограниченности последовательности β_n следует сходимость последовательности $F_{t_n}\upsilon_n$ в пространстве $L_1(B(0,R))$ для любого $R > 0$. Это вытекает из предложения 3.9. Далее, применим рассуждения, изложенные в начале доказательства предложения 3.12 (см. неравенство (3.34), в нашем случае $\gamma(r) = 1$), можно получить, что сходимость последовательности $F_{t_n}\upsilon_n$ имеет место и в пространстве $L(\alpha)$. Мы доказали, что система отображений $F_t,\ t \in (0,\infty)$ удовлетворяет условию непрерывности из определения динамической системы. Остальные два условия из определения динамической системы $F_1 u = u$ и $F_{t_2}(F_{t_1}u) = F_{t_2 t_1}u$, очевидно, выполняются.

Таким образом доказано, что система отображений F_t является динамической системой в метрическом пространстве $L(\alpha, M)$.

Пусть $t_n \to \infty$. Из приведенных рассуждений следует, что для рассматриваемой нами функции w сходимость $F_{t_n}\mathrm{w} \to \upsilon$ в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$ эквивалентна сходимости в пространстве $L(\alpha)$. Поэтому множество $Fr[\mathrm{w}]$ совпадает с ω-предельным множеством траектории $F_t\mathrm{w}$ в метрическом пространстве $L(\alpha)$. Кроме того из предложения 3.12 следует, что положительная полутраектория $F_t\mathrm{w},\ t \in [1, \infty)$ является компактным множеством в этом пространстве. На языке теории динамических систем этот означает, что траектория $F_t\mathrm{w}$ положительно устойчива по Лагранжу. Теперь из теорем 10, 13 [20], глава 5, следуют утверждения 1, 2 теоремы.

Пусть теперь $v \in Fr[\mathrm{w}]$. Существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $v = \lim\limits_{n\to\infty} F_{t_n}\mathrm{w}$ в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$. Пусть μ и λ – риссовские меры функций w и v. Так как операция дифференцирования непрерывна в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$, то $\mu_{t_n} \to \lambda$ в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{C})$. Так как функция $\mathrm{w} \in L(\alpha, M)$, то для мер $(\mu)_{t_n}$ справедлива оценка (3.36). Таким образом последовательность μ_{t_n} сильно ограничена в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Из теоремы 1.10 следует, что последовательность μ_{t_n} широко сходится к λ. Кроме того, переходя, если нужно к подпоследовательности, будем считать, что последовательность $(|\mu|)_{t_n}$ широко сходится к некоторой мере $\hat{\lambda}$ в пространстве $\Phi(\mathbb{C})$. Из теоремы 1.11 следует, что если R такое число, что $\hat{\lambda}(S(0,R)) = 0$, то выполняется равенство

$$\hat{\lambda}(B(0,R)) = \lim_{n\to\infty} (|\mu|)_{t_n}(B(0,R)).$$

Из неравенства (3.36) следует, что $\hat{\lambda}(B(0,R)) \leq 2e^{\rho} M R^{\rho}$. Далее имеем $\lambda(B(0,R)) \leq \hat{\lambda}(B(0,R)) \leq 2e^{\rho} M R^{\rho}$,

$$N(r, \infty, v) = \int\limits_0^r \frac{\lambda_-(B(0,t))}{t} dt \leq M_1 r^{\rho}. \tag{3.37}$$

Далее будем считать, что ρ – целое число. Более простой случай нецелого ρ мы опускаем. Из предложения 3.11 и рассуждений приведенных при её доказательстве можно увидеть, что существует постоянная M_2 такая, что для всех $r > 0$ будет выполняться неравенство $m(r, \infty, \mathrm{w}) \leq M_2 r^{\rho}$. Далее находим

$$m(r, \infty, (\mathrm{w})_t) = \frac{1}{t^{\rho}} m(rt, \infty, \mathrm{w}) \leq M_2 r^{\rho}. \tag{3.38}$$

Из того, что последовательность функций $(\mathrm{w})_{t_n}(z)$ сходится к функции $v(z)$ в пространстве $\Phi'(\mathbb{C})$, сильной ограниченности множества мер

$(\mu)_t,\ t \in (0, \infty)$ и предложения 3.9 следует, что для любого $r > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|(\mathrm{w})_{t_n}(re^{i\varphi}) - \upsilon(re^{i\varphi})\right| d\varphi = 0.$$

Из этого следует, что

$$m(r, \infty, \upsilon) = \lim_{n\to\infty} m(r, \infty, (\mathrm{w})_{t_n}) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, T(r, (\mathrm{w})_{t_n}) \le Mr^{\rho}. \tag{3.39}$$

Из неравенств (3.37) и (3.39) следует утверждение 3 теоремы. Теорема доказана. □

Лемма 3.9. *Пусть* $\mathrm{w}(z)$ – δ*-субгармоническая функция* $\mathbb{C}$ *вида*

$$\mathrm{w}(z) = c_0 + \int\limits_{B(0,1)} \ln|z - \zeta| d\mu(\zeta).$$

Тогда для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{C})$ *выполняется равенство*

$$\lim_{t\to\infty} (\mathrm{w}_t, \varphi) = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$(\mathrm{w}_t, \varphi) = \frac{1}{V(t)} \int \mathrm{w}(tz)\varphi(z) dm_2(z) = \frac{1}{V(t)} \int (c_0\mu(B(0,1)) + \ln t|z|)\varphi(z) dm_2(z)$$
$$+\frac{1}{V(t)} \int \int\limits_{B(0,1)} \ln\left|1 - \frac{\zeta}{tz}\right| d\mu(\zeta)\varphi(z) dm_2(z) = J_1(t) + J_2(t).$$

Из того, что $\rho = \rho(\infty) > 0$, а $\varphi(z)$ – непрерывная финитная функция следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} J_1(t) = 0$.

Пусть R – такое число, что выполняется соотношение $supp\ \varphi \subset B(0, R)$. Для функции $J_2(t)$ справедлива оценка

$$|J_2(t)| \le \frac{\|\varphi\|}{V(t)} \int\limits_{B(0,1)} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left|\ln\left|1 - \frac{\zeta}{tre^{i\theta}}\right|\right| d\theta r dr d|\mu|(\zeta).$$

Применяя лемму 3.2, получим

$$|J_2(t)| \leq 4\pi \frac{\|\varphi\|}{V(t)} \int\limits_{B(0,1)} \int\limits_0^R \ln\left(1 + \frac{|\zeta|}{rt}\right) rdrd|\mu|(\zeta)$$

$$\leq 4\pi \frac{\|\varphi\|}{V(t)} |\mu|(B(0,1)) \int\limits_0^R \ln\left(1 + \frac{1}{rt}\right) rdr.$$

Из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} J_2(t) = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 3.10. *Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок, $\rho = \rho(\infty) \geq 1$ – целое число. Пусть мера μ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и не нагружает круг $B(0,1)$. Пусть последовательность мер μ_{t_n} $(t_n \to \infty)$ широко сходится к мере ν. Тогда последовательность функций*

$$\upsilon_n(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta) d\mu_{t_n}(\zeta)$$

сходится к функции

$$\upsilon(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta) d\nu(\zeta)$$

в пространствах $L_{1,loc}(\mathbb{C})$ и $L(\alpha)$, где $\alpha > \rho + 2$.

