МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ВОСТОЧНОУКРАИНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ

На правах рукописи

КОВАЛЕВ ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

УДК 517.984.7

Неотрицательные самосопряженные расширения и модели точечных взаимодействий

01.01.01 – математичесчкий анализ
Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Арлинский Юрий Моисеевич,
доктор физико-математических наук,
профессор

Северодонецк – 2015

Оглавление

Перечень условных обозначений

H, $\mathcal{H}$, $\mathfrak{H}$ – сепарабельные гильбертовы пространства.

$(\cdot,\cdot)_H$, $||\cdot||_H$ – скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве H.

$\mathcal{C}(H_1, H_2)$ – множество замкнутых линейных операторов действующих из гильбертова пространства H_1 в H_2.

$\widetilde{\mathcal{C}}(H_1, H_2)$ – множество замкнутых линейных отношений в $H_1 \times H_2$.

$\mathcal{C}(H) := \mathcal{C}(H, H)$, $\widetilde{\mathcal{C}}(H) := \widetilde{\mathcal{C}}(H, H)$.

$\mathcal{L}(H_1, H_2)$ – множество ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в H_2.

$\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$.

$\mathrm{dom}\,(A)$, $\mathrm{ran}\,(A)$, $\ker\,(A)$ – область определения, область значений, ядро (нуль пространство) линейного оператора A.

A^* – сопряженный к A линейный оператор.

$D_A = (I - A^*A)^{1/2}$ – дефектный оператор для сжатия A.

$\rho(A)$ – резольвентное множество оператора A.

$A \upharpoonright M$ – сужение оператора A на множество M.

$\tau[\cdot,\cdot]$, $\tau[\cdot]$ – полуторалинейная, квадратичная формы.

$A[\cdot,\cdot]$, $\mathcal{D}[A]$ – замыкание формы ассоциированной с оператором A, область определения этого замыкания.

$+$, $\dot{+}$, $\oplus$, $\ominus$ – сумма, прямая сумма, ортогональная сумма, ортогональная разность линейных многобразий.

$\setminus$, $\times$ – разность, декартово произведение множеств.

$s - R - \lim$ – сильный резольвентный предел последовательности операторов.

P_M – ортопроектор на подпространство M.

$M^\perp$ – ортогональное дополнение к подпространству M в H.

$\overline{M}$ – замыкание множества M.

$\dim\,(M)$ – размерность подпространства M.

$\mathrm{span}\,\{e_1, ..., e_m\}$ – линейная оболочка векторов $e_1, ..., e_m$.

Введение

Актуальность темы. Теория самосопряженных и квази-самосопряженных расширений неотрицательных симметрических операторов играет важную роль в теории линейных операторов в гильбертовых пространствах и в ее приложениях. Фундаментальные результаты были получены в работах Дж. фон Неймана, К.Фридрихса и М.Г.Крейна, М.И.Вишика, М.Ш. Бирмана. Фридрихс доказал, что полуограниченный снизу симметрический оператор имеет по крайне мере одно самосопряженное расширение с той же нижней гранью. Используя дробно-линейные преобразования Крейн свел задачу к описанию самосопряженных сжимающих расширений неплотно определенного эрмитова сжатия. Среди всех неотрицательных самосопряженных расширений Крейн выделил два экстремальных – максимальное (жесткое) и минимальное (мягкое), в смысле ассоциированных квадратичных форм. Позже Бирман и Вишик дополнили результаты Крейна для положительно определенного оператора.

Другой подход к описанию неотрицательных самосопряженных расширений – это метод абстрактных граничных условий, начало которому положил J.W. Calkin в 1939 году. Метод пространств граничных значений или граничных троек для описания областей определения полуограниченных и, в том числе, неотрицательных самосопряженных, а также максимальных аккретивных квази-самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора получил развитие в работах М.И. Вишика, Ф.С. Рофе-Бекетова, М.Л. Горбачука и В.И. Горбачука, А.Н. Кочубея, В.А. Михайлеца, О.Г. Сторожа, В.А. Деркача, М.М. Маламуда Ю.М. Арлинского, Э.Р. Цекановского, С.А. Кужеля, Л.П. Нижника, И. Браше, С. Хасси, Х. Найдхардта, Х.С.В. де Сну. В работах Деркача и Маламуда получены абстрактные граничные условия для неотрицательных самосопряженных и максимальных аккретивных квази-самосопряженных расширений в терминах введенной ими функции Вейля, которая связана с граничной тройкой. В 2005 году Арлинский и Цекановский предложили новый подход описания всех неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательных симметрических операторов во внутренних терминах.

В теории дифференциальных уравнений и спектральном анализе линейных операторов удобным является представление оператора (или дифференциального уравнения) в дивергентной форме, то есть в виде произведения $L_2^* L_1$, где L_1, L_2 – замкнутые плотно определенные линейные операторы и $L_1 \subset L_2$. В работах V. Prokaj, Z. Sebestyén и J. Stochel показано, что каждый неотрицательный симметрический оператор может быть представлен в дивергентной форме, а также получено описание экстремальных самосопряженных расширений. Дивергентная форма неотрицательного симметрического оператора позволяет, в частности, найти граничную тройку, удобную для описания неотрицательных самосопряженных расширений в терминах абстратных граничных условий.

В последние 50 лет теория самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора успешно применяется для изучения квантово-механических моделей точечных взаимодействий. Это модели описывающие движение элементарной частицы в поле точечных потенциалов. Операторная постановка задачи связана с исследованием формального симметрического оператора (оператора Шрёдингера) – свободного гамильтониана возмущенного дельта-функциями, сосредоточенными в точках взаимодействий. Для модели с одной точкой взаимодействия Ф.А. Березин и Л.Д. Фаддеев в 1961 году предложили с дельта-возмущением свободного гамильтониана ассоциировать самосопряженные расширения неотрицательного симметрического оператора с нулевыми граничными условиями. Модели точечных взаимодействий изучались в работах S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, W. Kirsh, O. Ogurisu, G. Stolz, J. Weidmann, В.М. Адамяна, Ю.М. Арлинского, Ю.М. Березанского, А.Н. Кочубея, А.Костенко, В.Д. Кошманенко, С.А. Кужеля, В.Э. Лянце, М.М. Маламуда, В.А. Михайлеца, Л.П. Нижника и других.

Представляется актуальным развитие подхода, предложенного Арлинским и Цекановским, для описания всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора, исследование представлений неотрицательных симметрических операторов в дивергентной форме и параметризация их неотрицательных самосопряженных расширений, описание всех самосопряженных и квази-самосопряженных расширений операторов Шрёдингера с дельта-потенциалами, а также исследование свойств систем дельта-функций Дирака.

Связь с научными программами, планами, темами. Диссертация выполнена согласно планам научной работы кафедры математического анализа Восточноукраинского национального университета имени Владимира Даля в рамках госбюджетных тем "Аналитические функции в спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве" (номер государственной регистрации №0108U000152) и "Преобразования Шура для операторно-значных аналитических функций и его применение к линейным системам и проблеме моментов" (номер государственной регистрации №0111U000039).

Цели и задачи исследования. Основной целью диссертации является установление новых свойств неотрицательных симметрических операторов и их неотрицательных самосопряженных расширений, новых методов описания квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательных симметрических плотно определенных операторов и приложения полученных результатов к симметрическим операторам в моделях квантовой механики, связанных с точечными взаимодействиями. Задачами являются:

- дальнейшее исследование симметрических операторов, имеющих дивергентное представление, и их неотрицательных самосопряженных расширений, в частности, экстремальных расширений Фридрихса и Крейна;
- параметризация во внутренних терминах всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательных симметрических плотно определенных операторов;
- описание расширений Фридрихса и Крейна симметрических операторов в моделях точечных взаимодейстий в случае бесконечного числа точек взаимодействия, установление критериев дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса и Крейна;
- исследование на базисность Рисса системы дельта-функций Дирака в замыкании их линейных оболочек в пространствах Соболева $W_2^{-1}(\mathbb{R})$, $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$;
- построение граничных троек и вычисление соответствующих функций

Вейля для сопряженного минимального оператора Шрёдингера для случая бесконечного числа точечных взаимодействий на прямой, на плоскости и в пространстве.

Методы исследования. В диссертации используется и развивается подход Арлинского-Цекановского к описанию всех неотрицательных самосопряженных расширения неотрицательных симметрических операторов, метод граничных пар и граничных троек для сопряженного оператора, методы описания экстремальных расширений операторов заданных в дивергентной форме.

Научная новизна полученых результатов. Результаты, изложенные в диссертации, являются новыми:

- доказано, что каждый замкнутый плотно определенный неотрицательный симметрический оператор $\dot{A}$, имеющий дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения допускает бесконечно много факторизаций в виде $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ – замкнутый неотрицательный симметрический оператор и $\mathcal{L}$ его неотрицательное самосопряженное расширение; такая же факторизация установлена для неплотно определенного замкнутого неотрицательного симметрического оператора с бесконечными индексами дефекта, а в случае конечных индексов дефекта доказана невозможность такого типа факторизации;

- приведена конструкция неотрицательных плотно заданных симметрических операторов $\mathcal{L}_0$ и их неотрицательных самосопряженных расширений $\mathcal{L}$ таких, что $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$, в частности, $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2) = \{0\}$;

- установлена связь постранств Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^d),\ d = 1, 2, 3$, $W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ и гильбертова пространства ℓ_2;

- доказано, что системы дельта функций Дирака $\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y \subset \mathbb{R}\} \subset W_2^{-1}(\mathbb{R})$, $\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3\} \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ и $\{\delta'(\cdot - y),\ y \in Y\} \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$, $\{\delta(\cdot - y), \delta'(\cdot - y),\ y \in Y\} \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$ образуют базисы Рисса в своих замкнутых линейных оболочках, если Y – счетное множество точек в $\mathbb{R}^d$ и $\inf\{|y - y'|,\ y, y' \in Y, y \neq y'\} > 0$;

- исследованы свойства дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса и Крейна минимальных операторов Шрёдингера соответствующих бесконечному числу точечных взаимодействий: доказана трансверсальность для случая δ, δ' и $\delta - \delta'$ взаимодействий на прямой; доказана дизъюнктность, но не трансверсальность для случая δ взаимодейтвий на плоскости; доказаны дизъюнктность и получен критерий трансверсальности для случая δ взаимодействий в пространстве;

- единообразным способом построены граничные тройки и получены выражения функций Вейля для случая δ взаимодейтвий на плоскости и в пространстве; построены базисные граничные тройки для сопряженных операторов и дана параметризация всех неотрицательных самосопряженных расширений для операторов A_0, A' и H_0;

- развит метод Арлинского-Цекановского для параметризации во внутренних терминах всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического плотно заданного оператора, в том числе описаны все квази-самосопряженные m-аккретивные и m-секториальные гамильтонианы соответствующие конечному числу δ' взаимодействий;

- дано описание расширений Фридрихса и Крейна операторов в дивергентной форме, в частности, описаны расширения Фридрихса и Крейна минимальных операторов Шрёдингера A_0, A' и H_0, соответствующих бесконечному числу δ, δ' и $\delta - \delta'$ взаимодействий на прямой.

Практическое значение полученых результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории расширений симметрических операторов и ее приложениях к задачам математической физики.

Личный вклад соискателя. Определение направления и плана исследований, постановка задач и формулирование основных гипотез принадлежит научному руководителю. Изложенные в диссертации основные результаты получены автором самостоятельно. В совместной статье [52] автору диссертации принадлежит доказательство теоремы 3.4 (для m-аккретисного расширения), предложения 3.8 и разделы 4 и 5. В [54] – доказательство теоремы 3.4 и раздел 4. В [53] – идея конструкции в 5 разделе принадлежит научному руководителю Ю.М. Арлинскому, а ее реализация – автору диссертации, теоремы 1.1 и 1.2 также доказаны автором.

Аппробация результатов диссертации. Результаты дисертации были аппробованы на конференциях:

- международная конференция – 21я Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2010), 17-29 сентября 2010г., пос. Батилиман, г. Севастополь, Республика Крым, Украина;
- международная конференция по функциональному анализу, посвященная 90-летию со дня рождения В.Е. Лянце, 17-21 ноября 2010г., г. Львов, Украина;
- международная конференция – VIII летняя математическая школа Алгебра, Топология, Анализ и приложения, 5-15 июля 2011г., пгт. Лазурное, Херсонская область, Украина;
- 8я Международная Алгбераическая конференция в Украине, посвященная 60-летию со дня рождения профессора В.М. Усенко, 5-12 июля 2011г., г. Луганск, Украина;
- международная конференция – 22я Крымская Осенняя Математическая Школа-Сипозиум (КРОМШ-2011), 17-29 сентября 2011г., п. Батилиман, г. Севастополь, Республика Крым, Украина;
- международная конференция, посвященная 120-летию со дня рождения С. Банаха, 17-21 сентября 2012г., г. Львов, Украина;
- Крымская Международная Математическая Конференция (КММК-2013), 23 сентября – 3 октября 2013г., г. Судак, Республика Крым, Украина;

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях [51, 52, 53, 54, 82, 21, 22] в профильных изданиях (3 без соавторов [82, 21, 22]) и 7 тезисах докладов на международных научных конференциях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из вступления, шести разделов, разбитых на подразделы, выводов и списка литературы, который занимает 10 страниц и включает 96 наименований. Объем работы составляет 140 страницы.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Теоремы о факторизации неотрицательных симметрических операторов с плотной и неплотной областями определения.

2. Пример конструкции плотно определенного неотрицательного симметрического оператора $\mathcal{L}_0$ и его самосопряженного расширения $\mathcal{L}$ таких, что $\operatorname{dom}(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$.

3. Теоремы об описании в дивергентной форме расширений Фридрихса и Крейна неотрицательного симметрического оператора, в частности, описание расширений Фридрихса и Крейна минимальных операторов Шрёдингера, соответствующих точечным δ, δ', $\delta - \delta'$ взаимодействиям на прямой.

4. Теорема об описании всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора.

5. Теоремы о базисности Рисса дельта-функций Дирака в своих линейных оболочках

6. Теоремы о свойствах дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса и Крейна минимальных операторов Шрёдингера, соответствующих точечным взаимодействиям на прямой, на плоскости и в пространстве.

Глава 1

Обзор литературы по теме диссертации

1.1 Операторы, линейные отношения и формы

Линейный замкнутый оператор S в гильбертовом пространстве H называется *симметрическим* [3, 16, 12], если $\mathrm{dom}\,(S)$ плотно в H и выполняется условие эрмитовости $(Sf, g) = (f, Sg), \quad \forall f, g \in \mathrm{dom}\,(S)$. Симметрический оператор A такой, что $\mathrm{ran}\,(A) = H$ является самосопряженным оператором [3, 16], а если $\mathrm{dom}\,(A) = H$, то ограниченным самосопряженным. Если существует константа $\gamma \in \mathbb{R}$ такая, что выполняется неравенство $\gamma(f, f) \le (Sf, f)$ для любого $f \in \mathrm{dom}\,(S)$, то оператор S называют полуограниченным снизу, а наибольшее из чисел γ, для которых выполняется неравенство, называется нижней гранью оператора S. Если нижняя грань равна нулю, то оператор называют *неотрицательным* и пишут $S \ge 0$. Если A и B два самосопряженных оператора в H, тогда неравенство $A \ge B$ означает, что $A - B \ge 0$.

Квадратный корень $A^{1/2}$ неотрицательного самосопряженного оператора A имеет следующие свойства [16]:

$$\mathrm{ran}\,(A^{1/2}) = \left\{ g \in H \quad \sup_{f \in \mathrm{dom}\,(A)} \frac{|(f, g)|^2}{(Af, f)} < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

$$||\widehat{A}^{-1/2} g||^2 = \sup_{f \in \mathrm{dom}\,(A)} \frac{|(f, g)|^2}{(Af, f)}, \quad g \in \mathrm{ran}\,(A^{1/2}), \tag{1.2}$$

$$\lim_{z \uparrow 0} \big((A - zI)^{-1} g, g \big) = \begin{cases} ||\widehat{A}^{-1/2} g||^2, & g \in \mathrm{ran}\,(A^{1/2}), \\ +\infty, & g \in H \setminus \mathrm{ran}\,(A^{1/2}). \end{cases} \tag{1.3}$$

Квадратный корень $A^{1/2}$ также, как и A, является неотрицательным и самосопряженным.

Линейный оператор T в H называется *аккретивным* [16], если $\mathrm{Re}\,(Tf, f) \ge 0, \quad \forall f \in \mathrm{dom}\,(T)$ и *максимальным аккретивным* (m-аккретивным), если является аккретивным и не имеет аккретивных расширений в H.

Числовой областью линейного оператора T является область комплексной плоскости $W(T)$ [16, 32]:

$$W(T) = \{(Tf, f) : \quad ||f|| = 1, \ f \in \mathrm{dom}\,(T)\}$$

Пусть $\alpha \in (0, \pi/2)$. Обозначим следующий сектор комплексной плоскости:

$$\mathcal{S}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg z| \le \alpha\}.$$

Линейный оператор T в H называется *секториальным* с вершиной в нуле и полууглом α (см. например [16]), если его числовая область содержится в секторе $\mathcal{S}(\alpha)$ или, что эквивалентно,

$$|\mathrm{Im}\,(Tf, f)| \le \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{Re}\,(Tf, f), \ \ \forall f \in \mathrm{dom}\,(T).$$

Оператор T называется m-секториальным, если он секториальный и квази-m-аккретивный. Как и в аккретивном случае, m-секториальный оператор T плотно определен и его сопряженный T^* также является m-секториальным.