Доказательство. Из того, что мера μ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и не нагружает круг $B(0,1)$, следует, что существует постоянная M_1 такая, что для всех $r > 0$ будет выполняться неравенство

$$|\mu_{t_n}|(B(0,r)) \leq M_1 \frac{V(t_n r)}{V(t_n)}.$$

Применяя неравенство (1.4), получим

$$|\mu_{t_n}|(B(0,r) \leq M_1 \gamma(r) r^\rho.$$

Так как $\nu \in Fr[\mu]$, то из теоремы 2.1 следует, что существует постоянная M_2 такая, что для всех $r > 0$ будет выполняться неравенство

$$|\nu|(B(0,r)) \leq M_2 r^\rho.$$

Обозначим $\alpha_n = \mu_{t_n} - \nu$. Тогда существует постоянная M такая, что выполняется неравенство

$$|\alpha_n|(B(0,r)) \le M_3\gamma(r)r^{\rho},\ r > 0. \tag{3.40}$$

Пусть d – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $d \ge 2$. Имеем

$$\begin{aligned} A_n &= \int\limits_{B(0,d)} |v_n(z) - v(z)| dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,d)} \left| \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) \right| dm_2(z) \\ &= \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,d)} s(z)\chi_{B(0,|z|)}(\zeta) K_{\rho-1}(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z), \end{aligned} \tag{3.41}$$

где

$$s(z) = sign\ g(z),$$

$$g(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\rho-1} f_k(z),$$

$$f_0(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} \ln\left|1 - \frac{1}{\zeta}\right| d\alpha_n(\zeta),$$

$$f_k(z) = \frac{1}{k} Re \left(z^k \int\limits_{B(0,|z|)} \frac{1}{\zeta^k} d\alpha_n(\zeta) \right),\ k = \overline{1, \rho - 1}.$$

Функция $\int\limits_{B(0,|z|)} \frac{1}{\zeta^k} d\alpha_n(\zeta)$ является линейной комбинацией с комплексными коэффициентами возрастающих функций переменной $|z|$. Поэтому это борелевская функция в $\mathbb{C}$. Из этого, в свою очередь, следует, что функции $f_k(z),\ k = \overline{1, \rho - 1}$, являются борелевскими функциями в плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}_0(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} \ln|z-\zeta|\, d\alpha_n(\zeta) = \int\limits_{B(0,|z|)} \chi_{B(0,|z|)}(\zeta)\ln|z-\zeta|\, d\alpha_n(\zeta).$$

Функция $\chi_{B(0,|z|)}(\zeta)\ln|z-\zeta|$ является борелевской функцией переменных $z,\ \zeta$. Имеем

$$I = \int\limits_{B(0,d)}\int\limits_{B(0,d)} \chi_{B(0,|z|)}(\zeta)\left|\ln|z-\zeta|\right| d\alpha_n(\zeta)$$

$$\leq \int\limits_{B(0,d)} \left(\int\limits_0^d \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|\ln\left|re^{i\varphi}-\zeta\right|\right| d\varphi\right) rdr\right) d|\alpha_n|(\zeta).$$

Далее находим

$$\int\limits_0^{2\pi} \left|\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\right| d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(2\ln^+|re^{i\varphi}-\zeta| - 2\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\right) d\varphi$$
$$\leq 4\pi\ln 2d + 4\pi\min\left(\ln\frac{1}{r},\ \ln\frac{1}{|\zeta|}\right). \tag{3.42}$$

$$\int\limits_0^d \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|\ln|re^{i\varphi}-\zeta|\right| d\varphi\right) rdr$$
$$\leq 2\pi d^2\ln 2d - 2\pi\left(2\ln|\zeta|\int\limits_0^{|\zeta|} rdr + 2\int\limits_{|\zeta|}^d r\ln r dr\right) \leq M_4(d). \tag{3.43}$$

Из полученных неравенств следует, что величина I конечна. Отсюда и из теоремы Тонелли [14] следует, что функция $\chi_{B(0,|z|)}\ln|z-\zeta|$ принадлежит пространству $L_1(B(0,d)\times B(0,d), dm_2\times d\alpha_n)$. Далее из теоремы Фубини [14] следует, что функция $\tilde{f}_0(z)$ интегрируема по мере m_2 и, в частности, является борелевской функцией. Далее последовательно получаем, что борелевскими являются функции $f_0(z), g(z), s(z)$. Поэтому функция $h(z,\zeta) = s(z)\chi_{B(0,|z|)}(\zeta)K_{\rho-1}(z,\zeta)$ как функция переменных z,ζ также является борелевской на любом множестве $B(0,d)\times B(0,d)$.

Мы доказали конечность величины I. Аналогично доказывается конечность интеграла

$$\int\limits_{B(0,d)} \left(\int\limits_{B(0,d)} |h(z,\zeta)| dm_2(z) \right) d|\alpha_n|(\zeta).$$

Из этого и теоремы Тонелли [14] следует, что

$$h(z,\zeta) \in L_1(B(0,d) \times B(0,d), dm_2 \times d\alpha_n). \tag{3.44}$$

Обратим внимание, что это означает конечность четырёх интегралов

$$\int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,d)} \left(h(z,\zeta)^{\pm}\right) dm_2(z) d\alpha_n^{\pm}(\zeta).$$

Из соотношения (3.23), равенства (3.41) и теоремы Фубини [14] следует, что

$$A_n = \int\limits_{B(0,d)} p(\zeta) d\alpha_n(\zeta), \tag{3.45}$$

где

$$p(\zeta) = \int\limits_{B(0,d)} s(z) \chi_{B(0,|z|)}(\zeta) K_{\rho-1}(z,\zeta) dm_2(z) = \int\limits_{R([|\zeta|,d])} s(z) K_{\rho-1}(z,\zeta) dm_2(z).$$

Докажем, что функция $p(\zeta)$ непрерывна на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Легко увидеть, что непрерывность функции $p(\zeta)$ следует из непрерывности функции

$$q(\zeta) = \int\limits_{R([|\zeta|,d])} \ln|z-\zeta| s(z) dm_2(z).$$

Будем считать для определенности, что выполняется неравенство $|\zeta_0| \leq |\zeta|$. Имеем

$$|q(\zeta) - q(\zeta_0)| \leq \int\limits_{R([|\zeta_0|,d])} \left| \ln \left| \frac{z-\zeta}{z-\zeta_0} \right| \right| dm_2(z) + \int\limits_{R([|\zeta_0|,|\zeta|])} \left| \ln|z - z_0| \right| dm_2(z)$$

$$\leq \int\limits_{R([|\zeta_0|,d])} \ln\left(1 + \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-\zeta_0|}\right) dm_2(z) + \int\limits_{|\zeta_0|}^{|\zeta|} \left(\int\limits_0^{2\pi} |\ln|re^{i\varphi} - \zeta_0|| d\varphi \right) r dr$$

$$= J_1 + J_2.$$

Из неравенства (3.42) следует неравенство

$$J_2 \le 2\pi|\zeta|\left(\ln 2d + \ln\frac{1}{|\zeta_0|}\right)(|\zeta| - |\zeta_0|).$$

Также справедливо неравенство

$$J_1 \le \int\limits_{B(\zeta_0,2d)} \ln\left(1 + \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-\zeta_0|}\right) dm_2(z).$$

Вводя в последнем интеграле полярные координаты с полюсом в точке ζ_0, получим

$$J_2 \le 2\pi\int\limits_0^{2d} r\ln\left(1+\frac{|\zeta-\zeta_0|}{r}\right) dr.$$

Теперь непрерывность функции $q(\zeta)$ на множестве $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ становится очевидной. Таким образом, мы доказали непрерывность функции $p(\zeta)$ на множестве $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Заметим, что выполняется равенство $p(\zeta) = 0$ при $|\zeta| = d$. Если считать, что $p(\zeta) = 0$ при $|\zeta| \ge d$, то равенство (3.45) можно переписать в виде

$$A_n = \int p(\zeta)d\alpha_n(\zeta), \tag{3.46}$$

где $p(\zeta)$ – финитная функция непрерывная на множестве $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Если бы функция $p(\zeta)$ была непрерывна во всей плоскости, то из равенства (3.46) уже бы следовало соотношение $A_n \to 0\ (n\to\infty)$. Однако, это не так. Поэтому требуются дополнительные рассуждения. Будем оценивать функцию $p(\zeta)$. Из неравенств (3.24), (3.43) следует оценка

$$|p(\zeta)| \le \frac{M_1(d)}{|\zeta|^{\rho-1}},\ |\zeta|\le 1.$$

Пусть теперь ε – произвольное число из интервала $(0,\frac{1}{2})$, $1 = \psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta)$ – непрерывное разбиение единицы такое, что $supp\ \psi_1 \subset$

$B(0,2\varepsilon),\ supp\,\psi_2 \cap B(0,\varepsilon) = \emptyset$. Тогда из следует

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_1(d) \int\limits_{B(0,2\varepsilon)} \frac{d|\alpha_n|(\zeta)}{|\zeta|^{\rho-1}} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int \psi_2(\zeta) p(\zeta) d\alpha_n(\zeta) \right| \\ = M_2(d)\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{B(0,2\varepsilon)} \frac{d|\alpha_n|(\zeta)}{|\zeta|^{\rho-1}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Если $\rho = 1$, то из полученного неравенства легко следует, что $A_n \to 0\ (n \to \infty)$. В дальнейшем будем считать, что $\rho > 1$. Имеем

$$\int\limits_0^{2\varepsilon} \frac{d|\alpha_n|(t)}{t^{\rho-1}} = \frac{|\alpha_n|(B(0,2\varepsilon)}{(2\varepsilon)^{\rho-1}} + \frac{1}{\rho-1} \int\limits_0^{2\varepsilon} \frac{|\alpha_n|(B(0,t))}{t^\rho} dt.$$

Из этого равенства, неравенств (3.40), (3.47), получаем первое утверждение леммы. Второе утверждение является простым следствием первого. Лемма доказана. □

Лемма 3.11. *Пусть* $\rho(r)$ *– уточнённый порядок,* $\rho = \rho(\infty) \ge 1$ *– целое число. Пусть мера* μ *является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *и не нагружает круг* $B(0,1)$. *Пусть последовательность мер* μ_{t_n} $(t_n \to \infty)$ *широко сходится к мере* ν. *Тогда последовательность функций*

$$\upsilon_n(z) = \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta) d\mu_{t_n}(\zeta)$$

сходится к функции

$$\upsilon(z) = \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta) d\nu(\zeta)$$

в пространствах $L_{1,loc}(\mathbb{C})$ *и* $L(\alpha)$, *где* $\alpha > \rho + 2$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_n = \mu_{t_n} - \nu$. Пусть d – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $d \geq 2$. Имеем

$$
\begin{aligned}
B_n &= \int\limits_{B(0,d)} |\upsilon_n(z) - \upsilon(z)| dm_2(z) \\
&= \int\limits_{B(0,d)} \left| \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) \right| dm_2(z) \\
&= \int\limits_{B(0,d)} \int s(z) \chi_{CB(0,|z|)}(\zeta) K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z),
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

где

$$
s(z) = sign \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta).
$$

Пусть $N > d$ – произвольное число, $1 = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta)$ – непрерывное разбиение единицы такое, что $supp\,\psi_1 \subset B(0,2N)$, $supp\,\psi_2 \cap B(0,N) = \emptyset$. Тогда равенство (3.48) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
B_n &= \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{R((|z|,2N])} s(z) \psi_1(\zeta) K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z) \\
&+ \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{CB(0,N)} s(z) \psi_2(\zeta) K_\rho(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z) \\
&= J_{1,n} + J_{2,n}.
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

Будем исследовать каждый из интегралов. Имеем

$$
J_{1,n} = \int\limits_{B(0,d)} \int\limits_{B(0,2N)} h(z,\zeta) d\alpha_n(\zeta) dm_2(z),
$$

где $h(z,\zeta) = s(z)\psi_1(\zeta)\chi_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta)$.

Далее, повторяя рассуждение в лемме 3.10, получим

$$
h(z,\zeta) \in L_1(B(0,d) \times B(0,2N), dm_2 \times d\alpha_n).
$$

Отсюда и из теоремы Фубини [14] следует, что

$$
J_{1,n} = \int\limits_{B(0,2N)} p(\zeta) d\alpha_n(\zeta), \tag{3.50}
$$

$$p(\zeta) = \int\limits_{B(0,2N)} s(z)\psi_1(\zeta)\chi_{CB(0,|z|)}(\zeta)K_\rho(z,\zeta)dm_2(z)$$
$$= \int\limits_{B(0,|\zeta|)} s(z)\psi_1(\zeta)K_\rho(z,\zeta)dm_2(z).$$

Заметим, что $p(\zeta) = 0$ при $\zeta = 0$. Далее, применяя рассуждение, приведенное после равенства (3.45) леммы 3.10, получим, что функция $p(\zeta)$ непрерывна на множество $B(0, 2N)$.

Заметим, что выполняется равенство $p(\zeta) = 0$ при $|\zeta| = 2N$. Если считать, что $p(\zeta) = 0$ при $|\zeta| = 2N$, то равенство (3.50) можно переписать в виде

$$J_{1,n} = \int p(\zeta)d\alpha_n(\zeta), \tag{3.51}$$

где $p(\zeta)$ – финитная функция непрерывная в $\mathbb{C}$. Тогда из условия леммы следует, что

$$\lim_{n\to\infty} J_{1,n} = 0.$$

Отсюда и из неравенства (3.49) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, J_{1,n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, J_{2,n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, J_{2,n}$$
$$\le M(\rho,d)\,\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_N^\infty \frac{d|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho+1}}, \tag{3.52}$$

где $M(\rho, d)$ – некоторая постоянная, зависящая только от ρ, d. Интегрируя по частям последний интеграл, имеем

$$\int\limits_N^\infty \frac{d|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho+1}} = \frac{|\alpha_n|(B(0,N))}{N^{\rho+1}} + \int\limits_N^\infty \frac{|\alpha_n|(B(0,t))}{t^{\rho+2}}dt.$$

Из этого равенства, неравенства $|\alpha_n|(B(0,t)) \le Mt^\rho\gamma(t)$ и неравенства (3.52) следует, что $B_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение является простым следствием первого. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.12. *Пусть* $\rho(r)$ *– уточнённый порядок,* $\rho = \rho(\infty) > 0$ *– нецелое число,* $p = [\rho]$*. Пусть мера* μ *является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$ *и не нагружает круг* $B(0,1)$*. Пусть последовательность мер* μ_{t_n} $(t_n \to \infty)$ *широко сходится к мере* ν*. Тогда последовательность функций*

$$\upsilon_n(z) = \int K_p(z,\zeta)d\mu_{t_n}(\zeta)$$

сходится к функции

$$\upsilon(z) = \int K_p(z,\zeta)d\nu(\zeta)$$

в пространствах $L_{1,loc}(\mathbb{C})$ *и* $L(\alpha)$*, где* $\alpha > \rho + 2$*.*