Пусть $\tau[\cdot, \cdot]$ полуторалинейная форма в гильбертовом пространстве H, определенная на линейном многообразии $\mathrm{dom}\,(\tau)$. Форма τ называется симметрической если $\tau[u, v] = \overline{\tau[v, u]}$ для всех $u, v \in \mathrm{dom}\,(\tau)$ и неотрицательной если $\tau[u] := \tau[u, u] \ge 0$ для всех $u \in \mathrm{dom}\,(\tau)$.

Форма τ называется секториальной [16] с вершиной в точке $\gamma \in \mathbb{C}$ и полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$ если ее числовая область

$$W(\tau) = \{\tau[u], \ u \in \mathrm{dom}\,(\tau), \ ||u|| = 1\}$$

лежит в секторе $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - \gamma)| \le \alpha\}$, то есть, выполняется неравенство

$$\left|\mathrm{Im}\,(\tau[u] - \gamma||u||^2)\right| \le \tan\alpha \ \cdot \mathrm{Re}\,(\tau[u] - \gamma||u||^2), \ u \in \mathrm{dom}\,(\tau).$$

Пусть $\tau[u, v]$ – замкнутая плотно определенная секториальная форма в H, тогда по первой теореме о представлении [16, 23] существует единственный m-секториальный оператор T в H, ассоциированный с τ, то есть $\mathrm{dom}\,(T) \subset \mathrm{dom}\,(\tau)$ и

$$(Tu, v) = \tau[u, v] \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{dom}\,(T) \quad \text{и} \quad v \in \mathrm{dom}\,(\tau).$$

Сопряженный оператор T^* ассоциирован с сопряженной формой τ^*.

Если форма τ плотно определенная, симметричная, замкнутая и ограниченная снизу, то ассоциированный с ней оператор T, самосопряжен и имеет ту же нижнюю грань, что и форма.

Если τ – плотно определенная замкнутая неотрицательная симметрическая форма, то по второй теореме о представлении [16, 23]:

$$\mathrm{dom}\,(\tau) = \mathrm{dom}\,(T^{1/2}),\ \tau[u,v] = (T^{1/2}u, T^{1/2}v) \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathrm{dom}\,(\tau).$$

Линейным отношением в гильбертовом пространстве H называется подпространство в $H^2 := H \times H$. Скалярное произведение в H^2 определяется следующим образом (см. например [16, 40]):

$$(\vec{u}, \vec{v})_{H^2} = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$$

для $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle \in H^2$. В частности график линейного опреатора T в H:

$$\mathrm{Gr}(T) = \{\langle h, Th \rangle\ ,\ h \in \mathrm{dom}\,(T)\}$$

является линейным отношением.

Подпространство

$$\mathbf{T}(0) = \{x' \in H : \langle 0, x' \rangle \in \mathbf{T}\}$$

называется многозначной частью линейного отношения $\mathbf{T}$. Подпространство $\mathbf{T} \ominus \langle 0, \mathbf{T}(0) \rangle$ является графиком линейного оператора T, $\mathrm{dom}\,(T) = \mathrm{dom}\,(\mathbf{T})$, которое называется операторной частью линейного отношения $\mathbf{T}$. Очевидно, что $\mathbf{T}x = Tx \oplus \mathbf{T}(0)$.

Обозначим через $\mathcal{R}[\mathbf{T}]$ линейное многообразие $\mathrm{ran}\,(T^{1/2}) \oplus \mathbf{T}(0)$.

Пусть $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ два неотрицательных самосопряженных линейных отношения, тогда неравенство $\mathbf{T}_1 \le \mathbf{T}_2$ означает, что $\mathcal{D}[\mathbf{T}_1] \supseteq \mathcal{D}[\mathbf{T}_2]$ и $\mathbf{T}_1[u] \le \mathbf{T}_2[u],\ u \in \mathcal{D}[\mathbf{T}_2]$.

Теорема 1.1.1 ([60]). *Пусть $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ два неотрицательных самосопряженных линейных отношения в H. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) $\mathbf{T}_1 \ge \mathbf{T}_2$; 2) $\mathbf{T}_1^{-1} \le \mathbf{T}_2^{-1}$; 3) $\mathcal{R}[\mathbf{T}_2] \subseteq \mathcal{R}[T_1]$, $\quad \mathbf{T}_1^{-1}[\mathbf{T}_2(u)] \le (\mathbf{T}_2(u), u),\ \ \forall u \in \mathrm{dom}\,(\mathbf{T}_2)$.*

Отметим также, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\mathbf{T}] = \left\{ h \in H : \sup_{f \in \mathrm{dom}\,(\mathbf{T})} \tfrac{|(h,f)|^2}{(\mathbf{T}(f),f)} < \infty \right\} = \\ = \left\{ h \in H : \lim_{x \downarrow 0} ((\mathbf{T} + xI)^{-1}h, h) < \infty \right\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

и, если $h \in \mathcal{R}[\mathbf{T}]$, то $\sup\limits_{f \in \mathrm{dom}\,(\mathbf{T})} \frac{|(h,f)|^2}{(\mathbf{T}(f),f)} = \lim\limits_{x \downarrow 0}((\mathbf{T}+xI)^{-1}h,h) = \mathbf{T}^{-1}[h]$.

1.2 Самосопряженные расширения симметрических операторов

1.2.1 Расширение по Фридрихсу

Пусть T плотно определенный секториальный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда форма $\tau[u,v] = (Tu,v),\ \mathrm{dom}\,(\tau) = \mathrm{dom}\,(T)$ является замыкаемой [16]. Обозначим через $T[u,v]$ замыкание формы $\tau[u,v]$. Оператор T_F ассоциированный с формой $T[u,v]$ является m-секториальным и называется расширением по Фридрихсу или фридрихсовым расширением оператора T [16]. Из всех m-секториальных расширений $\widetilde{T}$ секториального оператора T фридрихсово расширение T_F имеет наименьшую область определения ассоциированной формы, то есть $\mathcal{D}[T_F] = \mathcal{D}[T] \subset \mathcal{D}[\widetilde{T}]$.

Фридрихсово расширение первоначально определялось для симметрических полуограниченных операторов S [11]. В этом случае S_F является полуограниченным самосопряженным оператором [16] и

$$\mathrm{dom}\,(S_F) = \mathcal{D}[S] \cap \mathrm{dom}\,(S^*), \quad S_F = S^* \upharpoonright \mathrm{dom}\,(S_F).$$

Пусть $\mathfrak{N}_z = \ker(S^* - zI)$ – дефектное подпространство, тогда $\mathcal{D}[S] \cap \mathfrak{N}_z = \{0\},\ \ z \in \rho(S_F)$. Фридрихсово расширение оператора T является его единственным m-секториальным расширением имеющим область определения в $\mathcal{D}[T]$. Поскольку $\mathrm{dom}\,(S_F^{1/2}) = \mathcal{D}[S] = \mathcal{D}[S_F]$, тогда исходя из (1.4), имеем:

$$\mathrm{ran}\,(S_F^{1/2}) = \left\{ h \in H : \sup_{\varphi \in \mathrm{dom}\,(S)} \frac{|(h,\varphi)|^2}{(S\varphi,\varphi)} < \infty \right\} \tag{1.5}$$

и

$$\sup_{\varphi \in \mathrm{dom}\,(S)} \frac{|(h,\varphi)|^2}{(S\varphi,\varphi)} = ||\widehat{S}_F^{-1/2}h||^2, \quad h \in \mathrm{ran}\,(S_F^{1/2}). \tag{1.6}$$

Фридрихсово расширение неплотно определенного неотрицательного эрмитового оператора A это линейное отношение:

$$\mathbf{A}_F = Gr((P_{H_0}A)_F) \oplus \langle 0, \mathfrak{B} \rangle, \tag{1.7}$$

где $H_0 = \overline{\mathrm{dom}}\,(A),\ \mathfrak{B} = H \ominus H_0$, и оператор $(P_{H_0}A)_F$ это фридрихсово расширение оператора $P_{H_0}A$ в гильбертовом пространстве H_0.

1.2.2 Дробно-линейные преобразования и неотрицательные самосопряженные расширения (теория М.Г. Крейна)

Пусть S неотрицательный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H, определим оператор A [16, 23]:

$$A(f+Sf)=f-Sf,\ f\in \operatorname{dom}(S),\ \operatorname{dom}(A)=(S+I)\operatorname{dom}(S).$$

Тогда, оператор A является симметирческим и $||A||\le 1,\ \ \ker(A+I)=\{0\}$. Взаимно однозначное соответствие между операторами S и A можно записать в виде: $A=(I-S)(I+S)^{-1}$. Оператор A является самосопряженным в том и только в том случае, если S самосопряжен.

Пусть теперь A замкнутый неплотно заданый $\operatorname{dom}(A)\neq H$ эрмитов оператор и $||A||\le 1$. Если $\widetilde{A}$ ограниченное самосопряженное расширение оператора A с нормой $\|\widetilde{A}\|=\|A\|$, то $\widetilde{S}=(I-\widetilde{A})(I+\widetilde{A})^{-1}$ – неотрицательное самосопряженное расширение оператора S [23]. Таким образом, Крейн свел проблему описания всех неотрицательных самосопряженных расширений $\widetilde{S}$ неограниченного неотрицательного симметрического оператора S к описанию всех ограниченных самосопряженных расширений $\widetilde{A}$, $\|\widetilde{A}\|\le 1$, неплотного заданного ограниченного эрмитова сжатия A.

Теорема 1.2.1 ([23]). *Множество всех самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора A таких, что $||\widetilde{A}||=1$, имеет минимальный A_μ и максимальный элемент A_M и состоит из тех и только тех элементов $\widetilde{A}$, для которых выполняется неравенство, в смысле ассоциированных квадратичных форм:*

$$A_\mu\le \widetilde{A}\le A_M.$$

Неотрицательное самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S называется *экстремальным* [41], если:

$$\inf\left\{\widetilde{S}[u-\varphi]:\ \varphi\in\operatorname{dom}(S)\right\}=0,\ \ \forall u\in\mathcal{D}[\widetilde{S}].$$

Среди всех неотрицательных самосопряженных расширений $\widetilde{S}$ выделим два экстремальных [16, 23]:

$$S_F=(I-A_\mu)(I+A_\mu)^{-1},\ \ S_K=(I-A_M)(I+A_M)^{-1}.$$

Расширение S_F называют жестким расширением или расширением Фридрихса, а S_K – мягким расширением или расширением Крейна. Оператор S имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение в том и только в том случае, если $S_K = S_F$.

Пусть S замкнутый симметрический (не самосопряженный) оператор, тогда $\dim \mathfrak{N}_{-1} > 0$, где $\mathfrak{N}_{-1} := \ker(S^* + I) = H \ominus \operatorname{dom}(A)$.

Теорема 1.2.2 ([23]). *Плотно определенный оператор S имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда для любого $\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}$, $a > 0$ выполняется условие:*

$$\sup_{f \in \operatorname{dom}(S)} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Sf, f)} = \infty.$$

В силу (1.5) это условие эквивалентно $\operatorname{ran}(S_F^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-a} = \{0\}$ или, с учетом равенства $(S_F - zI)(S_F - \lambda I)^{-1}\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_\lambda,\ \ z, \lambda \in \rho(S_F)$, следующему условию:

$$\operatorname{ran}(S_F^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_z = \{0\},\ \forall z \in \rho(S_F).$$

Пусть S_1 и S_2 неотрицательные самосопряженные операторы и $a > 0$, тогда неравенство $(S_1 + aI)^{-1} \le (S_2 + aI)^{-1}$ эквивалентно следующим двум условиям: $\mathcal{D}[S_1] \subset \mathcal{D}[S_2]$ и $S_1[f, f] \ge S_2[f, f],\ \forall f \in \mathcal{D}[S_1]$.

Теорема 1.2.3 ([23]). *Пусть S замкнутый плотно определенный неотрицательный симметрический оператор в H, $\widetilde{S}$ – его неотрицательное самосопряженное расширение, тогда для любого $a > 0$:*

$$(S_F + aI)^{-1} \le (\widetilde{S} + aI)^{-1} \le (S_K + aI)^{-1}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}[S_F] \subset \mathcal{D}[\widetilde{S}] \subset \mathcal{D}[S_K],\ S_K[f] \le \widetilde{S}[f], \\ &S[f] = S_F[f] = \widetilde{S}[f],\ \ \forall f \in \mathcal{D}[S_F]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2.3 Расширение Крейна

Расширения Фридрихса и Крейна экстремальные, более того [44, 45], расширение Крейна S_K это единственное экстремальное неотрицательное самосопряженное расширение оператора S имеющее максимальную область определения его замкнутой ассоциированной формы.

Для формы Крейна справедливы следующие соотношения [39]:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}[S_K] = \mathrm{dom}\,(S_K^{1/2}) = \left\{ h \in H : \sup_{f \in \mathrm{dom}\,(S)} \tfrac{|(h,Sf)|^2}{(Sf,f)} < \infty \right\}, \\
&\sup_{f \in \mathrm{dom}\,(S)} \frac{|(h,Sf)|^2}{(Sf,f)} = \|S_K^{1/2} h\|^2 = S_K[h], \quad h \in \mathcal{D}[S_K].
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Для формы, ассоциированной с неотрицательным самосопряженным расширением $\widetilde{S}$ оператора S, справедливы формулы:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus \mathfrak{N}_z \cap \mathcal{D}[\widetilde{S}], \\
&\widetilde{S}[f,h] = (f, S^* h), \quad f \in \mathcal{D}[S],\ h \in \mathcal{D}[\widetilde{S}] \cap \mathrm{dom}\,(S^*).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.9) и (1.6) следует эквивалентность [39] $h \in \mathrm{dom}\,(S^*) \cap \mathcal{D}[S_K] \iff S^* h \in \mathrm{ran}\,(S_F^{1/2})$, и равенство $S_K[h] = S_F^{-1}[S^* h], \quad h \in \mathrm{dom}\,(S^*) \cap \mathcal{D}[S_K]$. В частности, $\mathfrak{N}_z \cap \mathcal{D}[S_K] = \mathfrak{N}_z \cap \mathrm{ran}\,(S_F^{1/2})$ и

$$S_K[\varphi_z] = |z|^2 S_F^{-1}[\varphi_z], \quad \varphi_z \in \mathfrak{N}_z \cap \mathcal{D}[S_K]. \tag{1.11}$$

Из (1.10), (1.11) и поляризационного тождества следует, что для всех $f, g \in \mathcal{D}[S]$, $\varphi_z, \psi_z \in \mathfrak{N}_z \cap \mathcal{D}[S_K]$ и $z \in \rho(S_F)$:

$$S_K[f + \varphi_z, g + \psi_z] = \left(S_F^{1/2} f + z \widehat{S}_F^{-1/2} \varphi_z, S_F^{1/2} g + z \widehat{S}_F^{-1/2} \psi_z \right).$$

Следующая теорема дает описание всех замкнутых форм ассоциированных с неотрицательными самосопряженными расширениями оператора S.

Теорема 1.2.4 ([44, 50]). *Если $\widetilde{S}$ неотрицательное самосопряженное расширение неотрицательного симметрического оператора S, тогда форма $(\widetilde{S}u, v) - S_K[u,v]$, $u, v \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$, является неотрицательной и замыкаемой в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}[S_K]$. Более того, формулы*

$$\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathrm{dom}\,(\eta),\ \widetilde{S}[u,v] = S_K[u,v] + \eta[u,v], \quad u, v \in \mathcal{D}[\widetilde{S}]$$

дают взаимно однозначное соответствие между всеми замкнутыми формами $\widetilde{S}[\cdot,\cdot]$ ассоциированными с неотрицательными самосопряженными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми неотрицательными полуторалинейными формами $\eta[\cdot,\cdot]$ замкнутыми в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}[S_K]$ и такими, что $\eta[\varphi] = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}[S]$.

Замкнутая форма ассоциированная с экстремальным расширением является замкнутым сужением формы $S_K[\cdot,\cdot]$ на линейное многообразие $\mathcal{M}$ такое, что $\mathcal{D}[S] \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}[S_K]$.

Предложение 1.2.5 ([79]). *Если неплотно определенный неотрицательный симметрический оператор A допускает дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения, то расширение Крейна A_K является оператором.*

Отметим, что в [63] найдено приложение расширения Крейна к задачам теории упругости.

1.2.4 Укороченные операторы Крейна

Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, B – неотрицательный ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ и $\mathcal{K}$ – замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$.

Теорема 1.2.6 ([23]). *Среди множества Q всех операторов Z, удовлетворяющих двум условиям: $Z \le B$ и $\operatorname{ran}(Z) \subset \mathcal{K}$, всегда найдется максимальный оператор $B_\mathcal{K}$, такой, что*

$$B_\mathcal{K} = B^{1/2} P_\mathfrak{L} B^{1/2},$$

где $P_\mathfrak{L}$ – ортопроектор на пространство $\mathfrak{L} = \{f \in \mathfrak{H} : \ B^{1/2} f \in \mathcal{K}\}$

Оператор $B_\mathcal{K}$ обладает свойствами: $\operatorname{ran}(B_\mathcal{K}) \subset \operatorname{ran}(B^{1/2})$ и, следовательно, [23]

$$\operatorname{ran}(B_\mathcal{K}) \subset \operatorname{ran}(B_\mathcal{K}^{1/2}) = \mathcal{K} \cap \operatorname{ran}(B^{1/2}). \tag{1.12}$$

Отметим также, что

$$(B_\mathcal{K} f, f) = \inf_{\varphi \in \mathcal{K}^\perp} \{(B(f+\varphi), f+\varphi), \ \ f \in \mathfrak{H}\} \quad \text{и} \quad B_\mathcal{K} = B_{\overline{\operatorname{ran}}(B_\mathcal{K}^{1/2})}. \tag{1.13}$$

Нетрудно видеть [23], что

$$B_\mathcal{K} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ran}(B_\mathcal{K}^{1/2}) = \mathcal{K} \cap \operatorname{ran}(B^{1/2}) = \{0\}. \tag{1.14}$$

Равенство $B_\mathcal{K} f = Bf$ справедливо для тех и только тех $f \in \mathfrak{H}$, для которых $Bf \in \mathcal{K}$.