Доказательство. Имеем

$$\upsilon_n(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_p(z,\zeta)d\mu_{t_n}(\zeta) + \int\limits_{CB(0,|z|)} K_p(z,\zeta)d\mu_{t_n}(\zeta).$$

ИЗ лемм 3.10, 3.11 следует, что справедлива также и лемма 3.12. □

Теорема 3.6. *Пусть* w*(z) –* δ*-субгармоническая в* $\mathbb{C}$ *функция не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$*, причём* $\rho = \rho(\infty) > 0$ *– целое число. Пусть* μ *– риссовская мера функции* w*. Пусть множества* $Fr[\mathrm{w}]$ *и* $Fr[\mu]$ *построены с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$*. Для того, чтобы* δ*-субгармоническая функция* $\upsilon(z)$ *принадлежала множеству* $Fr[\mathrm{w}]$*, необходимо и достаточно, чтобы существовали мера* $\nu \in Fr[\mu]$ *и функция* $a(r)$ *вида*

$$a(|z|) = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n^\rho}{V(t_n)} \left(c_\rho + \frac{1}{\rho} \int\limits_{B(0,|z|t_n)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho} \right),\ (t_n \to \infty)$$

такие, что

$$\upsilon(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta)d\nu(\zeta) + \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta)d\nu(\zeta) + Re\ a(|z|)z^\rho.$$

Замечание. Для субгармонической функции аналогичное утверждение было получено в работах Содина [24], а также Гришина и Шуиги [10].

Доказательство. Применяя теорему 3.4 и лемму 3.9, имеем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_t(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta)d\lambda_t(\zeta) + \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta)d\lambda_t(\zeta) \\
+ Re\, \frac{t^\rho}{V(t)}\left(c_\rho + \frac{1}{\rho}\int\limits_{B(0,|z|t)} \frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta^\rho}\right) z^\rho + o(1),
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

при $t \to \infty$. Здесь λ – ограничение меры μ на внешность круга $B(0,1)$.

Пусть $\upsilon \in Fr[\mathrm{w}]$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\mathrm{w}_{t_n}(z) \to \upsilon$, $\mu_{t_n} \to \nu$. Если в равенстве (3.53) взять $t = t_n$, применяя леммы 3.10, 3.11, то получим, что для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{C})$ существует предел

$$
\lim_{t_n\to\infty} Re \int z^\rho \varphi(z) \left(\frac{t_n^\rho}{V(t_n)}\left(c_\rho + \frac{1}{\rho}\int\limits_{B(0,|z|t_n)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\right)\right) dm_2(z).
$$

Это эквивалентно существованию предела

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^\rho}{V(t_n)}\left(c_\rho + \frac{1}{\rho}\int\limits_{B(0,|z|t_n)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^\rho}\right) = a(|z|). \tag{3.54}
$$

Из этого следует равенство

$$
\upsilon(z) = \int\limits_{B(0,|z|)} K_{\rho-1}(z,\zeta)d\nu(\zeta) + \int\limits_{CB(0,|z|)} K_\rho(z,\zeta)d\nu(\zeta) + Re\, a(|z|)z^\rho. \tag{3.55}
$$

Обратно, если $\nu \in Fr[\mu]$, далее построить функцию $a(|z|)$ по формуле (3.54), затем построить функцию υ по формуле (3.55), то получим функцию $\upsilon(z)$ из предельного множества $Fr[\mathrm{w}]$. Теорема доказана. □

Из леммы 3.12 следует более простая теорема

Теорема 3.7. *Пусть* w*(z) –* δ*-субгармоническая в* $\mathbb{C}$ *функция не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка* $\rho(r)$*, причём* $\rho = \rho(\infty) > 0$ *– нецелое число. Пусть* μ *– риссовская мера функции* w.

Пусть множества $Fr[\mathrm{w}]$ *и* $Fr[\mu]$ *построены с помощью уточнённого порядка* $\rho(r)$. *Для того, чтобы* δ*-субгармоническая функция* $v(z)$ *принадлежала множеству* $Fr[\mathrm{w}]$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала мера* $\nu \in Fr[\mu]$ *такая, что*

$$v(z) = \int K_p(z,\zeta)d\nu(\zeta),\ p = [\rho].$$

3.5. Целые функции с наперёд заданным нулевым уточнённым порядком

Пусть $f(z)$ – целая функция. Мы будем пользоваться стандартным обозначением $M(r,f) = \max\limits_{\theta} |f(re^{i\theta})|$.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется уточнённым целой функции $f(z)$, если выполняется условие

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = \sigma \in (0,\infty).$$

Если $f(z)$ – целая функция, то $v(z) = \ln|f(z)|$ есть субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Как показал Валирон (см. например [18], глава 1, §12, теорема 16) у всякой целой функции конечного порядка ρ,

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

существует уточнённый порядок $\rho(r)$.

В этом разделе изучается вопрос: “Какой должен быть уточнённый порядок $\rho(r)$, чтобы он был уточнённым порядком целой трансцендентной функции ?”

Вначале обсудим случай, когда $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$, и когда ответ на поставленный выше вопрос известен.

Нам будет нужно следующее понятие. Дважды дифференцируемая функция $h(\theta)$ на интервале (α,β) называется ρ-тригонометрически выпуклой, если выполняется неравенство $h''(\theta) + \rho^2 h(\theta) \geq 0$. В общем случае одно из эквивалентных определений ρ-тригонометрической выпуклости таково. Функция $h(\theta)$ называется ρ-тригонометрически выпуклой на интервале (α, β), если она непрерывна и функция $h''(\theta) + \rho^2 h(\theta)$, рассматриваемая как обобщённая функция Шварца на интервале (α, β), является положительной мерой.

Некоторые свойства ρ-тригонометрически выпуклых функций изложены в [18], глава 1, §16.

Для целых функций уточнённого порядка $\rho(r) \equiv \rho$ (такие функции называются функциями порядка ρ и нормального типа) Линделёф ввёл понятие индикатора. Это понятие распространяется на произвольные уточнённые порядки и произвольные субгармонические функции. Функция $h(\theta)$ вида

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}$$

называется индикатором субгармонической функции $v(z)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Индикатор целой функции $f(z)$ – это индикатор субгармонической функции $v(z) = \ln|f(z)|$.

Известно ([18], глава 1, §16), что если $\rho(r)$ – уточнённый порядок субгармонической функции $v(z)$, то её индикатор есть ненулевая ρ-тригонометрически выпуклая функция. Правда, в [18] доказательство приведено для случая, когда $v(z) = \ln|f(z)|$. Однако, оно без изменения распространяется на случай произвольных субгармонических функций.

В начало двадцатого века был открытым вопрос о существовании целой функции с заданным индикатором относительно заданного уточнённого порядка $\rho(r)$. В дальнейшем этот вопрос получил положительное решение, полученное Бернштейным В. [28], [29], Левиным Б. Я. [18], глава 2, §1, теорема 3 и Логвиненко В. Н. [19]. Теперь можно предложить более простое решение, чем в цитированных работах. Пусть $h(\theta)$ – произвольная 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция. Тогда функция $v(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$ есть субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция с индикатором

$h(\theta)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r) \equiv \rho$. Из этого и теоремы 4 из [10] следует, что если $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, то существует субгармоническая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Далее применяется теорема о приближении произвольной субгармонической функции $\upsilon(z)$ субгармоническими функциями вида $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ – целая функция. Теоремы такого типа доказывались различными авторами. Основопологающий результат в этом направлении принадлежит Юлмухаметову [26] .

Теорема 3.8. (Юлмухаметов Р. С.). Пусть υ – субгармоническая функция в $\mathbb{C}$ конечного порядка $\rho > 0$. Тогда существует целая функция $f(z)$ порядка ρ такая, что

$$\upsilon(z) - \ln|f(z)| = O(\ln|z|),$$

когда z стремится к бесконечности вне множества кругов $|z - z_j| < r_j$ таких, что $\sum\limits_{r_j \geq r} r_j = o(r^{\rho-\alpha})$ для любого наперёд заданного $\alpha \geq \rho$.

Из сказанного следует, что для любой ρ-тригонометрически выпуклой функции $h(\theta)$ и любого уточнённого порядка $\rho(r)$ такого, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$ существует целая функция $f(z)$ с индикатором $h(\theta)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Так как

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{V(r)} = \max_{\theta} h(\theta),$$

то тем самым доказано, что для любого уточнённого порядка $\rho(r)$ такого, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$ существует целая функция уточнённого порядка $\rho(r)$.

Для случая, когда $\rho = 0$ вопрос о существовании такой целой функции оставался открытым до настоящего времени. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3.9. Пусть $\rho(r)$ – заданный нулевой уточнённый порядок. Для того, чтобы существовала целая трансцендентная функция $f(z)$, для которой уточнённый порядок $\rho(r)$ был бы уточнённым порядком этой функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{V(r)}=0. \tag{3.56}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Эта часть теоремы очевидна. Действительно, пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция уточнённого порядка $\rho(r)$. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,f)}{V(r)}=\sigma\in(0,\infty),\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{\ln M(r,f)}=0,$$
$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln r}{V(r)}\le\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln r}{\ln M(r,f)}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,f)}{V(r)}=0.$$

Тем самым равенство (3.56) доказано.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для того, чтобы доказать теорему, достаточно её доказать для какого либо уточнённого порядка $\rho_1(r)$ эквивалентного $\rho(r)$. Тогда, как следует из теоремы 1.5, можно дополнительно считать, что $V(r)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $(0,\infty)$. Из сказанного также следует, что теорему достаточно доказывать для какого-нибудь уточнённого порядка $\rho_1(r)$, который совпадает с $\rho(r)$ на некоторой полуоси $[a,\infty)$. Поэтому имея ввиду (3.56), можно дополнительно считать, что на полуоси $[1,\infty)$ выполняется неравенство $V(r)\ge\ln r+1$, а на сегменте $[1,e]$ выполняется равенство $V(r)=\ln r+1$.

Поэтому дальнейшее доказательство теоремы мы будем вести, считая что выполняются дополнительные условия:

1) $V(r)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $(0,\infty)$,

2) при $r\ge 1$ выполняется неравенство $V(r)\ge\ln r+1$,

3) на сегменте $[1,e]$ выполняется равенство $V(r)=\ln r+1$.

Так как доказательство достаточно длинное, мы разобьём его на несколько этапов.

1. Обозначим $\varphi(x)=V(e^x)$. Функция $\varphi(x)$ обладает свойствами:

1) $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $[0,\infty)$,

2) при $x \geq 0$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geq x+1$,

3) на сегменте $[0,1]$ выполняется равенство $\varphi(x) = x+1$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Заметим, что свойство 4) следует из равенства (3.56), а свойство 5) следует из равенства

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{e^x V'(e^x)}{V(e^x)} = \rho(e^x) + xe^x\rho'(e^x),$$

и свойств уточнённого порядка (из определения уточнённого порядка).

Пусть k – произвольное вещественное число. Так как $\varphi(x)$ выпукла, то выполняется равенство

$$\lim_{x\to\infty} (\varphi(x) - kx) = \infty.$$

Поэтому функция $\varphi(x) - kx$ на полуоси $[0,\infty)$ имеет минимальное значение, которое мы обозначим через $b(k)$. Заметим, что $b(k)$ – убывающая непрерывная функция и что $b(k) = 1$ при $k \leq 1$.

2. Множество решений уравнения $\varphi(x) = kx + b(k)$ есть непустой компакт F_k. Обозначим

$$\tilde{x}_k = \min F_k, \qquad x_k = \max F_k. \tag{3.57}$$

Прямая $\ell(k): \ y = kx + b(k)$ есть опорная прямая к кривой $\mathscr{L}: \ y = \varphi(x)$ и точки $(\tilde{x}_k, \varphi(\tilde{x}_k))$, $(x_k, \varphi(x_k))$ являются точками опоры для прямой $\ell(k)$ и кривой $\mathscr{L}$.

Тем самым доказано, что у кривой $\mathscr{L}$ есть опорная прямая $\ell(k)$ с угловым коэффициентом k и что кривая $\mathscr{L}$ располагается над прямой $\ell(k)$.

Из свойства 4) функции $\varphi(x)$ следует, что кривая $\mathscr{L}$ не лежит ни в какой полуплоскости $y \leq kx + b$. Поэтому множество опорных прямых к кривой $\mathscr{L}$, которые имеют угловой коэффициент k, содержит единственный элемент $\ell(k)$.

Мы будем рассматривать величины $\tilde{x}_k, x_k$ как функции переменной k. Изучим свойства этих функций. Рассмотрим прямые $\ell(k)$ и $\ell(k_1)$ где $k < k_1$. Точка пересечения этих прямых есть точка $M(\xi, k\xi + b(k))$, где $\xi = \frac{b(k)-b(k_1)}{k_1-k}$.

Пусть h_1 – открытый луч, лежащий на прямой $\ell(k): \ y = kx + b(k)$, который есть образ полуоси (ξ, ∞). Поскольку кривая $\mathscr{L}$ лежит над прямой $\ell(k_1)$, а луч h_1 лежит строго под прямой $\ell(k_1)$, то на луче h_1 нет точек кривой $\mathscr{L}$. Точка $(x_k, kx_k + b(k))$ лежит на кривой $\mathscr{L}$ и прямой $\ell(k)$ и не лежит на луче h_1. Значит $x_k \leq \xi$. Аналогично доказывается, что $\xi \leq \tilde{x}_{k_1}$. Тем самым доказано неравенство $x_k \leq \tilde{x}_{k_1}$.

Так как $\mathscr{L}$ – гладкая кривая, то опорная прямая к этой кривой является касательной к этой кривой в точке опоры. Поэтому $\varphi'(x_k) = k, \ \varphi'(\tilde{x}_{k_1}) = k_1 > k, \ x_k < \tilde{x}_{k_1}$. Из этого неравенства и очевидного неравенства $\tilde{x}_k \leq x_k$ следует, что функции $\tilde{x}_k, \ x_k$ являются строго возрастающими. Докажем ещё, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \infty. \tag{3.58}$$

Если это не так, то существует число $a > 0$ такое, что $\lim x_k = a \ (k \to \infty)$. Это равенство и равенство $\varphi'(x_k) = k$, противоречат тому, что функция φ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Тем самым равенство (3.58) доказано.