Если существует ограниченный обратный оператор B^{-1}, то оператор $B_{\mathcal{K}} \upharpoonright \mathcal{K}$ имеет обратный оператор $B_{\mathcal{K}}^{-1}$ (см. [23]):

$$B_{\mathcal{K}}^{-1} f = P_{\mathcal{K}} B^{-1} P_{\mathcal{K}} f, \quad f \in \mathcal{K}.$$

Пусть теперь B – ограниченный самосопряженный блочный оператор, заданный матрицей

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \oplus \\ \mathcal{K}^{\perp} \end{array} \to \begin{array}{c} \mathcal{K} \\ \oplus \\ \mathcal{K}^{\perp} \end{array},$$

где $B_{11} \in \mathbf{L}(\mathcal{K})$, $B_{22} \in \mathbf{L}(\mathcal{K}^{\perp})$, $B_{12} \in \mathbf{L}(\mathcal{K}^{\perp}, \mathcal{K})$.

Тогда оператор B является неотрицательным в том и только том случае, когда [24]

$$B_{22} \geq 0,\ \operatorname{ran}(B_{12}^*) \subset \operatorname{ran}(B_{22}^{1/2}),\ \ B_{11} \geq \left(B_{22}^{[-1/2]} B_{12}^*\right)^* \left(B_{22}^{[-1/2]} B_{12}^*\right).$$

Оператор $B_{\mathcal{K}}$ задается блочной матрицей:

$$B_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} B_{11} - \left(B_{22}^{[-1/2]} B_{12}^*\right)^* \left(B_{22}^{[-1/2]} B_{12}^*\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\dot{S}$ замкнутое неплотно определенное симметрическое сжатие в гильбертовом пространстве H и оператор S его самосопряженное сжимающее расширение. Преобразование Кэли оператора $\dot{S}$: $\dot{A} = (I - \dot{S})(I + \dot{S})^{-1}$ – это плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор. Пусть $\mathfrak{N} = H \ominus \operatorname{dom}(\dot{S}) = \mathfrak{N}_{-1}(\dot{A})$. Жесткое S_μ и мягкое S_M расширения оператора $\dot{S}$ могут быть определены следующим образом [23]:

$$S_\mu = S - (I + S)_{\mathfrak{N}},\ S_M = S + (I - S)_{\mathfrak{N}}. \tag{1.15}$$

Таким образом, экстремальные самосопряженные сжимающие расширения S_μ и S_M оператора $\dot{S}$ удовлетворяют условию:

$$(I_{\mathfrak{H}} + S_\mu)_{\mathfrak{N}} = (I_{\mathfrak{H}} - S_M)_{\mathfrak{N}} = 0.$$

Операторный интервал $[S_\mu, S_M]$ можно параметризовать так [24]:

$$[S_\mu, S_M] \ni S \iff S = S_\mu + (S_M - S_\mu)^{1/2} X (S_M - S_\mu)^{1/2}, \tag{1.16}$$

где X – неотрицательное самосопряженное сжатие в подпространстве $\overline{\mathrm{ran}}\,(S_M - S_\mu)(\subseteq \mathfrak{N})$.

Предложение 1.2.7 ([48, 49]). *(1) Пусть B – неотрицательный самосопряженный оператор и пусть S его преобразование Кэли: $S = (I-B)(I+B)^{-1}$. Тогда*

$$\mathcal{D}[B] = \mathrm{ran}\,((I+S)^{1/2}),$$
$$B[u,v] = -(u,v) + 2\left((I+S)^{-1/2}u, (I+S)^{-1/2}v\right), \quad u, v \in \mathcal{D}[B].$$

(2) Пусть $\dot{A}$ – замкнутый неотрицательный симметрический оператор и пусть A его неотрицательное самосопряженное расширение (в общем случае - линейное отношение). Если $\dot{S} = (I-\dot{A})(I+\dot{A})^{-1}$, $S = (I-A)(I+A)^{-1}$, то $\mathcal{D}[A] = \mathcal{D}[\dot{A}] \dotplus \mathrm{ran}\,((S-S_\mu)^{1/2})$.

1.2.5 Единственность, дизъюнктность, трансверсальность

Приведем сводные условия единственности, дизъюнктности и трансверсальности самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора в следующих предложениях.

Пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательный симметрический оператор в H и оператор S его преобразование Кэли. Исходя из (1.1), (1.9) и теоремы 1.2.2, следует

Предложение 1.2.8 ([60]). *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *оператор $\mathcal{A}$ имеет* ***единственное*** *неотрицательное самосопряженное расширение ($\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_K$),*

(ii) $\inf\limits_{v\in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A})} \frac{|(v,\varphi_{-a})|^2}{(\mathcal{A}v,v)} = \infty$, *для всех не нулевых векторов φ_{-a} из дефектного подпространства $\mathfrak{N}_{-a}(\mathcal{A})$, где $a > 0$,*

(iii) $\mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-a}(\mathcal{A}) = \{0\}$, $a > 0$,

(iv) $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-a}(\mathcal{A}) = \{0\}$, $a > 0$.

Определение 1.2.9. *Два самосопряженных расширения $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ симметрического оператора $\mathcal{A}$ называются:*

- *дизъюнктными, если* $\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{A}}_1) \cap \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$,

- *трансверсальными, если* $\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{A}}_1) + \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{A}}_2) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*)$.

Справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1 \text{ и } \mathcal{A}_2 \text{ дизъюнктны} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{ran}}\,\big((\mathcal{A}_1 - \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_2 - \lambda I)^{-1}\big) = \mathfrak{N}_\lambda, \\ &\mathcal{A}_1 \text{ и } \mathcal{A}_2 \text{ трансверсальны} \Leftrightarrow \mathrm{ran}\,\big((\mathcal{A}_1 - \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_2 - \lambda I)^{-1}\big) = \mathfrak{N}_\lambda. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Предложение 1.2.10 ([45, 46, 60, 79, 27]). *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *расширения Фридрихса* $\mathcal{A}_F$ *и Крейна* $\mathcal{A}_K$ *оператора* $\mathcal{A}$ ***дизъюнктны***,

(ii) *оператор* $\mathcal{A}$ *имеет два дизъюнктных неотрицательных самосопряженных расширения,*

(iii) $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \cap \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K^{1/2})$ *плотно в* $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A})$ *хотя бы для одного (значит для всех)* $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$,

(iv) $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2})$ *плотно в* $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$,

(v) $\ker\,(S_M - S_\mu) = \mathrm{dom}\,(S)(= \mathrm{ran}\,(\mathcal{A} + I))$,

(vi) *из* $\lim\limits_{n\to\infty} (I + \mathcal{A}\mathcal{A}^*)^{-1/2}\mathcal{A}\varphi_n = g$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n) = 0$ *следует, что* $g = 0$ *(для плотно определенного* $\mathcal{A}$*).*

Предложение 1.2.11 ([45, 46, 60, 79, 27]). *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *расширения Фридрихса* $\mathcal{A}_F$ *и Крейна* $\mathcal{A}_K$ *оператора* $\mathcal{A}$ ***трансверсальны***,

(ii) *оператор* $\mathcal{A}$ *имеет два трансверсальных, неотрицательных, самосопряженных расширения,*

(iii) $\mathrm{ran}\,(\mathcal{A}^*) \subset \mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2})$,

(iv) $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*) \subset \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K^{1/2})$,

(v) $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K^{1/2})$ *хотя бы для одного (значит для всех)* $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$,

(vi) $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) \subset \mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2})$ *хотя бы для одного (значит для всех)* $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$,

(vii) $\mathrm{ran}\,(S_M - S_\mu) = \mathfrak{N}(= \mathfrak{N}_{-1})$,

(viii) $\sup\limits_{f\in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A})} \dfrac{||(I+\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^{-1/2}\mathcal{A}f||^2}{(\mathcal{A}f, f)} < \infty$ *(для плотно определенного* $\mathcal{A}$*).*

1.2.6 Расширения положительно определенных операторов

Если оператор S положительно определен, то есть его нижняя грань положительна [23]: $m(S) = \sup\limits_{f\in \mathrm{dom}\,(S)} \frac{(f,f)}{(Tf,f)} > 0$, то фридрихсово расширение S_F также положительно определено и имеет ту же нижнюю грань, что и оператор S. Расширение Крейна характеризуетя следующими равенствами:

$$\mathrm{dom}\,(S_K) = \mathrm{dom}\,(S) \dotplus \ker(S^*),\ \ \mathcal{D}[S_K] = \mathcal{D}[S] \dotplus \ker(S^*). \tag{1.18}$$

Более того, $\mathrm{dom}\,(S^*) = \mathrm{dom}\,(S_F) \dotplus \ker(S^*)$ и для всякого полуограниченного самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ оператора S:

$$\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus (\mathcal{D}[\widetilde{S}] \cap \ker(S^*),\ \widetilde{S}[g,\varphi] = 0,\ \forall g \in \mathcal{D}[S],\ \varphi \in \ker(S^*) \cap \mathcal{D}[\widetilde{S}].$$

Для неотрицательности $\widetilde{S}$ необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{S}[\varphi,\varphi] \geq 0,\ \forall \varphi \in \ker(S^*) \cap \mathcal{D}[S]$.

Теорема 1.2.12 ([6])**.** *Пусть S положительно определенный симметрический оператор. Тогда формула*

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) = \mathrm{dom}\,(S) \dotplus (\widetilde{C} + S_F^{-1})\mathrm{dom}\,(\widetilde{C}) \dotplus (\ker(S^*) \ominus \overline{\mathrm{dom}}\,(\widetilde{C})),\\ &\widetilde{S} = S^* \restriction \mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) \end{aligned} \tag{1.19}$$

дает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми самосопряженными неотрицательными операторами $\widetilde{C}$ в подпространстве $N := \overline{\mathrm{dom}}\,(\widetilde{C}) \subseteq \ker(S^*)$. Ассоциированные замкнутые формы для $\widetilde{S}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus \mathrm{ran}\,(\widetilde{C}^{1/2}) \dotplus (\ker(S^*) \ominus \overline{\mathrm{dom}}\,(\widetilde{C})),\\ &\widetilde{S}[f+h_1+h_2] = S[f] + \widetilde{C}^{-1}[h_1],\\ &f \in \mathcal{D}[S],\ h_1 \in \mathrm{ran}\,(\widetilde{C}^{1/2}),\ h_2 \in \ker(S^*) \ominus \overline{\mathrm{dom}}\,(\widetilde{C}). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Пусть

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \left\{\langle h_1, \widetilde{C}h_1 + h_2\rangle,\ h_1 \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{C}), h_2 \in \ker\,(S^*) \ominus \overline{\mathrm{dom}}\,(\widetilde{C})\right\}$$

неотрицательное линейное отношение и $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{C}}^{-1}$ его обратное линейное отношение. Тогда формулы (1.19) и (1.20) могут быть записаны в терминах линейных отношений.

Теорема 1.2.13 ([6]). *Пусть S положительно определенный симметрический оператор. Тогда формула*

$$\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) = \mathrm{dom}\,(S) \dotplus (I + S_F^{-1}\widetilde{\mathbf{B}})\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathbf{B}}),\ \widetilde{S} = S^* \upharpoonright \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$$

дает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми самосопряженными неотрицательными линейными отношениями $\widetilde{\mathbf{B}}$ в подпространстве $\ker\,(S^*)$. *Ассоциированные замкнутые формы для $\widetilde{S}$ имеют следующий вид*

$$\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus \mathcal{D}[\widetilde{\mathbf{B}}],\ \widetilde{S}[f+h] = S[f] + \widetilde{\mathbf{B}}[h],\ f \in \mathcal{D}[S],\ h \in \mathcal{D}[\widetilde{\mathbf{B}}].$$

С учетом формул (1.18) линейное отношение $\mathbf{B}_K = \{\langle h, 0\rangle, h \in \ker\,(S^*)$ соответствует расширению Крейна (является оператором, если $B = B_K = 0$), $\mathbf{B}_F = \{\langle 0, h\rangle, h \in \ker\,(S^*)$ соответствует расширению Фридрихса.

1.2.7 Граничные тройки

Пусть S замкнутый плотно опредленный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H с равными дефектными числами, конечными или бесконечными: $n_\pm(S) = \dim\,(\mathfrak{N}_{\pm i}) \leq \infty$. Тогда, для оператора S^* существует и не единственно пространство граничных значений.

Определение 1.2.14 ([7, 11, 78, 17]). *Тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где $\mathcal{H}$ гильбертово пространство, $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ линейные отображения $\mathrm{dom}\,(S^*) \to \mathcal{H}$, называется пространством граничных значений или граничной тройкой для оператора S^*, если:*

1) для любых $f, g \in \mathrm{dom}\,(S^*)$ выполняется тождество Грина:

$$(S^*f, g)_H - (f, S^*g)_H = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}; \qquad (1.21)$$

2) отображение $\mathbf{\Gamma} : f \mapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ *– сюръекция* $\mathrm{dom}(\mathcal{A}^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

С каждой граничной тройкой $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для оператора S^* связаны два самосопряженных расширения S_0 и S_1 оператора S:

$$S_0 = S^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0) \quad \text{и} \quad S_1 = S^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1).$$

Заметим, что $\mathrm{dom}\,(S) = \mathrm{dom}\,(S_0) \cap \mathrm{dom}\,(S_1)$ и $\dim(\mathcal{H}) = n_\pm(S)$.

Расширение $\widetilde{S}$ оператора S называется *квази-самосопряженным* или *собственным*, если $S \subset \widetilde{S} \subset S^*$.

Теорема 1.2.15 ([41])**.** *Пусть S замкнутый плотно определенный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ граничная тройка для S^*. Тогда отображение:*

$$\widetilde{S} := S_\Theta \to \Theta := \mathbf{\Gamma}(\mathrm{dom}\,(\widetilde{S})) = \{(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f),\ f \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})\} \tag{1.22}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех собственных замкнутых расширений $\widetilde{S}$ оператора S и множеством всех замкнутых линейных отношений Θ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Для расширения S_Θ справедливы следующие утверждения:

1) $(S_\Theta)^* = S_{\Theta^*}$ для любого замкнутого линейного отношения Θ;

2) расширение S_Θ является самосопряженным в том и только в том случае, если линейное отношение Θ самосопряженное.

Определение 1.2.16 ([41, 50])**.** *Граничная тройка $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ называется базисной, если $S_F = S_0$ и $S_K = S_1$.*

В этом случае $S_K[f, g] = (S^* f, g) - (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}},\ f, g \in \mathrm{dom}\,(S^*)$.

Теорема 1.2.17 ([41])**.** *Пусть S плотно определенный неотрицательный симметрический оператор с трансверсальными расширениями по Фридрихсу и Крейну и $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ базисная граничная трочка для S^*. Тогда отображение* (1.22) *устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательным самосопряженными линейными отношениями Θ в $\mathcal{H}$ и всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $S_\Theta \subseteq S^*$ оператора S.*

Пусть операторы L_1 и L_2 такие, что

$$\mathrm{dom}\,(L_1) \text{ и } \mathrm{dom}\,(L_2) \text{ плотны в } \mathfrak{H},\ L_1, L_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{H}, H):\quad L_1 \subset L_2. \tag{1.23}$$

Согласно работам В.Е. Лянце и О.Г. Сторожа [84, 26], пара $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ называется *граничной парой для* $L_1 \subset L_2$, если $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство,

$$\Gamma \in \mathcal{L}\,(\mathrm{dom}\,(L_2), \mathcal{H}) \quad \text{и} \quad \ker(\Gamma) = \mathrm{dom}\,(L_1), \quad \mathrm{ran}\,(\Gamma) = \mathcal{H}.$$

Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – граничная пара для $L_1 \subset L_2$. Тогда существует линейный оператор $G \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}\,(L_1^*), \mathcal{H})$ такой, что $\{\mathcal{H}, G\}$ является граничной парой для $L_2^* \subset L_1^*$ и выполняется тождество Грина

$$(L_1^* f, u)_H - (f, L_2 u)_{\mathfrak{H}} = (Gf, \Gamma u)_{\mathcal{H}},\ f \in \mathrm{dom}\,(L_1^*),\ u \in \mathrm{dom}\,(L_2). \tag{1.24}$$

Определение 1.2.18 ([26]). *Пусть $\mathcal{H}$, G и Γ определены выше. Тогда тройка $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ называется граничной тройкой для пары операторов $L_1 \subset L_2$.*

1.2.8 γ-поле и функция Вейля

Определение 1.2.19 ([70]). *Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ граничная тройка для S^*, тогда операторно-значные функции $\gamma(z):\ \rho(S) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, H)$ и $M(z):\rho(S) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$*

$$\gamma(z) := (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1}, \quad M(z) := \Gamma_1 \gamma(z),\ z \in \rho(S), \tag{1.25}$$

называются γ-полем и функцией Вейля, соответственно.

Функция Вейля $M(\cdot)$ и γ-поле $\gamma(\cdot)$ голоморфны на $\rho(S_0)$ и функция Вейля является неванлинновской R-функцией. Отметим, что $\gamma(\overline{z}) = (\Gamma_1(S_0 - zI)^{-1})^*$.

Теорема 1.2.20 ([71]). *Пусть S замкнутый плотно определенный неотрицательный симметрический оператор, совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для S^* такая, что $S_0 \geq 0$ и $M(\cdot)$ соответствующая функция Вейля. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) существует сильный резольвентный предел

$$M(0) := s - R - \lim_{x \uparrow 0} M(x) \quad \left(M(-\infty) := s - R - \lim_{x \downarrow -\infty} M(x) \right)$$

который является полуограниченным снизу (сверху) самосопряженным линейным отношением в $\mathcal{H}$;

2) линейное отношение $M(0)$ $(M(-\infty))$ ассоциировано с замкнутой квадратичной формой

$$\begin{gathered} t_0[h] = s - R - \lim_{x\uparrow 0}(M(x)h, h) \\ \left(t_{-\infty}[h] = s - R - \lim_{x\downarrow -\infty}(M(x)h, h)\right) \end{gathered} \tag{1.26}$$

с областью определения

$$\begin{gathered} \mathrm{dom}\,(t_0) = \left\{h:\ s - R - \lim_{x\uparrow 0}(M(x)h, h) < \infty\right\} \\ \left(\mathrm{dom}\,(t_{-\infty}) = \left\{h:\ s - R - \lim_{x\downarrow -\infty}(M(x)h, h) < \infty\right\}\right); \end{gathered} \tag{1.27}$$

3) расширения S_0 и S_K дизъюнктны в том и только в том случае, если $M(0)$ является оператором $(M(0) \in \mathcal{C}(\mathcal{H}))$ и трансверсальны в том и только в том случае, если $M(0)$ ограниченный оператор в $\mathcal{H}$;

4) расширения Фридрихса S_F и Крейна S_K определяются с помощью следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(S_K) = \{f \in \mathrm{dom}\,(S^*) :\ (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in M(0)\}\,,\quad S_K = S^* \upharpoonright \mathrm{dom}\,(S_K), \\ &\mathrm{dom}\,(S_F) = \{f \in \mathrm{dom}\,(S^*) :\ (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) \in M(-\infty)\}\,,\quad S_F = S^* \upharpoonright \mathrm{dom}\,(S_F), \end{aligned}$$

если $M(0), M(-\infty) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, то

$$\mathrm{dom}\,(S_K) = \ker\,(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_0),\quad \mathrm{dom}\,(S_F) = \ker\,(\Gamma_1 - M(-\infty)\Gamma_0);$$

5)

$$\begin{gathered} S_0 = S_F \iff \lim_{x\downarrow -\infty}(M(x)h, h) = -\infty,\quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \\ S_0 = S_K \iff \lim_{x\uparrow 0}(M(x)h, h) = +\infty,\quad \forall h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}; \end{gathered}$$

6) если $S_0 = S_F$, то отображение (1.22) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $\widetilde{S} = S_\Theta$ оператора S и всеми самосопряженными линейными отношениями Θ такими, что $M(0) \leq \Theta$.

1.2.9 Неотрицательные самосопряженные расширения во внутренних терминах (подход Арлинского-Цекановского)

Пусть S замкнутый плотно определенный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H, $\mathfrak{N}_z = \ker(S^* - zI)$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ – его дефектное подпространство. Согласно первой формуле Неймана, область определения сопряженного оператора S^* представляется в виде прямой суммы:

$$\operatorname{dom}(S^*) = \operatorname{dom}(S) \dotplus \mathfrak{N}_z \dotplus \mathfrak{N}_{\overline{z}}, \ \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Будем рассматривать область определения сопряженного оператора $\operatorname{dom}(S^*)$ как гильбертово пространство H_+ со скалярным произведением:

$$(f, g)_+ = (f, g) + (S^* f, S^* g).$$

Тогда H_+ имеет $(+)$-ортогональное разложение: $H_+ = \operatorname{dom}(S) \oplus_+ \mathfrak{N}_i \oplus_+ \mathfrak{N}_{-i}$. Пусть $f, g \in \mathfrak{N}_i \oplus_+ \mathfrak{N}_{-i}$, тогда $S^{*2} f = -f$, $(S^* f, S^* g)_+ = (S^* f, S^* g) + (S^{*2} f, S^{*2} g) = (f, g)_+$.

Зафиксируем самосопряженное расширение A опертора S и обозначим:

$$\mathfrak{N}_A = \operatorname{dom}(A) \ominus \operatorname{dom}(S), \ \ \mathfrak{M}_A = H_+ \ominus \operatorname{dom}(A),$$

тогда справедливы равенства:

$$\operatorname{dom}(A) = \operatorname{dom}(S) \oplus \mathfrak{N}_A, \ \ H_+ = \operatorname{dom}(S) \oplus \mathfrak{N}_A \oplus \mathfrak{M}_A$$

По второй формуле Неймана [3] самосопряженному расширению A оператора S соответствует фиксированный изометрический оператор V из $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$ и

$$\mathfrak{N}_A = (I + V)\mathfrak{N}_i, \ \ \mathfrak{M}_A = (I - V)\mathfrak{N}_i.$$

Тогда справедливы следующие равенства (см. [59] и[26]):

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}_A = A\mathfrak{N}_A, \ \mathfrak{N}_A = S^*\mathfrak{M}_A, \ (A + iI)\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_i, \ (A - iI)\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_{-i},\\ &\mathfrak{N}_A = \{f \in \operatorname{dom}(A) : \ S^* A f = -f\}, \ \mathfrak{M}_A = \{f \in \operatorname{dom}(S^*) : \ A S^* f = -f\}.\end{aligned}$$

Пусть S неотрицательный оператор и $A = S_F$ его фридрихсово расширение, в этом случае обозначим:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{N}_F = \mathfrak{N}_A, \ \ \mathfrak{M}_F = \mathfrak{M}_A = S_F \mathfrak{N}_F,\\ &\operatorname{dom}(S_F) = \operatorname{dom}(S) \oplus \mathfrak{N}_F, \ \ H_+ = \operatorname{dom}(S) \oplus \mathfrak{N}_F \oplus S_F \mathfrak{N}_F.\end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{N}_0 := \mathrm{ran}\,(S_F^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_F$. Предположим, что $\mathfrak{N}_0 \neq 0$ и определим на $\mathfrak{N}_0$ неотрицательную полуторалинейную форму ω_0:

$$\omega_0[e,g] = (\widehat{S}_F^{-1/2} e, \widehat{S}_F^{-1/2} g)_+. \tag{1.28}$$

Форма ω_0 является замкнутой в H_+ [60].

Пусть $\mathbf{W}_0$ $(+)$-неотрицательное линейное отношение в $\mathfrak{N}_F$ ассоциированное с замкнутой формой ω_0 [60]. Поскольку $\omega_0[e] > 0$ для всех $0 \neq e \in \mathfrak{N}_0$, то $\ker(\mathbf{W}_0) = \{0\}$. Отсюда, $\mathbf{W}_0^{-1}(0) = 0$, а значит, $\overline{\mathrm{dom}}\,(\mathbf{W}_0^{-1}) = \mathfrak{N}_F$, тогда $\mathrm{dom}\,(\mathbf{W}_0^{-1}) = \mathrm{dom}\,(W_0^{-1})$ и $\mathrm{ran}\,(\mathbf{W}_0^{-1}) = \mathrm{ran}\,(W_0^{-1})$, где $(+)$-самосопряженный неотрицательный оператор W_0^{-1} – операторная часть линейного отношения $\mathbf{W}_0^{-1}$. То есть, линейное отношение $\mathbf{W}_0^{-1}$ является графиком оператора W_0^{-1}. Очевидно, что $\ker(W_0^{-1}) = \mathbf{W}_0(0) = \mathfrak{N}_F \ominus \mathfrak{N}_0$.

Теорема 1.2.21 ([60]). *Оператор S имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение в том и только в том случае, если $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$. Пусть $\mathfrak{N}_0 \neq \{0\}$, тогда формулами*

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) = \mathrm{dom}\,(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U})\mathrm{dom}\,(\widetilde{U}), \\ &\widetilde{S}(\varphi + h + S_F\widetilde{U}h) = S_F(\varphi + h) - \widetilde{U}h, \quad \varphi \in \mathrm{dom}\,(S),\ h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}), \end{aligned} \tag{1.29}$$

описывается взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми $(+)$-самосопряженными операторами $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$ такими, что

$$0 \leq \widetilde{U} \leq W_0^{-1}. \tag{1.30}$$

Теорема 1.2.22 ([60]). *Пусть $\mathfrak{N}_0 \neq \{0\}$, S неотрицательный симметрический оператор и $\widetilde{S}$ его неотрицательное самосопряженное расширение определенное в теореме 1.2.21, где оператор $\widetilde{U}$ удовлетворяет условию* (1.30), *тогда выполняются равенства:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus S_F\mathrm{ran}\,(\widetilde{U}^{1/2}),\ \varphi \in \mathcal{D}[S],\ h \in \mathrm{ran}\,(\widetilde{U}^{1/2}) \\ &\widetilde{S}[\varphi + S_F h] = \|S_F^{1/2}\varphi - \widehat{S}_F^{-1/2}h\|^2 + \widetilde{U}^{-1}[h] - \omega_0[h]. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Пусть $\mathfrak{N}_0 \neq 0$ и возьмем в формуле (1.29) $\widetilde{U} = W_0^{-1}$, получим расширение

Крейна [60]:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dom}(S_K) = \operatorname{dom}(S) \dotplus (I + S_F W_0^{-1})\operatorname{dom}(W_0),\\
&\mathcal{D}[S_K] = \mathcal{D}[S] \dotplus S_F\mathfrak{N}_0,\\
&S_K[\varphi + S_F h] = \|S_F^{1/2}\varphi - \widetilde{S}_F^{-1/2}h\|^2,\ \ \varphi \in \mathcal{D}[S],\ h \in \mathfrak{N}_0.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Из (1.32) следует, что для всех $g \in \mathcal{D}[S_K]$

$$\inf\left\{||S_K^{1/2}(g-\varphi)||^2,\ \ \varphi \in \operatorname{dom}(S)\right\} = 0. \tag{1.33}$$

Пусть

$$\operatorname{dom}(S_0) = \operatorname{dom}(S_F) \cap \operatorname{dom}(S_K) = \operatorname{dom}(S) \dotplus \mathbf{W}(0),\ \ S_0 = S_F \upharpoonright \operatorname{dom}(S_0),$$

тогда по теореме 1.29 для любого неотрицательного самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ оператора S имеем $\widetilde{S} \supset S_0$. Таким образом, расширение Фридрихса S_F и расширение Крейна S_K дизъюнктны в том и только в том случае, если $\mathfrak{N}_0$ плотно в $\mathfrak{N}_F$, и трансверсальны в том и только в том случае, если $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_F$.

1.3 Квази-самосопряженные расширения симметрических операторов

Пусть S плотно заданый неотрицательный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Описание всех квази-самосопряженных m-аккретивных расширений через дробно-линейные преобразование дано в [2] и через пространства граничных значений в работах [41, 14, 71, 18, 29], (см. также обзор [61]).

Пусть $\alpha \in (0, \pi/2)$, тогда ограниченный оператор T на $\mathfrak{H}$ принадлежит классу $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$ [1] если

$$\|T\,\sin\alpha \pm i\cos\alpha\, I\| \le 1. \tag{1.34}$$

Очевидно, что T принадлежит $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$ в том и только в том случае, если T^* принадлежит $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$. Положим

$$D_T = (I - T^*T)^{1/2},\ \mathfrak{D}_T = \overline{\operatorname{ran}}\,(D_T),$$

тогда условие (1.34) эквивалентно каждому из следующих двух [42]:

$$|(T_I f, f)| \le \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\,\|D_T f\|^2,\ \ \forall f \in \mathfrak{H};$$

или

$$\text{оператор } (I - T^*)(I + T) \quad - \quad \text{m-}\alpha\text{-секториальный.}$$

Более того, из (1.34) следует, что операторы принадлежащие $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$ являются сжимающими.

Отметим, что дробно-линейное преобразование $T = (I - S)(I + S)^{-1}$ m-α-секториального оператора S есть оператор класса $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$.

Пусть A неплотно определенное эрмитово сжатие в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathrm{dom}\,(A) =: H_0$ и пусть $\mathcal{N} := H \ominus H_0$. Обозначим через P_0 и $P_{\mathcal{N}}$ операторы отртогонального проектирования в H на подпространства H_0 и $\mathcal{N}$. Тогда оператор $A_0 = P_0 A$ является сжимающим и самосопряженным в H_0. Пусть $D_{A_0} = (I - A_0^2)^{1/2}$ – дефектный оператор определенный через A_0. Оператор $A_{21} = P_{\mathcal{N}} A$ также является сжимающим, более того из $A^*A \leq I$ следует, что $A_{21}^* A_{21} \leq D_{A_0}^2$. Тогда, следующее равенство определяет сжимающий оператор K_0 из $\mathfrak{D}_{A_0} := \overline{\mathrm{ran}}\,(D_{A_0})$ в $\mathcal{N}$ [72],[73]:

$$K_0 D_{A_0} f = P_{\mathcal{N}} A f, \quad f \in \mathrm{dom}\,(A).$$

Следовательно, мы можем записать следующее разложение эрмитового сжатия A:

$$A = \begin{pmatrix} P_0 A \\ P_{\mathcal{N}} A \end{pmatrix} = A_0 + K_0 D_{A_0} = \begin{pmatrix} A_0 \\ K_0 D_{A_0} \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Линейный оператор T называется квази-самосопряженным сжимающим расширением оператора A [55, 56, 2], если

$$\mathrm{dom}\,(T) = H, \; T \supset A, \; T^* \supset A, \; ||T|| \leq 1.$$

Множество всех сжимающих расширений оператора A формирует операторный интервал $[A_\mu, A_M]$ [23], где крайние операторы для всех $h \in H$ удовлетворяют услвоиям

$$\inf\{((I + A_\mu)(h - f), h - f), \; f \in H_0\} = 0,$$
$$\inf\{((I - A_M)(h - f), h - f), \; f \in H_0\} = 0.$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$\mathrm{ran}\,((I + A_\mu)^{1/2}) \cap \mathcal{N} = \{0\}, \; \mathrm{ran}\,((I - A_M)^{1/2}) \cap \mathcal{N} = \{0\}.$$

Множество всех квази-самосопряженных сжимающих расширений оператора A формирует операторный шар с центром в "точке"$\frac{A_\mu+A_M}{2}$ и радиусом $\frac{(A_\mu-A_M)^{1/2}}{\sqrt{2}}$ [2, 56]:

$$\mathfrak{B}\left(\frac{A_\mu+A_M}{2},\frac{A_\mu-A_M}{2}\right),$$

то есть, взаимно однозначное соответствие между множеством всех квази-самосопряженных сжимающих расширений T оператора A и множеством всех сжатий X в $\mathcal{N}_0 := \overline{\operatorname{ran}}\,(A_M - A_\mu)$ описывается равенством:

$$T = \frac{A_\mu+A_M}{2} + \left(\frac{A_M-A_\mu}{2}\right)^{1/2} X \left(\frac{A_M-A_\mu}{2}\right)^{1/2}.$$

Квази-самосопряженное сжимающее расширение T принадлежит классу $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$ в том и только в том случае, если сжатие X принадлежит классу $C_{\mathcal{N}_0}(\alpha)$ [57].

Разложим оператор A согласно ортогональному разложению $H = H_0 \oplus \mathcal{N}$ как в (1.35) и квази-самосопряженное сжимающее расширение T оператора A, разложим также согласно $H = H_0 \oplus \mathcal{N}$. Тогда, $T_{11} = A_0$, $T_{12}^* = T_{21} = K_0 D_{A_0}$. Следующая теорема дает описание всех квази-самосопряженных сжимающих расширений оператора A с помощью блочных формул, см. [62, 69, 95] и [55, 2, 56].

Теорема 1.3.1. *Пусть A эрмитово сжатие в $H = H_0 \oplus \mathcal{N}$ с областью определения* $\operatorname{dom}(A) = H_0$ *и разложением* (1.35). *Тогда:*

1) формула

$$T = \begin{pmatrix} A_0 & D_{A_0}K_0^* \\ & \\ K_0 D_{A_0} & -K_0 A_0 K_0^* + D_{K_0^*} X D_{K_0^*} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} H_0 \\ \oplus \\ \mathcal{N} \end{array} \to \begin{array}{c} H_0 \\ \oplus \\ \mathcal{N} \end{array} \tag{1.36}$$

дает взаимно однозначное соответствие между всеми квази-само-сопряженными сжимающими расширениями T эрмитова сжатия $A = A_0 + K_0 D_{A_0}$ и всеми сжатиями X в подпространстве $\mathfrak{D}_{K_0^*} := \overline{\operatorname{ran}}\,(D_{K_0^*}) \subset \mathcal{N}$;

2) T является самосопряженным расширением оператора A в том и только в том случае, когда X в (1.36) *является самоспоряженным сжатием в $\mathfrak{D}_{K_0^*}$;*

3) T принадлежит классу $C_{\mathfrak{H}}(\alpha)$ в том и только в том случае, если X принадлежит классу $C_{\mathfrak{D}_{K_0^*}}(\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Из (1.36), соответственно, с $X = -I \upharpoonright \mathfrak{D}_{K_0^*}$ и $X = I \upharpoonright \mathfrak{D}_{K_0^*}$, получаем:

$$\begin{gathered} A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 & D_{A_0} K_0^* \\ K_0 D_{A_0} & -K_0 A_0 K_0^* - D_{K_0^*}^2 \end{pmatrix}, \\ A_M = \begin{pmatrix} A_0 & D_{A_0} K_0^* \\ K_0 D_{A_0} & -K_0 A_0 K_0^* + D_{K_0^*}^2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1.37}$$

Из формул (1.37) следует, что

$$\tfrac{A_\mu + A_M}{2} = \begin{pmatrix} A_0 & D_{A_0} K_0^* \\ K_0 D_{A_0} & -K_0 A_0 K_0^* \end{pmatrix}, \ \tfrac{A_M - A_\mu}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0* \\ 0 & D_{K_0^*}^2 \end{pmatrix}.$$

Если T квази-самоспоряженное сжимающее расширение оператора A такое, что $T_R = A_\mu$ (A_M), тогда из (1.36) и (1.37) следует, что $T = A_\mu$ (A_M).