3. Пусть g_1 – открытый отрезок на прямой $\ell(k)$, являющийся образом интервала $(0, \tilde{x}_k)$ при отображении $y = kx + b(k), \ g_2$ – открытый луч на прямой $\ell(k)$, являющийся образом луча (x_k, ∞) при том же отображении.

Докажем, что через каждую точку отрезка g_1 проходит опорная прямая к кривой $\mathscr{L}$ с некоторым угловым коэффициентом $k_1 < k$, а через каждую точку луча g_2 проходит опорная прямая к кривой $\mathscr{L}$ с некоторым угловым коэффициентом $k_2 > k$.

Пусть M – произвольная точка луча g_2. Её координаты имеют вид $(t, kt + b(k))$, где t – некоторые число на полуоси (x_k, ∞). Покажем, что существует $\delta = \delta(t) > 0$ такое, что при любом $\lambda \in [k, k + \delta)$ луч A_λ прямой $y - kt - b(k) = \lambda(x - t)$, являющийся образом полуоси $[t, \infty)$ не пересекается с кривой $\mathscr{L}$. Если это не так, то существует последовательность $\xi_n \geq t$ такая , что выполняется равенство

$$\varphi(\xi_n) = kt + b(k) + \left(k + \frac{1}{n}\right)(\xi_n - t). \tag{3.59}$$

Из того равенства и свойства 4) функции $\varphi(x)$ следует, что последовательность ξ_n ограничена. Поэтому у последовательности ξ_n есть сходящаяся подпоследовательность ξ_{n_m}. Если $\xi = \lim \xi_{n_m}$ $(m \to \infty)$, то $\xi \geq t > x_k$. Беря в равенстве (3.59) $n = n_m$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получим равенство $\varphi(\xi) = k\xi + b(k)$. Это равенство противоречит определению x_k.

Тем самым доказано, что существуют числа $\delta > 0$ такие, что для любого $\lambda \in [k, k+\delta)$ луч A_λ не пересекается с кривой $\mathscr{L}$. Пусть δ_2 – точная верхняя грань таких δ. Очевидно, что $\delta_2 < \infty$. Пусть $k_2 = k + \delta_2$. Легко проверить, что прямая $y - kt - b(k) = k_2(x - t)$, проходящая через точку M является опорной прямой к кривой $\mathscr{L}$.

Тем самым часть сформулированного выше утверждения, относящаяся к лучу g_2 доказана.

Аналогично доказывается другая часть утверждения относящаяся к отрезку g_1. На этом мы заканчиваем доказательство сформулированного нами утверждения.

4. Определим на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$$\varphi_1(x) = \sup_k (kx + b(k)).$$

Для любых $x \geq 0$ и $k \in (-\infty, \infty)$ выполняется неравенство $kx + b(k) \leq \varphi(x)$. Из этого следует, что

$$\varphi_1(x) \leq \varphi(x), \ x \in [0, \infty). \tag{3.60}$$

Так как $\sup\limits_k(kx+b(k)) \geq x+b(1) = x+1$, то выполняется неравенство $\varphi_1(x) \geq x+1$. Так как на сегменте $[0,1]$ выполняется равенство $\varphi(x) = x+1$, то на том же сегменте выполняется равенство $\varphi_1(x) = x+1$. Так как при $k \leq 1$ выполняются соотношения $kx+b(k) = kx+1 \leq x+1$, то справедливо равенство

$$\varphi_1(x) = \sup_{k\geq 1}(kx+b(x)). \tag{3.61}$$

Так как при $k \geq 1$ функция $kx+b(k)$ возрастает по переменной x, то $\varphi_1(x)$ – возрастающая функция на полуоси $[0,\infty)$. Так как $\varphi_1(x)$ есть верхняя огибающая семейства линейных функций, то $\varphi_1(x)$ – выпуклая функция на полуоси $[0,\infty)$.

5. Прямая $\ell(k)$ является опорной прямой для кривой $\mathscr{L}$. Пусть $(\tau,\varphi(\tau))$ – произвольная точка опоры для прямой $\ell(k)$. Тогда выполняется равенство $k\tau+b(k) = \varphi(\tau)$. Так как $\varphi_1(x) \leq \varphi(x)$, то $\varphi_1(\tau) \leq \varphi(\tau) = k\tau+b(k)$. С другой стороны из определения φ_1 следует неравенство $\varphi_1(\tau) \geq k\tau+b(k) = \varphi(\tau)$. Таким образом получаем равенство $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$.

Опорная прямая к гладкой кривой является касательной к этой кривой в точке опоры. Поэтому $\varphi'(\tau) = k$.

Имеем систему условий:

1) $\varphi_1(x) \leq \varphi(x)$,

2) $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$,

3) φ – дифференцируемая функция,

4) φ_1 – выпуклая функция.

Из этих условий следует, что функция φ_1 является дифференцируемой в точке τ и что выполняется равенство $\varphi_1'(\tau) = \varphi'(\tau)$.

В частности, функция φ_1 дифференцируема в точках $\tilde{x}_k$ и x_k и выполняются равенства $\varphi_1'(\tilde{x}_k) = \varphi_1'(x_k) = k$. Если выполняется неравенство $\tilde{x}_k < x_k$, то на сегменте $[\tilde{x}_k, x_k]$ функция φ_1 является линейной. Таким образом функция φ_1 является дифференцируемой на интервале $(\tilde{x}_k, x_k)$.

Дифференцируемость φ_1 в точках $\tilde{x}_k$ и x_k была доказана ранее. Таким образом функция φ_1 дифференцируема в каждой точке сегмента $[\tilde{x}_k, x_k]$. Здесь уже на необходимости предполагать, что этот сегмент невырожденный.

6. Теперь докажем равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x} = \infty. \tag{3.62}$$

Из равенства $\varphi_1(x_k) = \varphi(x_k)$ и свойства 4) функции $\varphi(x)$ (см. пункт 1.) следует, что функция $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ является неограниченной на полуоси $[1, \infty)$. Поскольку φ_1 – выпуклая функция, то $(\varphi_1)'_+(x)$ – возрастающая функция. Поэтому существует $\lim(\varphi_1)'_+(x)$ $(x \to \infty)$. Если этот предел конечный, то это противоречит неограниченности функции $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ на полуоси $[1, \infty)$. Поэтому $\lim \left(\varphi_1\right)'_+(x) = \infty$ $(x \to \infty)$. Из этого следует равенство (3.62).

7. Из равенства (3.62) следует, что кривая $\mathscr{L}_1 : \ y = \varphi_1(x), \ x \in [0, \infty)$ не лежит ни в какой полуплоскости $y \le kx + b$. Поэтому при любом вещественном k у кривой $\mathscr{L}_1$ имеется не более чем одна опорная прямая с угловым коэффициентом k. Прямая $\ell(k)$ есть единственная опорная прямая к кривой $\mathscr{L}$, которая имеет угловой коэффициент k. Эта прямая также является опорной к кривой $\mathscr{L}_1$, причём точки $(\tilde{x}_k, \varphi_1(\tilde{x}_k))$ и $(x_k, \varphi_1(x_k))$ являются точками опоры для этой прямой. Эта прямая является единственной опорной прямой к кривой $\mathscr{L}_1$, которая имеет угловой коэффициент k. Следовательно, у кривых $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_1$ одно и тоже множество опорных прямых.