Пусть S плотно определенный неотрицательный оператор в H и $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ граничная тройка для S^*, $M(z)$ соответствующая функция Вейля. Тогда, все квази-самосопряженные m-секториальные расширения оператора S описываются следующим образом [15]:

$$\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2), \ \ \widetilde{S}_B = S^* \upharpoonright \mathrm{dom}\,(\widetilde{S}_B)$$

где B замкнутый оператор в $\mathcal{H}$ и $B - M(0)$ является m-секториальным.

Далее нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1.3.2 ([43]). *Пусть S неотрицательный симметрический оператор и $\widetilde{S}$ его m-аккретивное расширение, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\widetilde{S} \subset S^*$;

2) $\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) \subset \mathcal{D}[S_K]$ и $\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f) \geq S_K[f] = ||S_K^{1/2} f||^2, \ \forall f \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$;

3) $|(Sg, f)|^2 \leq (Sg, g)\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f), \ \forall f \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S}), \ g \in \mathrm{dom}\,(S)$.

Квази-самоспоряженное расширение $\widetilde{S}$ является m-секториальным в том и только в том случае, если следующая полуторалинейная форма является секториальной:

$$\omega[f, h] = (\widetilde{S}f, h) - S_K[f, h], \ \ f, h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S}).$$

Из результатов полученных в [44] и теоремы 1.2.4 следует, что равенства

$$\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathrm{dom}\,(\eta), \quad \widetilde{S}[u,v] = S_k[u,v] + \eta[u,v]$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми замкнутыми формами ассоциированными с квази-самосопряженными m-секториальными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми полуторалинейными секториальными формами η, замкнутыми в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}[S_K]$ и такими, что $\eta[\varphi] = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}[S]$.

Следствие 1.3.3 ([33]). *Если $S_F = S_K$ и если $\widetilde{S}$ m-аккретивное квази-самосопряженное расширение оператора S, то $\widetilde{S} = S_F$.*

1.4 Операторы в дивергентной форме

Предположим, что заданы линейные операторы $L_1,\ L_2$ такие, что

$$L_1,\ L_2 \in \mathcal{C}(H, \mathfrak{H}),\ L_1 \subset L_2,\ \overline{\mathrm{dom}}\, L_1 = \overline{\mathrm{dom}}\, L_2 = H, \tag{1.38}$$

тогда оператор вида

$$S = L_2^* L_1 \tag{1.39}$$

мы называем *оператором в дивергентной форме.* В частности, $S = \mathcal{L}_0^2$, где $\mathcal{L}_0$ – симметрический оператор в H и $L_1 = \mathcal{L}_0$, $L_2 = \mathcal{L}_0^*$.

Рассмотрим две полуторалинейных формы:

$$S_j[u,v] = (L_j u, L_j v)_{\mathfrak{H}}, \quad u, v \in \mathrm{dom}\,(L_j),\ j = 1,\ 2.$$

Ввиду (1.38) эти формы замкнуты и неотрицательны. По первой теореме о представлении с ними ассоциированны неотрицательные самосопряженные операторы $S_j = L_j^* L_j$, $j = 1, 2$, в H:

$$(L_j^* L_j u, v)_H = (L_j u, L_j v)_{\mathfrak{H}},\ u \in \mathrm{dom}\,(S_j),\ v \in \mathrm{dom}\,(L_j).$$

Оператор $S := L_2^* L_1$ является замкнутым, так как его график есть пересечение графиков операторов S_1 и S_2.

В работах [89] и [91] (также см. [50], [92]) показано, что каждый неотрицательный симметрический оператор специальным образом может быть представлен в дивергентной форме, также получено описание расширений Фридрихса, Крейна и других экстремальных расширений. Подобный подход был предложен в [79] для представления экстремальных расширений неотрицательных линейных отношений.

В теории дифференциальных уравнений и спектральном анализе линейных операторов зачастую удобным является представление оператора (или дифференциального уравнения) в дивергентной форме, то есть в виде произведения [25]. В частности, дифференциальные операторы Лапласса, Штурма-Лиувилля, акустический и электромагнитный операторы имеют естественное представление в дивергентной форме [68].

Оператор S, представленный в дивергентной форме (1.39), может иметь тривиальную область определения, хотя операторы L_1 и L_2 плотно определены. Построение примеров, а тем более описание такого рода операторов представляет отдельный интерес.

Наймарк в [30], [31] нашел пример плотно определенного замкнутого симметрического оператора T, чей квадрат T^2 имеет тривиальную область определения $\operatorname{dom}(T^2) = \{0\}$. Более конкретный пример неотрицательного симметрического оператора с такими же свойствами построил Чернов [67]. В работе Шмюдгена [94] получен результат, относящийся к степени симметрического оператора. В частности, установлено в [94, теорема 5.2], что для каждого неограниченного самосопряженного оператора T существуют замкнутые симметрические сужения T_1 и T_2 оператора T такие, что

$$\operatorname{dom}(T_1) \cap \operatorname{dom}(T_2) = \{0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{dom}(T_1^2) = \operatorname{dom}(T_2^2) = \{0\}.$$

В [65] показано, что эти результаты справедливы для замкнутого симметрического несамосопряженного оператора T.

Оснастим линейные многообразия $\operatorname{dom}(L_j)$, $j = 1, 2$, нормой графика. Далее нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1.4.1 ([47]). *Пусть операторы L_1 и L_2 удовлетворяют условиям* (1.38)

1) Если, к тому же, выполняется условие

$$\operatorname{dom}(L_1) \cap \operatorname{dom}(S_2) \ \textit{плотно в} \ \operatorname{dom}(L_1), \tag{1.40}$$

тогда

(i) *оператор* $S = L_2^* L_1$ *является плотно определенным неотрицательным оператором в* H*, операторы* S_1 *и* S_2 *– неотрицательные самосопряженные расширения оператора* S*, и оператор* S_1 *является расширением Фридрихса оператора* S*;*

(ii) $\mathcal{D}[S_K] \supseteq \mathrm{dom}\,(L_2)$ *и для всех* $u, v \in \mathrm{dom}\,(L_2)$ $S_K\,[u,v] = (\mathcal{P}L_2 u, L_2 v)_{\mathfrak{H}}$, *где* $\mathcal{P}$ *– оператор проектирования в* $\mathfrak{H}$ *на* $\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)$ *в соответствии с разложеним* $\mathfrak{H} = \overline{\mathrm{ran}}\,(L_1) \dotplus \ker\,(L_1^*)$.

2) Если выполняется условие $\dim\,(\mathrm{dom}\,(L_2)/\mathrm{dom}\,(L_1)) < \infty$, *то выполняется* (1.40) *и* $\mathcal{D}[S_K] = \mathrm{dom}\,(L_2)$, $S_K = L_2^* \mathcal{P} L_2$, $S^* = L_1^* L_2$.

1.5 Цепочки оснащенных гильбертовых пространств

Пусть A – неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть

$$H_{+2} \subset H_{+1} \subset H \subset H_{-1} \subset H_{-2}$$

– цепочка оснащенных гильбертовых пространств [4, 19], построенных с помощью оператора A:

$$H_{+2} = \mathrm{dom}(A),\ H_{+1} = \mathrm{dom}(|A|^{1/2})$$

с нормами

$$||f||_k = \left(\left\| |A|^{k/2} f \right\|^2 + \|f\|^2 \right)^{1/2},\ k = 1, 2.$$

Гильбертовы пространства с отрицательным индексом H_{-k} $(k = 1, 2)$ – это пополнения H по нормам $||f||_{-k} = \sup\limits_{||g||_k = 1} |(f, g)|$. Оператор A имеет непрерывное продолжение $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-2})$, $k = 0, 1$ $(H_0 := H)$ и $|\mathbf{A}|^{1/2} \in \mathcal{L}(H_k, H_{k-1})$, $k = -1, 0$ это продолжение $|A|^{1/2}$. Резольвента $\mathrm{R}_z = (A - zI)^{-1}$, $z \in \rho(A)$ имеет продолжение $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(H_{-k}, H_{-k+2})$, $k = 0, 1, 2$.

Пусть Φ – подпространство в H_{-2} такое, что $\Phi \cap H = \{0\}$, тогда оператор $\mathcal{A}$, определенный следующим образом [19]

$$\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \Big\{ f \in H_{+2} : (f, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Phi \Big\},\ \mathcal{A} = A \restriction \mathrm{dom}(\mathcal{A}) \qquad (1.41)$$

является замкнутым плотно определенным симметрическим оператором с индексами дефекта равными $\dim(\Phi)$. Для дефектного пространства $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^* - zI)$ справедлива формула $\mathfrak{N}_z(\mathcal{A}) = \mathbf{R}_z\Phi$. Более того, если A неотрицательный самосопряженный оператор и $\mathcal{A}$ определен формулами (1.41), то имеет место утверждение.

Предложение 1.5.1 ([19]). *Оператор A является расширением по Фридрихсу оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$.*

Теорема 1.5.2 ([55, 60, 27, 23]). *Пусть A – неотрицательный самосопряженный оператор и пусть оператор $\mathcal{A}$ задан формулами* (1.41). *Предположим, что A является фридрихсовым расширением оператора $\mathcal{A}$.*

1. *Следующие условия эквивалентны:*

   (a) *расширение Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$ и оператор A трансверсальны;*

   (b) *$A^{1/2}H_{+1} \supset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$;*

   (c) *$A^{1/2}H_{+1} \supset (\mathbf{A}^2 + I)^{-1}\Phi$;*

   (d) *$\mathbf{A}^{1/2}H_{-1} \supset \Phi$.*

2. *Следующие условия эквивалентны:*

   (a) *расширение Крейна $\mathcal{A}_K$ оператора $\mathcal{A}$ и оператор A дизъюнктны;*

   (b) *$A^{1/2}H_{+1} \cap \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ плотно в $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ по норме H;*

   (c) *$A^{1/2}H_{+1} \cap (\mathbf{A}^2 + I)^{-1}\Phi$ плотно в $(\mathbf{A}^2 + I)^{-1}\Phi$ по норме H_{+1};*

   (d) *$\mathbf{A}^{1/2}H_{-1} \cap \Phi$ плотно в Φ по норме H_{-2}.*

1.6 Операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями

С формальными дифференциальными выражениями

$$h_{Y,q,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \sum_{j\in\mathbb{J}} \alpha_j\delta_j(x), \quad h_{Y,q,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \sum_{j\in\mathbb{J}} \beta_j\langle\cdot,\delta_j'\rangle\delta_j'(x), \tag{1.42}$$

ассоциированы операторы $H_{Y,q,\alpha}$, $H_{Y,q,\beta}$ [81] – операторы Шрёдингера с $\delta-$ и δ'-взаимодействиями в $L_2(\mathbb{R})$, где $\delta_j(x) = \delta(x - y_j)$ и $\delta_j'(x)$ – дельта функция

Дирака и ее производная, $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{Z}$, $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{J}} \subset \mathbb{R}$, константы $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{R}$ называют интенсивностями взаимодействий в точке y_j. Эти дифференциальные операторы относятся к числу, так называемых, решаемых моделей. Такая задача впервые возникла в модели Кронига-Пенни в 1931 году при исследовании движения электрона в фиксированной кристаллической решетке. Один из способов ассоциировать самосопряженые операторы с выражениями (1.42) это метод квадратичных форм: оператор $-\Delta + \alpha_0\delta(x - y_0)$ определяется как оператор ассоциированный с формой $\int\limits_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt + \alpha_0|f(y_0)|^2$, $f \in W_2^1(\mathbb{R})$. Другой способ – это разложение минимального дифференциального оператора на ортогональную сумму минимальных операторов $-\Delta$ в пространвствах $L_2(-\infty, y_0)$ и $L_2(y_0, +\infty)$, с соответствующими граничными условиями в точке y_0. Но оба метода имели ограниченый успех, так как имеют недостатки в случае бесконечного множества точек взаимодействий. Другой метод был предложен в [66]. Операторы Шрёдингера определяются как самосопряженные расширения $\widetilde{H}$ минимального оператора H_{min} такие, что скобки Лагранжа непрерывны на $\mathbb{R}$ для всех элементов из $\mathrm{dom}\,(\widetilde{H})$. Пусть далее

$$\inf_{j\neq k\in\mathbb{J}} |y_k - y_j| > 0.$$

Тогда операторы Шрёдингера с $\delta-$ и δ'-взаимодействиями в $L_2(\mathbb{R})$ определены дифференциальным выражением $-\Delta + q(x)$ с областями определения

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\,(H_{Y,q,\alpha}) = \big\{ & f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash Y) : f(y_j-) = f(y_j+), \\ & f'(y_j+) - f'(y_j-) = \alpha_j f(y_j),\ y_j \in Y\big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\,(H_{Y,q,\beta}) = \big\{ & f \in W_2^2(\mathbb{R}\backslash Y) : f'(y_j-) = f'(y_j+), \\ & f(y_j+) - f(y_j-) = \beta_j f'(y_j),\ y_j \in Y\big\}\end{aligned}$$

Самосопряженность операторов $H_{Y,q,\alpha}$ и $H_{Y,q,\beta}$ была доказана в [11, 74]. Для изучения спектра оператора $H_{Y,q,\alpha}$ Кочубей [18] впервые применил метод граничных троек (пространства граничных значений). Спектральные свойства изучались широким кругом математиков (см. напр. [37, 87, 86, 27, 81, 18])

В многомерном случае метод квадратичных форм не работает – формальное дифференциальное выражение в $L_2(\mathbb{R}^d),\ d = 2,\ 3$,

$$H_{Y,\alpha,d} = -\Delta + \sum_{j\in\mathbb{J}} \alpha_j \delta_{y_j}(x), \tag{1.43}$$

где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}$, не определяет оператор, так как $\delta(x-y)$ не является непрерывным функционалом в $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, $d=2,\ 3$. Аппроксимационный метод имел ограниченный успех, появлялась неизбежность процедуры перенормировки константы связи. Березин и Фаддеев [5] в 1961 году предложили новый метод, на основе теории расширений симметрических операторов. Они определили гамильтониан с одной точкой взаимодействия в пространстве как самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Для случая коненого числа точечных взаимодействий было предложено [36] рассматривать гамильтониан (1.43) как множество самосопряженных расширений замкнутого симметрического оператора

$$S=-\Delta,\ \mathrm{dom}\,(S)=\left\{f\in W_2^2(\mathbb{R}^d): f(y_j)=0,\ j\in\mathbb{J}\right\},$$

с равными индексами дефекта ($n_\pm(S)=|\mathbb{J}|$). Самосопряженные расширения были параметризованы в терминах резольвент.

В работах Кошманенко и др. (см. [19, 20, 64]) для исследования более общего случая – оператора $H=H_0+V$, где H_0 – гамильтониан свободной системы, а V соответствует возмущению (потенциал, описывающий взаимодействие со внешним источником воздействия), применяется метод оснащенных гильбертовых пространств.

Одна из задач исследования это описание всех самосопряженных расширений оператора S, то есть описание гамильтонианов. Для описания всех собственных расширений оператора S применялись методы граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. [85, 86, 80, 38, 75]), а также методы описания во внутренних терминах в работах [60, 59, 58].

Выводы к главе 1

В первой главе изложены основные понятия и материалы по теории самосопряженных и квази-самосопряженных расширений неотрицательных симметрических операторов и их свойств.

- Определены экстремальные расширения Фридрихса и Крейна и их свойства.

- Изложены теория Крейна, подход Бирмана-Вишика для положительно определенных операторов

- Даны определения граничных троек для сопряженного оператора и для пары операторов, определение граничной пары и базисной граничной тройки. Приведена параметризация самосопряженных расширений симметрического оператора посредством граничных троек.

- Приведены определения γ-функции и функции Вейля и дана параметризация самосопряженных расширений симметрического оператора через граничную тройку и функцию Вейля.

- Изложен подход Ю.М. Арлинского и Э.Р. Цекановского описания собственных неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора во внутренних терминах.

- Дано определения оператора в дивергентной форме и приведено описание его расширений Фридрихса и Крейна.

- Приведено определение цепочки оснащенных гильбертовых пространств построеных на основе неограниченного самосопряженного оператора и приведены его основные свойства.

- Дан обзор по операторам Шрёдингера с точечными взаимодействиями на прямой, на плоскости и в пространстве.

Глава 2

Операторы в дивергентной форме и их экстремальные расширения

В первом разделе данной главы мы рассматриваем неотрицательный симметрический оператор $\mathcal{A}$, заданный в дивергентной форме (1.39). Мы описываем расширения Фридрихса $\mathcal{A}_F$ и Крейна $\mathcal{A}_K$ опертора $\mathcal{A}$, ассоциированные с ними полуторалинейные формы, сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ и устанавливаем критерий трансверсальности $\mathcal{A}_F$ и $\mathcal{A}_K$. Для случая, когда $\mathcal{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ ($\mathcal{A} = \mathcal{L}_0\mathcal{L}$), где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый симметрический оператор с равными индексами дефекта в H и $\mathcal{L}$ его неотрицательное самосопряженное расширение, устанавливаем критерий для выполнения равенства $\mathcal{A}^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$ ($\mathcal{A}^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$). В конце раздела, мы предлагаем конструкцию базисной граничной тройки для $\mathcal{A}^*$ и, с ее помощью, описываем все неотрицательные самосопряженные расширения оператора $\mathcal{A}$.

Второй раздел главы мы начинаем с примера конструкции двух операторов – плотно определенного неотрицательного симметрического оператора $\mathcal{L}_0$ и его неотрицательного самосопряженного расширения $\mathcal{L}$ таких, что $\operatorname{dom}(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$, в частности, $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2) = \{0\}$. Далее, мы доказываем, что каждый плотно определенный неотрицательный симметрический оператор $\dot{A}$, имеющий дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения, допускает бесконечного много факторизаций вида $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор в H и $\mathcal{L}$ его неотрицательное самосопряженное расширение, и параметризуем эти факторизации. Для случая неплотно заданного симметрического оператора $\dot{A}$ устанавливаем критерий существования таких факторизаций.

2.1 Экстремальные расширения операторов в дивергентной форме

В следующей теореме для оператора в дивергентной форме дается критерий описания его сопряженного и экстремальных самосопряженных расширений Фридрихса и Крейна и их свойства трансверсальности.

Теорема 2.1.1. *Пусть операторы L_1 и L_2 удовлетворяют условиям* (1.38), (1.40).

1) Если оператор $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ плотно определен и его сопряженный задается равенством:

$$\mathcal{A}^* = L_1^* L_2, \tag{2.1}$$

тогда:

(i) $\mathcal{D}[\mathcal{A}] = \mathrm{dom}\,(L_1),\ \mathcal{A}[u,v] = (L_1 u, L_1 v),\ u,v \in \mathrm{dom}\,(L_1)$,

(ii) *расширение Фридрихса оператора $\mathcal{A}$ определяется как $\mathcal{A}_F = L_1^* L_1$, то есть*

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F) = \{f \in \mathrm{dom}\,(L_1) : L_1 f \in \mathrm{dom}\,(L_1^*)\}\,,$$
$$\mathcal{A}_F f = L_1^* L_1 f = L_1^* L_2 f, \quad f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_F),$$

(iii) *расширение Крейна оператора $\mathcal{A}$ это оператор $\mathcal{A}_K = L_2^* P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2$, то есть*

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K) = \{f \in \mathrm{dom}\,(L_2) : P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 f \in \mathrm{dom}\,(L_2^*)\},$$
$$\mathcal{A}_K f = L_2^* P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 f,\ f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K),$$

и

$$\mathcal{D}[\mathcal{A}_K] = \mathrm{dom}\,(L_2),$$
$$\mathcal{A}_K[u,v] = (P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 u, P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 v),\ u,v \in \mathrm{dom}\,(L_2),$$

(iv) *расширения Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}$ трансверсальны.*

2) Если оператор $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ плотно определен, оператор $L_1^* L_1$ является его фридрихсовым расширением и является подпространством в H линейное многообразие

$$\mathfrak{M} := \ker\,(L_1^* L_2 + I), \tag{2.2}$$

тогда $\mathcal{A}^* = L_1^* L_2$.

Доказательство. 1) Докажем, что $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$ плотно в $\mathrm{dom}\,(L_1)$ по норме графика. Если $h \in \mathrm{dom}\,(L_1)$ ортогонален к $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$, тогда

$$(L_1 f, L_1 h)_{\mathfrak{H}} + (f,h)_H = 0, \quad \forall f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{dom}\,(L_2^* L_1).$$

Поскольку $L_1 f \in \mathrm{dom}\,(L_2^*)$, $L_1 h = L_2 h$ и $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ получаем, что

$$(\mathcal{A} f, h)_H + (f,h)_H = 0, \quad \forall f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}).$$

Следовательно, $h \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*)$ и $\mathcal{A}^*h = -h$. Согласно предположению $\mathcal{A}^* = L_1^*L_2$, но так как $h \in \mathrm{dom}\,(L_1)$, то $\mathcal{A}^*h = L_1^*L_1h = -h$. Что противоречит неотрицательности оператора $L_1^*L_1$, значит $h = 0$. Следовательно, $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$ плотно в $\mathrm{dom}\,(L_1)$ по норме графика.

Поскольку форма $(L_1u, L_1v)_{\mathfrak{H}},\ u, v \in \mathrm{dom}\,(L_1)$ замкнута и $(\mathcal{A}f, g)_H = (L_1f, L_1g)_{\mathfrak{H}},\ f, g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$, и $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$ плотно в $\mathrm{dom}\,(L_1)$ по норме графика, то $\mathcal{A}_F = L_1^*L_1$.

Далее $\mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2}) = \mathrm{ran}\,(L_1^*)$. Действительно, предположим обратное, пусть $\varphi \in \mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2})$ и $0 \neq \varphi \perp \mathrm{ran}\,(L_1^*)$. Значит, $\varphi \in \ker\,(L_1)$, но тогда существует такой $f \neq 0$ из $\ker\,(L_1)$, что $\frac{|(f,\varphi)|^2}{||L_1f||^2} = +\infty$. Противоречие. Следовательно, $\varphi \in \mathrm{ran}\,(L_1^*)$ и $\mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2}) \subset \mathrm{ran}\,(L_1^*)$. Пусть $g \in H$ лежит в $\mathrm{ran}\,(L_1^*)$, тогда существует $f \in \mathrm{dom}\,(L_1) \subset H$ такой, что $g = C\frac{L_1^*L_1f}{||L_1f||^2},\ C \in \mathbb{C}$. Тогда $\frac{|(f,g)|^2}{||L_1f||^2} = |C|^2$. Следовательно, $\mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2}) \supset \mathrm{ran}\,(L_1^*)$.

Очевидно, что $\mathrm{ran}\,(\mathcal{A}^*) = \mathrm{ran}\,(L_1^*L_2) \subseteq \mathrm{ran}\,(L_1^*) = \mathrm{ran}\,(\mathcal{A}_F^{1/2})$. Тогда, по предложению 1.2.11 расширения Фридрихса $\mathcal{A}_F$ и Крейна $\mathcal{A}_K$ трансверсальны.

Оператор $\widetilde{\mathcal{A}} = L_2^*L_2$ является неотрицательным самосопряженным расширением оператора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}[\widetilde{\mathcal{A}}] = \mathrm{dom}\,(L_2)$. Обозначим дефектное подпространство оператора $\mathcal{A}$: $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) = \ker\,(\mathcal{A}^*+I)$. Так как $\mathcal{A}^* = L_1^*L_2$, то $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}$ где $\mathfrak{M}$ определяется формулой (2.2). Очевидно, что $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}\,(L_2)$. Отсюда, $\mathcal{D}[\mathcal{A}_K] \supseteq \mathcal{D}[\widetilde{\mathcal{A}}] = \mathrm{dom}\,(L_2) \supset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$.

Поскольку $\mathcal{D}[\widetilde{\mathcal{A}}] \subseteq \mathcal{D}[\mathcal{A}_K]$ и $\mathcal{D}[\mathcal{A}_K] \supset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$, и $\mathcal{D}[\widetilde{\mathcal{A}}] \supset \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$, то ввиду разложения (1.10) получаем, что $\mathcal{D}[\mathcal{A}_K] = \mathcal{D}[\widetilde{\mathcal{A}}] = \mathrm{dom}\,(L_2)$.

Так как $\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{A}}) = \mathrm{dom}\,(L_2^*L_2) \supset \mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$, а $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A})$ плотно в $\mathrm{dom}\,(L_1)$, то, применяя теорему 1.4.1, получим:

$$\mathcal{A}_K[u, v] = (P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)}L_2u, P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)}L_2v),\ u, v \in \mathcal{D}[\mathcal{A}_K] = \mathrm{dom}\,(L_2).$$

По первой теореме о представлении:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K) = \mathrm{dom}\,(L_2^*P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)}L_2) = \{f \in \mathrm{dom}\,(L_2) : P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)}L_2f \in \mathrm{dom}\,(L_2^*)\},\\
&\mathcal{A}_Kf = L_2^*P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)}L_2f = L_2^*(L_2f - P_{\ker\,(L_1^*)}L_2f) =\\
&= L_1^*(L_2f - P_{\ker\,(L_1^*)}L_2f) = L_1^*L_2f,\ f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}_K).
\end{aligned}$$

2) Линейное многообразие $\mathfrak{M}$ является ортогональным дополнением к

$\mathrm{dom}\,(L_1)$ в $\mathrm{dom}\,(L_2)$ по скалярному произведению графика:

$$(f,g)_{L_2} := (f,g)_H + (L_2 f, L_2 g)_{\mathfrak{H}}.$$

Равенство $(f,g)_{L_2} = 0$ для всех $f \in \mathrm{dom}\,(L_1)$ влечет $L_2 g \in \mathrm{dom}\,(L_1^*)$ и $L_1^* L_2 g = -g$, то есть, $g \in \mathfrak{M}$. Если $g \in \mathfrak{M}$, то $(f,g)_{L_2} = 0$ для всех $f \in \mathrm{dom}\,(L_1)$.

Для всех $g \in \mathfrak{M}$ и для всех $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}\,(L_1)$ выполняется равенство $(f,g)_{L_2} = (L_1 f, L_2 g)_{\mathfrak{H}} + (f,g)_H = 0$. Так как $L_1 f \in \mathrm{dom}\,(L_2^*)$, то

$$0 = (L_2^* L_1 f, g)_H + (f,g)_H = (\mathcal{A} f + f, g)_H = (f, \mathcal{A}^* g + g)_H, \quad \text{для всех } f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}).$$

Значит, $g \in \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}^*)$, то есть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$.

Поскольку $\mathcal{A}_F = L_1^* L_1$ и оператор $L_2^* L_2$ является неотрицательным самосопряженным расширением оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathrm{dom}\,(L_2) = \mathrm{dom}\,(L_1) \dotplus (\mathrm{dom}\,(L_2) \cap \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})),$$

а так как $\mathrm{dom}\,(L_2) = \mathrm{dom}\,(L_1) \oplus_{L_2} \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = \mathrm{dom}\,(L_2) \cap \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$.

Неотрицательные самосопряженные расширения $\mathcal{A}_F$ и $L_2^* L_2$ дизъюнктны, так как $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}) = \mathrm{dom}\,(L_2^* L_1) = \mathrm{dom}\,(L_1^* L_1) \cap \mathrm{dom}\,(L_2^* L_2)$. Тогда $\mathrm{dom}\,((L_2^* L_2)^{1/2}) \cap \mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ плотно в $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$ по норме H (см. теорему 1.2.10). Так как $\mathrm{dom}\,((L_2^* L_2)^{1/2}) = \mathrm{dom}\,(L_2)$, то получаем, что $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A})$. Но так как $\mathfrak{M}$ подпространство в H, то $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}$. То есть, получаем, что $\mathfrak{N}_{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}\,(L_2) = \mathcal{D}[L_2^* L_2]$, а значит по теореме 1.2.11 расширения $L_1^* L_1$ и $L_2^* L_2$ трансверсальны. Отсюда $\mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*) = \mathrm{dom}\,(L_1^* L_1) + \mathrm{dom}\,(L_2^* L_2) = \mathrm{dom}\,(L_1^* L_2)$, то есть $\mathcal{A}^* = L_1^* L_2$. $\square$

Предложение 2.1.2. *Пусть $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый симметрический оператор в H, тогда следующие условия эквивалентны*

(i) $(\mathcal{L}_0^2)_F = \mathcal{L}_0^* \mathcal{L}_0$,

(ii) $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \cap \mathrm{ran}\,(\mathcal{L}_0 - \lambda I)$ *плотно в* $\mathrm{ran}\,(\mathcal{L}_0 - \lambda I)$ *хотя бы для одного невещественного* λ.

Доказательство. Для всех f и g из $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ выполняется равенство

$$(\mathcal{L}_0 f, \mathcal{L}_0 g) + (f,g) = ((\mathcal{L}_0 + iI) f, (\mathcal{L}_0 + iI) g) = ((\mathcal{L}_0 - iI) f, (\mathcal{L}_0 - iI) g),$$

Очевидно, что

$$\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2) = (\mathcal{L}_0 - \lambda I)^{-1} \left(\operatorname{ran}(\mathcal{L}_0 - \lambda I) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)\right), \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0. \tag{2.3}$$

Условие $(\mathcal{L}_0^2)_F = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ эквивалентно следующему — $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2)$ плотно в $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)$ по норме графика в $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)$. Это эквивалентно тому, что не существует нетривиального вектора $g \in \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)$ такого, что $(\mathcal{L}_0 f, \mathcal{L}_0 g) + (f, g) = 0$ для всех $f \in \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2)$. Из (2.3) следует эквивалентность (i) и (ii). $\square$

Теорема 2.1.3. *Пусть $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый симметрический оператор с равными индексами дефекта в H. Пусть $\mathcal{L}_0^2$ плотно определен и $(\mathcal{L}_0^2)^* = \mathcal{L}_0^{*2}$. Тогда, для любого самосопряженного расширения $\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}_0$ справедливы равенства:*

$$(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}, \tag{2.4}$$

$$(\mathcal{L}_0\mathcal{L})^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda(\mathcal{L}_0)$ дефектное подпространство оператора $\mathcal{L}_0$. Так как $\mathcal{L}_0^{*2} + I = (\mathcal{L}_0^* + iI)(\mathcal{L}_0^* - iI)$, то $\ker(\mathcal{L}_0^{*2} + I) \supset \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$.

Пусть $f_0 \in \ker(\mathcal{L}_0^{*2} + I)$, тогда

$$f \in \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \text{ или } (\mathcal{L}_0^* - iI) \in \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0) \text{ или } f \in \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0) \text{ или } (\mathcal{L}_0^* + iI) \in \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0).$$

Предположим, что f_0 не лежит в $\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$, тогда

$$0 \neq (\mathcal{L}_0^* - iI) f_0 \in \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0) \text{ или } 0 \neq (\mathcal{L}_0^* + iI) f_0 \in \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$$

и, так как $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^*) = \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$, то $f_0 \in \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)$. Значит, f_0 из $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)$ такой, что

$$0 \neq (\mathcal{L}_0 - iI) f_0 \in \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0) \text{ или } 0 \neq (\mathcal{L}_0 + iI) f_0 \in \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0),$$

то есть получили противоречие:

$$\operatorname{ran}(\mathcal{L}_0 - iI) \cap \ker(\mathcal{L}_0^* + iI) \neq \{0\} \ \text{ или } \ \operatorname{ran}(\mathcal{L}_0 + iI) \cap \ker(\mathcal{L}_0^* - iI) \neq \{0\}.$$

Следовательно, $\ker(\mathcal{L}_0^{*2} + I) \subset \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$.

Отсюда следует, что

$$\ker(\mathcal{L}_0^{*2} + I) = \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0).$$

Поскольку оператор $\mathcal{L}_0^2$ плотно определен и $(\mathcal{L}_0^2)^* = \mathcal{L}_0^{*2}$, то из утверждения 1) теоремы 2.1.1, для пары $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0^*$, следует, что оператор $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ является фридрихсовым расширением оператора $\mathcal{L}_0^2$. Из утверждения 2) теоремы 2.1.1 следует, что $\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$ является подпространством в H.

Пусть самосопряженное расширение $\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}_0$ задано следующим образом:

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \dotplus (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0),$$

где $\mathcal{U}$ – изометрически отображает $\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ на $\mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$.

Покажем, что $(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$. Так как $\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$ является подпространством в H, то и линейное многообразие $(I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ тоже является подпространством в H.

Пусть $g \in (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$, тогда существует $\varphi \in \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ такой, что $g = \varphi + \mathcal{U}\varphi$. Поскольку

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}g + g = g + \mathcal{L}_0^*(\mathcal{L}\varphi + \mathcal{L}\mathcal{U}\varphi) = g + \mathcal{L}_0^*(\mathcal{L}_0^*\varphi + \mathcal{L}_0^*\mathcal{U}\varphi) =\\ &= g + \mathcal{L}_0^*(i\varphi - i\mathcal{U}\varphi) = g - \varphi - \mathcal{U}\varphi = g - g = 0,\end{aligned}$$

то $g \in \ker(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L} + I)$, то есть

$$\ker(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L} + I) \supset (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0).$$

Пусть $f \in \ker(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L} + I)$, тогда $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)$, то есть

$$f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \text{ или } f \in (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0), \text{ и } \mathcal{L}f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*).$$

Предположим, что $f \notin (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$, тогда $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ и $\mathcal{L}f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)$, то есть $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ и $\mathcal{L}_0 f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)$. Так как $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, то $f \notin \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ и $f \notin \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$. Значит,

$$f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0),\ \ \mathcal{L}_0 f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*),\ (\mathcal{L}_0^* - iI)f \neq 0,\ \ (\mathcal{L}_0^* + iI)f \neq 0,$$

то есть

$$f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0),\ \ (\mathcal{L}_0 - iI)f \neq 0,\ (\mathcal{L}_0 + iI)f \neq 0,\ \ \mathcal{L}_0 f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*).$$

Так как, $\mathcal{L}_0^*(\mathcal{L}_0 - iI)f = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0 f + f - i\mathcal{L}_0^* f - f = -i(\mathcal{L}_0 - iI)f$, то

$$(\mathcal{L}_0 - iI)f \in \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0). \tag{2.5}$$

Аналогично,

$$(\mathcal{L}_0 + iI)f \in \mathfrak{N}_{i}(\mathcal{L}_0). \tag{2.6}$$

Отсюда, так как $f \notin \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ и $f \notin \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$, то ввиду (2.5) и (2.6) $\mathcal{L}_0 f \notin \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ и $\mathcal{L}_0 f \notin \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0)$. Получаем, что $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ и $\mathcal{L}_0 f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$. Значит, $\mathcal{L}_0 f + if \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, что противоречит (2.6).