8. Теперь докажем, что функция $\varphi_1(x)$ является дифференцируемой функцией на полуоси $(0, \infty)$. Пусть τ – произвольное строго положительное число. Нам нужно доказать существование $\varphi_1'(\tau)$. Поскольку $\varphi(x) = x + 1$ на сегменте $[0, 1]$, то можно считать, что $\tau \ge 1$. Если $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$, то как следует из рассуждений, приведённых на этапе 5 доказательства, в этом случае функция φ_1 будет дифференцируемой в точке τ.

Предположим теперь, что выполняется неравенство $\varphi_1(\tau) < \varphi(\tau)$. Проведём через точку $(\tau, \varphi_1(\tau))$ прямую ℓ_1 опорную к кривой $\mathscr{L}_1$. Так как функция φ_1 выпукла, то такая прямая существует. Из рассуждений, приведённых на этапе 7 следует, что прямая ℓ_1 совпадает с одной из прямой $\ell(k)$.

Докажем, что выполняется неравенство $\tilde{x}_k \le \tau \le x_k$. Предположим, что выполняется неравенство $x_k < \tau$. Пусть τ_1 такое число, что $x_k < \tau_1 < \tau$. Из рассуждений приведённых на этапе 3 следует, что через точку $(\tau_1, k\tau_1 + b(k))$, лежащую на прямой $\ell(k)$ можно провести прямую ℓ_2 опорную к кривой $\mathscr{L}$, угловой коэффициент которой k_1 строго больше чем k. Прямая ℓ_2 будет опорной прямой также к кривой $\mathscr{L}_1$. Поэтому кривая $\mathscr{L}_1$ лежит над прямой ℓ_2. С другой стороны точка $(\tau, k\tau + b(k))$ лежит на кривой $\mathscr{L}_1$ и строго под прямой ℓ_2. Полученное противоречие доказывает неравенство $\tau \le x_k$. Аналогично доказывается неравенство $\tilde{x}_k \le \tau$. Из рассуждений, приведённых на этапе 4 следует дифференцируемость функции φ_1 в точке τ. Дифференцируемость функции φ_1 доказана.

9. Мы заканчиваем изучение свойств функции φ_1 доказательством равенства

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = 0. \tag{3.63}$$

Обозначим $F = \{x \ge 0 : \ \varphi_1(x) = \varphi(x)\}$. Это неограниченное множество.

Пусть ε – произвольное строго положительное число. Существует $\xi \in F$ такое, что при $x \ge \xi$ будет выполняться неравенство $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} < \varepsilon$. Пусть $x > \xi$. Если $x \in F$, то $\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} < \varepsilon$. Пусть теперь $x \notin F$. Из рассуждений, приведённых на предыдущем этапе следует, что существует k такое, что выполняется неравенство $\tilde{x}_k \le x \le x_k$. Из этого неравенства и соотношения $x \notin F$ следует неравенство $\tilde{x}_k < x < x_k$. Предположим, что выполняется неравенство $\tilde{x}_k \ge \xi$. Используя то, что φ_1 – линейная возрастающая функция на сегменте $[\tilde{x}_k, x]$ получим

$$\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} \le \frac{\varphi_1'(\tilde{x}_k)}{\varphi_1(\tilde{x}_k)} = \frac{\varphi'(\tilde{x}_k)}{\varphi(\tilde{x}_k)} < \varepsilon.$$

Если же выполняется неравенство $\tilde{x}_k < \xi$, то аналогичное рассуждение нужно применить к сегменту $[\xi, x]$. Тем самым равенство (3.63) доказано.

Пусть числовая функция $y = \psi(x)$ имеет своей областью определения множество E. Надграфик $epi\ \psi$ функции ψ определяется следующим образом

$$epi\ \psi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in E,\ y \ge \psi(x)\right\}.$$

Можно проверить, что построенная функция $\varphi_1(x)$ является наибольшей выпуклой минорантой функции $\varphi(x)$ и что множество $epi\ \varphi_1$ есть выпуклая оболочка множества $epi\ \varphi$.

10. Функция $\varphi_1(x)$ выпукла на полуоси $[0, \infty)$, причём $\varphi_1(0) = 1$, $(\varphi_1)'_+(0) = 1$. Поэтому функцию $\varphi_1(x)$ можно продолжить как выпуклую на вещественную ось $(-\infty, \infty)$, причём так чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = m > 0,\ \lim_{x\to-\infty} \varphi_1'(x) = 0.$$

Обозначим $r^{\rho_1(r)} = V_1(r) = \varphi_1(\ln r)$. Заметим, что функция $\rho_1(r)$ – это нулевой уточнённый порядок, функция $V_1(r)$ является логорифмически выпуклой, причём выполняются соотношения

$$\lim_{r\to+0} V_1(r) = m > 0,\ \lim_{r\to+0} rV_1'(r) = 0,\ \lim_{r\to\infty} rV_1'(r) = \infty.$$

Последнее равенство есть следствие равенства (3.62) и того, что $rV_1'(r)$ есть возрастающая функция.

Далее обозначим

$$n(r) = [rV_1'(r)]\,,\ N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}dt.$$

функция $n(r)$ является возрастающей ступенчатой неограниченной функцией с единичными скачками. Выполняются соотношения $n(r) \sim$

$rV_1'(r)\ (r\to\infty)$,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r)}{V_1(r)}=1,\ \frac{rN_+'(r)}{N(r)}=\frac{n(r)}{N(r)}\to 0\ (r\to\infty).$$

Из последнего равенства следует, что справедливо равенство $N(r)=r^{\rho_2(r)}$, где $\rho_2(r)$ – нулевой уточнённый порядок.

Пусть a_n – точки роста функции $n(r)$,

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

Имеем

$$\ln M(r,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{a_n}\right)=\int\limits_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)dn(t)$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{rn(t)}{t(t+r)}dt=\int\limits_0^{\infty}\frac{rN(t)}{(t+r)^2}dt.$$

Теперь из теоремы 1.4 следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,f)}{N(r)}=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)^2}=1.$$

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,f)}{V_1(r)}=1.$$

Так как $V(r)\geq V_1(r)$, то

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,f)}{V(r)}\leq 1.$$

Из того, что существует неограниченная последовательность r_n такая, что $V_1(r_n)=V(r_n)$ следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r,f)}{V(r)}=1.$$

Теорема доказана. $\square$

3.6. Выводы к разделу 3

Основными результатами данного раздела являются

1. Предложение 3.2, в котором найдены условия на меру γ, обеспечивающие равномерную непрерывность функций $\left(\int \|x-y\|^{(2-m)p} d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$.
2. Теоремы 3.1, 3.2, в которых найдены условия, при которых из сходимости последовательности субгармонических и δ-субгармонических функций в пространстве $\mathscr{D}'(G)$ следует ее сходимость в пространствах $L_p(\gamma)$.
3. Теоремы 3.3, 3.4, в которых доказаны новые теоремы о представлении δ-субгармонических функций в плоскости.
4. Теорема 3.5, в которой доказаны некоторые свойства предельных множеств для δ-субгармонических функций в плоскости.
5. Теоремы 3.6, 3.7, в которых описана связь предельных множеств для δ-субгармонических функций и мер Радона.
6. Теорема 3.9, в которой доказано существование целой функции заданного нулевого уточнённого порядка.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе изучались задачи, возникающие в теории субгармонических, дельта-субгармонических функций и их ассоциированных мер.