Следовательно, $f \in (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$, то есть

$$\ker(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L} + I) \subset (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0).$$

Таким образом,

$$\ker(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L} + I) = (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0).$$

Поскольку $\mathcal{L}\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_0^2$ и $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2)$ плотно по норме графика в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, то $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)$ также плотно в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$.

Так как форма $(\mathcal{L}_0 f, \mathcal{L}_0 g)$, $f, g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, замкнута, $(\mathcal{L}\mathcal{L}_0 f, g) = (\mathcal{L}_0 f, \mathcal{L}_0 g)$, $\forall f, g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)$, и $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)$ плотно по норме графика в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, то

$$(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)_F = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0.$$

Так как $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)$ плотно по норме графика в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, $(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)_F = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ и $\ker(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L} + I) = (I + \mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0)$ – является подпространством в H, то согласно утверждению 2) теоремы 2.1.1 для пары операторов $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, мы получаем, что

$$(\mathcal{L}\mathcal{L}_0)^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}.$$

Далее, мы снабдим $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)$ скалярным произведением:

$$(f, g)_+ = (f, g) + (\mathcal{L}_0^* f, \mathcal{L}_0^* g).$$

Тогда $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)$ становится гильбертовым пространством, которое обозначим как H_+. Тогда выполняется $(+)$-ортогональное разложение

$$H_+ = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \oplus_+ \mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) \oplus_+ \mathfrak{N}_{-i}(\mathcal{L}_0).$$

Пусть
$$\mathcal{N} = (I+\mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0),\ \mathcal{M} = (I-\mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0).$$

Тогда получаем (+)-ортогональные разложения:

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \oplus_+ \mathcal{N}, \quad H_+ = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) \oplus_+ \mathcal{M}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\mathcal{N} = \mathcal{M},\ \mathcal{L}_0^*\mathcal{M} = \mathcal{N},\\ &\mathcal{L}\mathcal{L}_0^* h = -h,\ h \in \mathcal{M},\ \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}e = -e,\ e \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{L}}$ еще одно самосопряженное расширение оператора $\mathcal{L}_0$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \dotplus \mathcal{M} = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \dotplus (I-\mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0),\\ &\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_0^* \restriction \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}).\end{aligned}$$

Тогда, рассматривая пару операторов $\mathcal{L}_0 \subset \widetilde{\mathcal{L}}$, мы получим, что

$$(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)_F = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0,$$

и $\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)$ плотно в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ по (+)-норме. К тому же, линейное многообразие

$$\ker\,(\mathcal{L}_0^*\widetilde{\mathcal{L}} + I) = (I-\mathcal{U})\mathfrak{N}_i(\mathcal{L}_0) = \mathcal{M}$$

является подпространством в H. Также, $\mathcal{L}\widetilde{\mathcal{L}}h = -h$ для всех $h \in \mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}e = -e$ для всех $e \in \mathcal{N}$, и

$$(\widetilde{\mathcal{L}}h, e)_+ = -(h, \mathcal{L}e)_+,\ h \in \mathcal{M},\ e \in \mathcal{N}.$$

Опишем $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L})$. Обозначим через $P^+_{\mathcal{M}}$ (+)-ортогональный проектор в пространстве H_+ на подпространство $\mathcal{M}$. Пусть $f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$, тогда

$$f = \varphi_0 + e,\ \varphi_0 \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0),\ e \in \mathcal{N},\ \mathcal{L}f = \mathcal{L}_0\varphi_0 + \mathcal{L}e.$$

Так как $\mathcal{L}e \in \mathcal{M}$, то $\mathcal{L}f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{L}_0\varphi_0 = \mathcal{L}f - \mathcal{L}e \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}) \iff \varphi_0 \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)$ и $P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0\varphi_0 = -\mathcal{L}e \iff \varphi_0 \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0\varphi_0 = e$. Следовательно,

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L}) = (I + \widetilde{\mathcal{L}}P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0)\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0).$$

Покажем, что $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L})$ плотно по $(+)$-норме в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$. Предположим, что существует такой $g \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$, что g $(+)$-ортогонален к $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L})$:

$$((I + \widetilde{\mathcal{L}}P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0)h_0, g)_+ = 0 \quad \text{для всех} \quad h_0 \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0).$$

В частности, взяв $h_0 \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2)$, получаем, что вектор g $(+)$-ортогонален к $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2)$. Но $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2)$ $(+)$-плотно в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$. Следовательно $g \in \mathcal{N}$. Так как $\mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0) \subset \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$, то $(h_0, g)_+ = 0$ и

$$(\widetilde{\mathcal{L}}P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0 h_0, g)_+ = 0, \;\; \text{для всех} \;\; h_0 \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0).$$

Далее

$$0 = (\widetilde{\mathcal{L}}P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0 h_0, g)_+ = (P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0 h_0, \mathcal{L}g)_+.$$

Пусть $\mathcal{L}g = x$, тогда $x \in \mathcal{M}$ и

$$\begin{aligned}
&0 = (\widetilde{\mathcal{L}}P^+_{\mathcal{M}}\mathcal{L}_0 h_0, g)_+ = (\mathcal{L}_0 h_0, x)_+ = (\mathcal{L}_0 h_0, x) + (\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0 h_0, \widetilde{\mathcal{L}}x)\\
&= (h_0, \widetilde{\mathcal{L}}x) + (\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0 h_0, \widetilde{\mathcal{L}}x) = ((\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0 + I)h_0, \widetilde{\mathcal{L}}x) =\\
&= (h_0, ((\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)^* + I)\widetilde{\mathcal{L}}x), \;\; \forall h_0 \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \in \ker\,((\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)^* + I).$$

Применяя равенство (2.4) к $\widetilde{\mathcal{L}}$ вместо $\mathcal{L}$ мы получаем, что $(\widetilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}_0)^* = \mathcal{L}_0^*\widetilde{\mathcal{L}}$. То есть,

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \in \ker\,(\mathcal{L}_0^*\widetilde{\mathcal{L}} + I) = \mathcal{M}.$$

С другой стороны $\widetilde{\mathcal{L}}x = -g \in \mathcal{N}$. Значит, $g = 0$. Таким образом, $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L})$ $(+)$-плотно в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$ и, следовательно, $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})_F = \mathcal{L}^2$. В силу утверждения 2) теоремы 2.1.1, мы получаем, что $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$. □

Теорема 2.1.4. *Пусть операторы L_1 и L_2 удовлетворяют условию* (1.23) *и пусть $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ – граничная тройка для пары операторов $L_1 \subset L_2$. Если оператор $\mathcal{A} = L_2^* L_1$ плотно определен и $\mathcal{A}^* = L_1^* L_2$, тогда*

1) граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, GP_{\overline{\mathrm{ran}\,(L_1)}}L_2\}$ является базисной для $\mathcal{A}^*$;

2) отображение

$$\Theta \mapsto \mathcal{A}_\Theta := \mathcal{A}^* \restriction \Gamma^{-1}\Theta = \mathcal{A}^* \restriction \big\{f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*) : (\Gamma f, GP_{\overline{\mathrm{ran}\,(L_1)}}L_2 f) \in \Theta\big\}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $\mathcal{A}_\Theta$ оператора $\mathcal{A}$ и всеми неотрицательными самосопряженными линейными отношениями Θ в $\mathcal{H}$.

Доказательство. По теореме 2.1.1 расширения Фридрихса и Крейна оператора $\mathcal{A}$ трансверсальны, $\mathcal{D}[\mathcal{A}_K] = \mathrm{dom}\,(L_2)$, $\mathcal{D}[\mathcal{A}_F] = \mathrm{dom}\,(L_1)$. Значит, $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ является граничной парой для оператора $\mathcal{A}$. Пусть $x \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*) = \mathrm{dom}\,(L_1^* L_2)$ и $y \in \mathrm{dom}\,(L_2)$. Тогда $P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x = L_2 x - P_{\ker\,(L_1^*)} L_2 x \in \mathrm{dom}\,(L_1^*)$. По теореме 2.1.1 и (1.24) получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_K[x,y] &= (P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x, L_2 u)_H = (L_1^* P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x, y)_{\mathfrak{H}} - (G P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x, \Gamma y)_{\mathcal{H}} \\ &= (L_1^* L_2 x, y)_{\mathfrak{H}} - (G P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x, \Gamma y)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{A}^* x, y)_{\mathfrak{H}} - (G P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x, \Gamma y)_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

В частности, для $x, y \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{A}^*)$, так как форма $\mathcal{A}_K[x,y]$ является эрмитовой, имеем

$$(\mathcal{A}^* x, y) - (x, \mathcal{A}^* y) = (G P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 x, \Gamma y)_{\mathcal{H}} - (\Gamma x, G P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2 y)_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, G P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(L_1)} L_2\}$ является базисной для оператора S^*. В силу предложения 1.2.17 справедливо утверждение (2). $\square$

2.2 Факторизация неотрицательных симметрических операторов

2.2.1 Пример неотрицательного симметрического оператора $\mathcal{L}_0$ и его неотрицательного самосопряженного расширения $\mathcal{L}$ таких, что $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$

Пусть H – сепарабельное бесконечномерное комплексное гильбертово пространство и пусть $\mathfrak{M}$ – бесконечномерное подпространство в H с бесконечномерным ортогональным дополнением $\mathfrak{M}^\perp = H \ominus \mathfrak{M}$. Тогда существуют два самосопреженных оператора B_1 и B_2 [88], [73], такие, что

$$\overline{\mathrm{dom}}\,(B_1) = \overline{\mathrm{dom}}\,(B_2) = \mathfrak{M},\ \mathrm{dom}\,(B_1) \cap \mathrm{dom}\,(B_2) = \{0\}.$$

Пусть $D_k = (B_k^* B_k)^{1/2}$, $k = 0, 1$. Поскольку $\mathrm{dom}\,(D_k) = \mathrm{dom}\,(B_k)$, $k = 1, 2$, мы получаем, что $\mathrm{dom}\,(D_1) \cap \mathrm{dom}\,(D_2) = \{0\}$. Тогда операторы

$$F = (I_{\mathfrak{M}} + D_1)^{-1},\ V = (I_{\mathfrak{M}} + D_2)^{-1}$$

удовлетворяют следующему условию:

$$\overline{\mathrm{ran}}\,(F) = \overline{\mathrm{ran}}\,(V) = \mathfrak{M},\ \mathrm{ran}\,(F) \cap \mathrm{ran}\,(V) = \{0\},$$
$$0 \le F \le I_{\mathfrak{M}},\ \ker(F) = \{0\},\ 0 \le V \le I_{\mathfrak{M}},\ \ker(V) = \{0\}.$$

Заменяя V на $U = V\Phi$, где Φ – унитарный оператор из $\mathfrak{M}^{\perp}$ на $\mathfrak{M}$. Пусть самосопряженный ограниченный оператор G в H задан операторной матрицей:

$$G = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{M}} & U \\ U^* & U^*U \end{bmatrix} : \begin{array}{c} \mathfrak{M} \\ \oplus \\ \mathfrak{M}^{\perp} \end{array} \to \begin{array}{c} \mathfrak{M} \\ \oplus \\ \mathfrak{M}^{\perp} \end{array}.$$

Легко видеть, что

$$\ker(G) = \left\{ \begin{bmatrix} -Uh \\ h \end{bmatrix} : h \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Определим оператор X

$$X = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{M}^{\perp}} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{M}^{\perp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^2 & FU \\ U^*F & U^*U \end{bmatrix}$$

и покажем, что

$$\ker\{X\} = \{0\},\ X_{\mathfrak{M}} = 0,\ X_{\mathfrak{M}^{\perp}} = 0. \tag{2.7}$$

Пусть $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, где $f_1 \in \mathfrak{M},\ f_2 \in \mathfrak{M}^{\perp}$, тогда

$$(Xf, f) = ||Ff_1 + Uf_2||^2. \tag{2.8}$$

Это означает, что

$$Xf = 0 \iff Ff_1 + Uf_2 = 0.$$

Так как $\mathrm{ran}\,(F) \cap \mathrm{ran}\,(U) = \{0\}$, $\ker(F) = \{0\}$, $\ker(U) = \{0\}$, то $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. Из (2.8) и $\overline{\mathrm{ran}}\,(F) = \overline{\mathrm{ran}}\,(U) = \mathfrak{M}$ получаем равенства:

$$\inf_{\varphi \in \mathfrak{M}^{\perp}} (X(f-\varphi), f-\varphi) = 0,\ \inf_{\psi \in \mathfrak{M}} (X(f-\psi), f-\psi) = 0.$$

Равенство (1.13) влечет $X_{\mathfrak{M}} = 0$ и $X_{\mathfrak{M}^{\perp}} = 0$. Применяя (1.14) получим:

$$\mathfrak{M} \cap \mathrm{ran}\,(X^{1/2}) = \{0\},\ \mathfrak{M}^{\perp} \cap \mathrm{ran}\,(X^{1/2}) = \{0\}. \tag{2.9}$$

Определим в $H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$ оператор

$$X_0 = X^{1/2} P_{\mathfrak{M}} X^{1/2}, \tag{2.10}$$

тогда $X - X_0 = X^{1/2} P_{\mathfrak{M}^{\perp}} X^{1/2}$. Равенство (2.7) дает

$$\ker (X_0) = \{0\}, \ \ker (X - X_0) = \{0\}.$$

Отметим, что

$$\operatorname{ran} (X) \cap \operatorname{ran} (X_0) = \{0\}. \tag{2.11}$$

Действительно, если $Xf = X_0 h$, то $X^{1/2} f = P_{\mathfrak{M}} X^{1/2} h$ и (2.9) дает $f = h = 0$.

Положим

$$A = X^{-1}, \ A_0 = X_0^{-1}.$$

Операторы A_0 и A – неотрицательные и самосопряженные в H, (2.11) влечет

$$\operatorname{dom} (A_0) \cap \operatorname{dom} (A) = \{0\}.$$

К тому же

$$\operatorname{dom} (A_0^{1/2}) = \operatorname{dom} \left(X_0^{-1/2} \right), \ \operatorname{dom} (A^{1/2}) = \operatorname{dom} \left(X^{-1/2} \right).$$

Из (2.10) получаем $\operatorname{ran} (X_0^{1/2}) \subset \operatorname{ran} (X^{1/2})$ и

$$X_0^{1/2} = X^{1/2} W_0,$$

где W_0 – унитарный оператор из H на $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что

$$X^{-1/2} g = W_0 X_0^{-1/2} g, \ g \in \operatorname{ran} (X_0^{1/2}).$$

Таким образом, пара операторов $\langle A_0, A \rangle$ удовлетворяет условию:

$$\operatorname{dom} (A_0^{1/2}) \subset \operatorname{dom} (A^{1/2}) \quad \text{и} \quad ||A_0^{1/2} \varphi|| = ||A^{1/2} \varphi|| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \operatorname{dom} (A_0^{1/2}).$$

Определим операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$:

$$\operatorname{dom} (\mathcal{L}) = \operatorname{dom} (A^{1/2}), \ \mathcal{L} h = A^{1/2} h, \ h \in \operatorname{dom} (\mathcal{L}),$$

$$\operatorname{dom} (\mathcal{L}_0) = \operatorname{dom} (A_0^{1/2}), \ \mathcal{L}_0 g = A^{1/2} g, \ g \in \operatorname{dom} (\mathcal{L}_0).$$

Оператор $\mathcal{L}$ – самосопряженный и неотрицательный, оператор $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный, неотрицательный, симметрический и является сужением оператораf $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. Следующая полуторалинейная форма является замкнутой:

$$\tau_0[\varphi, \psi] = (\mathcal{L}_0\varphi, \mathcal{L}_0\psi) = (A^{1/2}\varphi, A^{1/2}\psi) = (A_0^{1/2}\varphi, A_0^{1/2}\psi),\ \varphi, \psi \in \mathrm{dom}\,(A_0^{1/2}).$$

Следовательно, оператор $\mathcal{L}_0$ замкнут и с формой τ_0 ассоциирован оператор $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0 = A_0$. К тому же $\mathcal{L}^2 = A$. Так как $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0) \cap \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}^2) = \{0\}$, то

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}.$$

В частности, $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^2) = \{0\}$.

Замечание 2.2.1. *Операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ положительно определены. Отсюда следует, что*

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{-1}\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0),\ (\mathcal{L}_0\mathcal{L})(\mathcal{L}^{-1}\varphi) = \mathcal{L}_0\varphi,\ \varphi \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0).$$

Значит, $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0\mathcal{L})$ плотно по норме графика в $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_0\mathcal{L}$ плотно определен в H и $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})_F = \mathcal{L}^2$.

Очевидно, что выполняется равенство $\ker\,((\mathcal{L}_0\mathcal{L})^*) = \ker\,(\mathcal{L}_0^*)$, следовательно, равенства

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) \dot{+} \ker\,(\mathcal{L}_0^*),\ \mathrm{dom}\,((\mathcal{L}_0\mathcal{L})^*) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}^2) \dot{+} \ker\,((\mathcal{L}_0\mathcal{L})^*)$$

влекут $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$. Поскольку $\mathrm{ran}\,(\mathcal{L}) = H$, то, по теореме 2.1.1, $(\mathcal{L}_0\mathcal{L})_K = \mathcal{L}_0\mathcal{L}_0^*$.