В диссертации получены следующие новые результаты:

- Полностью решен вопрос о существовании целой функции заданного нулевого уточнённого порядка;
- Построены предельные множества для дельта-субгармонических функций и радоновых мер, описаны их основные свойства, получена связь между регулярной радоновой мерой и существованием конусной (угловой) плотности, доказаны три критерия того, чтобы заданное множество было предельным множеством некоторой радоновой меры;
- Получены достаточные условия на меру γ с носителем, компактно вложенным в $G \subset \mathbb{R}^m,\ m > 2$, при которых из сходимости последовательности v_n как последовательности обобщённых функций следует ее сходимость в пространствах $L_p(\gamma)$;
- Найдены новые теоремы представления δ-субгармонических функций в форме типа Брело.

Для обоснования результатов диссертации применяются общие методы математического анализа, в том числе методы теории меры и потенциала, методы функционального анализа, а также некоторые элементы теории динамических систем. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Они находят применение при изучении теории вполне регулярного роста целых и мероморфных функций в смысле Левина-Пфлюгера, могут быть использованы как в теории функции комплексного переменного, так и в других разделах математики, где используются целые, субгармонические и δ-субгармонические функции.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Азарин В. С. Асимптотическое поведение субгармонических функций конечного порядка. / В. С. Азарин // Матем. Сборник. – 1979. – Т. 108. – С. 147-167.

2. Азарин В. С. О субгармонических во всём пространстве функциях вполне регулярного роста. / В. С. Азарин // Записки механико-математического факультета и харьковского математического общества 28, серия 4. – 1961. – С. 128-148.

3. Бурбаки Н. Интегрирование. / Н. Бурбаки – М.: ГРФМЛ, Наука. – 1977. – 396 с.

4. Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. / В. С. Владимиров – М.: ГРФМЛ, Наука. – 1979. – 320 с.

5. Гинер В. Б. Придельные множества целых и субгармонических функций конечного порядка. / В. Б. Гинер // Диссертация канд. физ. - мат. наук – Харьков, ХНУ. – 1988.

6. Гольберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. / А. А. Гольберг, И. В. Островский – М.: ГРФМЛ, Наука. – 1970. – 592 с.

7. Гришин А. Ф. Об уточнённом порядке. / А. Ф. Гришин, ., И. В. Малютина // Комплексный анализ, Математическая физика. – Красноярск – 1998. – С. 10-24.

8. Гришин А. Ф. Абелевы и тауберовы теоремы для интегралов. /А. Ф. Гришин, И. В. Поединцева // Алгебра и анализ – 2014, – Т.26, №3, – С. 1-88.

9. Гришин А. Ф. Теоремы о представлении субгармонических функций. / А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь, И. В. Поединцева // Вісник харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». – 2014. – №1133. – С. 56-75.

10. Гришин А. Ф. К теории предельных множеств Азарина. / А. Ф. Гришин, А. Шуиги // Математичні студії – 2007. – Т. 28, №2. – С. 162-174.

11. Гришин А. Ф. Различные виды сходимости последовательностей δ-субгармонических функций. / А. Ф. Гришин, А. Шуиги // Мат. Сборник. – 2008. – Т. 199. – С. 27-48.

12. Гришин А. Ф. Целые функции с наперёд заданным нулевым уточнённым порядком. / А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 424, №42. – С. 141-153.

13. Гришин А. Ф. Предельные множества Азарина для мер Радона. I / А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь // Mat. Studii – 2015. – V. 43, №1. – С. 94-99.

14. Кадец В. М. Курс функционального анализа. / В. М. Кадец. – Харков: ХНУ имени В. Н. Каразина. – 2006. – 607 с.

15. Касселс В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. / В. С. Касселс – М.: ИИЛ. – 1961. – 212 с.

16. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. / А. А. Кондратюк – Львов, Высшая школа. – 1968. – 196 с.

17. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. / Н. С. Ландкоф – М.: ГРФМЛ, Наука. – 1966. – 515с.

18. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. / Б. Я. Левин – М.: ГИТТЛ. – 1956. – 632 с.

19. Логвиненко В. Н. Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке. / В. Н. Логвиненко // Функц. анализ и его прил. – 1972. – Том 6, выпуск 4. – С. 87-88.

20. Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов – М.-Л.: ГИТТЛ. – 1949. – 448 с.

21. Нгуен Ван Куинь. Об одном свойстве функции $\|x-y\|^{2-m}$. / Нгуен Ван Куинь // Вісник харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика та механіка». – 2013. – №1081. – С. 4-9.

22. Нгуен Ван Куинь. Об одном свойстве функции $\|x-y\|^{2-m}$. / Нгуен Ван Куинь // Тараповские чтение –2013: Межд. научн. шк.-конф., 29.09 – 04.10. 2013г.: Сб. докл. – Харьков. – 2013. С. 103.

23. Нгуен Ван Куинь. Целые функции с наперёд заданным нулевым уточнённым порядком. / Нгуен Ван Куинь // Студенческое научное общество механико-математического факультета ХНУ имени В. Н. Каразина.: X межд. научн. конф. 24 – 25.04.2015.: Тезисы докл. – Харьков – 2015. – С. 37-38.

24. Содин М. Л. Замечание о предельных множествах субгармонических функций целого порядка. / М. Л. Содин // Харьков: Теория функций, функциональный анализ и их приложений. – 1983. – Вып. 39 – С. 125-129.

25. Хейман У. Субгармонические функции. / У. Хейман, , П. Кеннеди – М.: Мир –1980 – 304 с.

26. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций. / Р. С. Юлмухаметов // Analysis Mathematics. – 1985. – Т. 11, № 3. – С. 257-282.

27. Azarin V. S. Growth theory of subharmonic functions. / V. S. Azarin – Birkhanser, Basel, Boston, Berlin. – 2009. – 259 p.

28. Bernstein V. Sur les propriétés caractéristiques des indicatrices de croissance. / V. Bernstein // C. r. Acad. Sci. – 1936. – V. 202. – P. 108-110.

29. Bernstein V. Sulla proprietà carttestiche delle indicatrici di crescenza delle transcendenti intere d’ordine dinito. / V. Bernstein // Mem. Reale Ace. d’ltalia. – 1936. –V. 7. – P. 131-189.

30. Bingham N. H. Regular Variation. / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Jeugels – Cambridge University Press, Cambridge, London, NewYork, NewRochelle, Sidney – 1987. – 510 p.

31. Besicovich A. C. A general form of the covering principle ang relative differentiation of additive functions. / A. C. Besicovich // Proc. Cambridge Philos. soc. – 1945. – Vol. 41. – P. 103-110.

32. Brelot M. Etude des fonctions sous-harmonigues au voisinage d’un point singulier. / M. Brelot // Annles de et institut Fourier. – 1950. – P. 121-156.

33. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. I: Distribution theory and Fourier analysis. / L. Hörmander – Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. – 1983. – 440 p.

34. Hörmander L. The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients. / L. Hörmander – Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. – 1983. – 392 p.

35. Lindelöf E. Sur Les fonstions entieres d’ordre entier. / E. Lindelöf // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup – 1905. – V. 22. – P. 365-395.

36. Nguyen Van Quynh, Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions. / Nguyen Van Quynh // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2015. – V. 11, №1. – P. 63-74.

37. Nguyen Van Quynh, Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions. / Nguyen Van Quynh // II International Conference : ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHISICS.– June 16–20, 2014.: Book of Abstracts. – Kharkiv. – 2014. – p. 37-38.

38. Valiron G. Lectures on the General Theory of Integral Functions. / G. Valiron – Privat, Toulouse. – 1923. – 234 p.