Замечание 2.2.2. *Мы построили пример двух неограниченных, неотрицательных, самосопряженных операторов A_0 и A таких, что*

1. $\mathrm{dom}\,(A_0) \cap \mathrm{dom}\,(A) = \{0\}$,

2. $A_0 \geq A$ *и форма* $A_0[\cdot, \cdot]$ *– замкнутое сужение формы* $A[\cdot, \cdot]$.

Замечание 2.2.3. *В [94] доказано, что для любого замкнутого неограниченного, плотно определенного оператора $\mathcal{B}$ в H существует подпространство $\mathfrak{L}$ такое, что*

$$\mathfrak{L} \cap \mathrm{dom}\,(\mathcal{B}) = \mathfrak{L}^{\perp} \cap \mathrm{dom}\,(\mathcal{B}) = \{0\}.$$

Отсюда следует, что для любого ограниченного неотрицательного самосопряженного оператора $\mathcal{F}$, с плотной областью значений $\operatorname{ran}(\mathcal{F})$ *в* H, *существует подпространство $\mathfrak{L}$ такое, что*

$$\mathfrak{L} \cap \operatorname{ran}(\mathcal{F}^{1/2}) = \mathfrak{L}^{\perp} \cap \operatorname{ran}(\mathcal{F}^{1/2}) = \{0\}.$$

Для любого подпространства $\mathfrak{M}$, с $\dim(\mathfrak{M}) = \dim(\mathfrak{M}^{\perp}) = \infty$, *мы построили ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор X, с плотной областью значений, такой, что* $\mathfrak{M} \cap \operatorname{ran}(X^{1/2}) = \mathfrak{M}^{\perp} \cap \operatorname{ran}(X^{1/2}) = \{0\}$.

Предложение 2.2.4. *Пусть A_0 и A_1 неотрицательные неограниченные самосопряженные операторы в H и $S_k = (I - A_k)(I + A_k)^{-1}$, $k = 0, 1$ – их преобразований Кэли. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(i) *пара операторов $\langle A_0, A_1 \rangle$ удовлетворяет условию*

$$\begin{aligned} &\operatorname{dom}(A_0^{1/2}) \subset \operatorname{dom}(A_1^{1/2}) \quad \textit{и} \\ &||A_0^{1/2}\varphi|| = ||A_1^{1/2}\varphi|| \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in \operatorname{dom}(A_0^{1/2}); \end{aligned} \tag{2.12}$$

(ii) *пара операторов $\langle S_0, S_1 \rangle$ удовлетворяет условию*

$$S_1 \geq S_0 \quad \textit{и} \quad \operatorname{ran}\left((I + S_0)^{1/2}\right) \cap \operatorname{ran}\left((S_1 - S_0)^{1/2}\right) = \{0\}; \tag{2.13}$$

(iii) *пара операторов $\langle S_0, S_1 \rangle$ удовлетворяет условию*

$$I + S_0 = (I + S_1)^{1/2} P (I + S_1)^{1/2}, \tag{2.14}$$

где P – ортопроектор в H.

К тому же операторы A_0 и A_1 – расширения плотно определенного замкнутого неотрицательного симметрического оператора $\dot{A}$, следовательно, каждое из условий (i), (ii) и (iii) эквивалентно следующему:

$$S_1 \geq S_0 \ \textit{и} \operatorname{ran}\left((S_0 - S_\mu)^{1/2}\right) \cap \operatorname{ran}\left((S_1 - S_0)^{1/2}\right) = \{0\}, \tag{2.15}$$

где $S_\mu = (I - A_F)(I + A_F)^{-1}$ и A_F – фридрихсово расширение оператора $\dot{A}$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii) и (i)$\Rightarrow$(iii). Из предложения 1.2.7 следует, что

$$||(I + S_1)^{-1/2}\varphi|| = ||(I + S_0)^{-1/2}\varphi|| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \operatorname{ran}\left((I + S_0)^{1/2}\right).$$

Следовательно

$$(I+S_1)^{-1/2}\varphi = \mathcal{V}(I+S_0)^{-1/2}\varphi,\ \varphi \in \mathrm{ran}\,\left((I+S_0)^{1/2}\right),$$

где $\mathcal{V}$ – изометрия в H, $\mathrm{ran}\,(\mathcal{V}) = (I+S_1)^{-1/2}\mathrm{ran}\,\left((I+S_0)^{1/2}\right)$. Тогда

$$(I+S_0)^{1/2} = (I+S_1)^{1/2}\mathcal{V}$$

и

$$I+S_0 = (I+S_1)^{1/2}\mathcal{V}\mathcal{V}^*(I+S_1)^{1/2} = (I+S_1)^{1/2}P_{\mathrm{ran}\,(\mathcal{V})}(I+S_1)^{1/2},$$

где $P_{\mathrm{ran}\,(\mathcal{V})}$ ортопроектор в H на $\mathrm{ran}\,(\mathcal{V})$, то есть, выполняется условие (2.14). Следовательно,

$$S_1 - S_0 = (I+S_1) - (I+S_0) = (I+S_1)^{1/2}(I - P_{\mathrm{ran}\,(\mathcal{V})})(I+S_1)^{1/2}.$$

Напомним, что если ограниченные, неотрицательные, самосопряженные операторы X и Y связаны отношением $X = Y^{1/2}\mathcal{Z}Y^{1/2}$, где $\mathcal{Z} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{ran}}\,(Y))$ – неотрицательный оператор, то [72])

$$\mathrm{ran}\,(X^{1/2}) = Y^{1/2}\mathrm{ran}\,(\mathcal{Z}^{1/2}).$$

Следовательно, $\mathrm{ran}\,((S_1 - S_0)^{1/2}) = (I+S_1)^{1/2}(H \ominus \mathrm{ran}\,(\mathcal{V}))$ и выполняется (2.13).

Следствие (iii)⇒(ii), очевидно.

Покажем, что (ii)⇒(iii) и (ii)⇒(i). Поскольку $I+S_1 \geq I+S_0$, то справедливо равенство

$$I+S_0 = (I+S_1)^{1/2}P(I+S_1)^{1/2},$$

где $0 \leq P \leq I$. Равенство $S_1 - S_0 = (I+S_1) - (I+S_0)$ влечет следующее

$$S_1 - S_0 = (I+S_1)^{1/2}(I-P)(I+S_1)^{1/2}.$$

Согласно (2.13) получаем

$$\mathrm{ran}\,\left((I-P)^{1/2}\right) \cap \mathrm{ran}\,(P^{1/2}) = \{0\}.$$

Поскольку

$$\mathrm{ran}\,\left((I-P)^{1/2}\right) \cap \mathrm{ran}\,(P^{1/2}) = \mathrm{ran}\,\left((P-P^2)^{1/2}\right),$$

то $P^2 = P$, то есть, P – ортопроектор в H. Следовательно, выполняется условие (2.14). Из условия (2.14) получаем

$$(I+S_0)^{1/2}h = (I+S_1)^{1/2}\mathcal{U}h,\ h \in H,$$

где $\mathcal{U}$ – унитарный оператора из H на $\operatorname{ran}(P)$. Значит,

$$(I+S_1)^{-1/2}g = \mathcal{U}(I+S_0)^{-1/2}g \quad \text{для всех} \quad g \in \operatorname{ran}\left((I+S_0)^{1/2}\right).$$

Таким образом,

$$||(I+S_1)^{-1/2}g||^2 = ||(I+S_0)^{-1/2}g||^2,\ g \in \operatorname{ran}\left((I+S_0)^{1/2}\right). \tag{2.16}$$

Далее (2.12) следует из предложения 1.2.7 и отношения (2.16).

Предположим, что A_0 и A_1 – два расширения плоното определенного замкнутого неотрицательного симметрического оператора $\dot{A}$. Пусть $\dot{S} = (I-\dot{A})(I+\dot{A})^{-1}$ и пусть $\mathfrak{N} = H \ominus \operatorname{dom}(\dot{S})$. Применяя (1.15) и (1.12), получим

$$\mathfrak{N} \cap \operatorname{ran}\left((I+S_0)^{1/2}\right) = \operatorname{ran}\left((S_0 - S_\mu)^{1/2}\right).$$

Что дает эквивалентность (2.15) и (2.13). □

Замечание 2.2.5. *Отношение* (2.15) *эквивалентно утверждению:* S_0 *– экстремальная точка операторного интервала* $[S_\mu, S_1]$ *(см. [49]).*

Пусть $\dot{S}$ – неплотно определнное, замкнутое, симметрическое сжатие. Обозначим $C := S_M - S_\mu$. Используя (1.16), можно получить, что если $S_k = S_\mu + C^{1/2}X_kC^{1/2}$, $k = 0,1$ – два самосопряженных сжимающих расширения оператора $\dot{S}$, где X_k, $k = 0,1$ неотрицательные, самосопряженные сжатия в $\overline{\operatorname{ran}}(C)$, то

$$\begin{gathered} S_0 \le S_1 \Leftrightarrow X_0 \le X_1, \quad \operatorname{ran}\left((S_0 - S_\mu)^{1/2}\right) \cap \operatorname{ran}\left((S_1 - S_0)^{1/2}\right) = \{0\} \\ \Longleftrightarrow \operatorname{ran}(X_0^{1/2}) \cap \operatorname{ran}((X_1 - X_0)^{1/2}) = \{0\} \Longleftrightarrow X_0 = X_1^{1/2}PX_1^{1/2}, \end{gathered} \tag{2.17}$$

где P – ортопроектор в $\overline{\operatorname{ran}}(C)$.

2.2.2 Факторизация плотно определенных неотрицательных симметрических операторов

Теорема 2.2.6. *Пусть* $\dot{A}$ *– плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор в гильбертовом пространстве* H*, име-*

ющий дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения. Тогда $\dot{A}$ допускает бесконечного много факторизация вида:

$$\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0, \tag{2.18}$$

где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор в H и $\mathcal{L}$ его неотрицательное самосопряженное расширение. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми факторизациями оператора $\dot{A}$ в форме (2.18) *и всеми парами $\langle A_0, A_1\rangle$ дизъюнктных неотрицательных самосопряженных расширений оператора $\dot{A}$, удовлетворяющих условию* (2.12)*. Это соответствие дается формулами:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) = \mathrm{dom}\,(A_1^{1/2}),\ \mathcal{L}u = A_1^{1/2}u,\ u \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}),\\ &\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) = \mathrm{dom}\,(A_0^{1/2}),\ \mathcal{L}_0\varphi = A_1^{1/2}\varphi,\ \varphi \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Более того,

1) *если индексы дефекта оператора $\dot{A}$ конечные, то необходимо, чтобы оператор $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ совпадал с фридрихсовым расширением A_F оператора $\dot{A}$;*

2) *если индексы дефекта оператора $\dot{A}$ бесконечные, то оператор $\mathcal{L}_0$ может быть выбран так, что $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ совпадает или не совпадает с фридрихсовым расширением оператора $\dot{A}$;*

3) *если $\dot{A}$ допускает трансверсальные, неотрицательные, самосопряженные расширения и если $\mathcal{L}^2$ трансверсально к A_F (в частности, если $\mathcal{L}^2$ совпадает с крейновским расширением оператора $\dot{A}$), то необоходимо, чтобы $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ – фридрихсово расширение оператора $\dot{A}$.*

Доказательство. Пусть $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ – факторизация оператора $\dot{A}$, где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор в H и $\mathcal{L}$ его неотрицательное самосопряженное расширение. Тогда операторы $A_0 = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$, $A_1 = \mathcal{L}^2$ – дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения оператора $\dot{A}$ и выполняется условие (2.12). Следовательно, справедливы формулы (2.19).

Если пара дизъюнктных неотрицательных самосопряженных расширений $\langle A_0, A_1\rangle$ оператора $\dot{A}$, удовлетворяет условию (2.12), тогда определим пару операторов $\langle \mathcal{L}_0, \mathcal{L}\rangle$ по формулам (2.19). Очевидно, $\mathcal{L}^2 = A_1$ и из условия (2.12) следует, что $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0 = A_0$. К тому же, согласно равенсту $\mathrm{dom}\,(A_0)\cap\mathrm{dom}\,(A_1) = \mathrm{dom}\,(\dot{A})$ получаем, что $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$.

Пусть

$$\begin{aligned}&\dot{S} = (I-\dot{A})(I+\dot{A})^{-1},\\ &S_\mu = (I-A_F)(I+A_F)^{-1},\ S_M = (I-A_K)(I+A_K)^{-1}\end{aligned}$$

это преобразование Кэли, соответственно, операторов $\dot{A}$, A_F и A_K. Так как A_F и A_K дизъюнктны, то $\ker(C) = \mathrm{dom}\,(\dot{S})$.

Дефектные индексы оператора $\dot{A}$ конечны. Тогда $n := \dim(\mathfrak{N}) < \infty$ и $\mathrm{ran}\,(C) = \mathfrak{N}$. Предположим, что оператор $\dot{A}$ факторизован в виде $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор и $\mathcal{L}$ его самосопряженное расширение. Поскольку $A_0 = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ и $A_1 = \mathcal{L}^2$ – неотрицательные самосопряженные расширения оператора $\dot{A}$ и

$$\mathrm{dom}\,(\dot{A}) = \mathrm{dom}\,(A_0)\cap\mathrm{dom}\,(A_1),$$

то из (1.17), (1.10), и отношения

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) = \mathrm{dom}\,(A_0^{1/2}) \subset \mathrm{dom}\,(A_1^{1/2}) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L})$$

следует, что $\langle n, n\rangle$ – индексы дефекта оператора $\mathcal{L}_0$, тогда по теореме 1.4.1 $A_0 = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ – фридрихсово расширение оператора $\dot{A}$.

Согласно конструкции факторизации возьмем произвольное самосопряженное расширение A_1 трансверсальное к A_F и положим $A_0 = A_F$. Тогда, согласно (1.8) полуторалинейная форма $A_F[\cdot,\cdot] = \dot{A}[\cdot,\cdot]$ – замкнутое сужение формы $A_1[\cdot,\cdot]$. Далее мы используем (2.19).

Индексы дефекта оператора $\dot{A}$ бесконечны. В этом случае $\dim(\mathfrak{N}) = \infty$. По предложению 1.2.11 имеем $\overline{\mathrm{ran}}\,(C) = \mathfrak{N}$. Согласно предложению 2.2.4 и (2.19) мы должны описать *все пары $\langle S_0, S_1\rangle$ самосопряженных сжимающих расширений опертара $\dot{S}$, удовлетворяющего условию* (2.15) *и таких, что* $\ker(S_1 - S_0) = \mathrm{dom}\,(\dot{S})$.

Пусть $S_k = S_\mu + C^{1/2}X_kC^{1/2}$, $k = 0, 1$, и $0 \le X_0 \le X_1 \le I_{\mathfrak{N}}$. Согласно (2.17) оператор X_0 принимает вид

$$X_0 = X_1^{1/2}PX_1^{1/2},$$

где P – ортопроектор с областью значений $\operatorname{ran}(P) \subset \mathfrak{N}$. Мы должны найти такой P, чтобы $\ker(S_1 - S_0) = \operatorname{dom}(\dot{S})$. Непосредственно получаем:

$$\begin{aligned} &S_1 - S_0 = C^{1/2}(X_1 - X_0)C^{1/2} = C^{1/2}X_1^{1/2}(I_{\mathfrak{N}} - P)X_1^{1/2}C^{1/2}, \\ &||(S_1 - S_0)^{1/2}h||^2 = ||(I_{\mathfrak{N}} - P)X_1^{1/2}C^{1/2}h||^2, \ h \in H \end{aligned}$$

и

$$\mathfrak{N} \ni h \in \ker(S_1 - S_0) \iff X_1^{1/2}C^{1/2}h \in \operatorname{ran}(P).$$

Следовательно,

$$\ker(S_1 - S_0) = \operatorname{dom}(\dot{S}) \iff \begin{cases} \ker(X_1) \cap \operatorname{ran}(C^{1/2}) = \{0\}, \\ \operatorname{ran}\left(X_1^{1/2}C^{1/2}\right) \cap \operatorname{ran}(P) = \{0\}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Выбор оператора X_1 зависит от случая: $\operatorname{ran}(C) = \mathfrak{N}$ или $\operatorname{ran}(C) \neq \mathfrak{N}$. Напомним, что $\overline{\operatorname{ran}}(C) = \mathfrak{N}$.

В случае $\operatorname{ran}(C) = \mathfrak{N}$ *(* $\iff$ A_F *и* A_K *трансверсальны)* справедлива эквивалентность:

$$\ker(X_1) \cap \operatorname{ran}(C^{1/2}) = \{0\} \iff \ker(X_1) = \{0\}.$$

Если $\operatorname{ran}(X_1) = \mathfrak{N}$, то тут только одна возможность удовлетворить условие

$$\operatorname{ran}(P) \cap \operatorname{ran}(X_1^{1/2}) = \{0\}$$

это выбрать $P = 0$. Это означает, что $X_0 = 0$, то есть, $S_0 = S_\mu$ и $A_0 = A_F$. В частности,

$$X_1 = I_{\mathfrak{N}} \iff S_1 = S_M \iff A_1 = A_K \Rightarrow A_0 = A_F.$$

Если $\ker(X_1) = \{0\}$ и $\operatorname{ran}(X_1) \neq \mathfrak{N}$, то возможно выбрать нетривиальное подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ такое, что

$$\mathfrak{M} \cap \operatorname{ran}(X_1^{1/2}) = \{0\}$$

и $X_0 = X_1^{1/2}P_{\mathfrak{M}}X_1^{1/2}$. Если мы возьмем $\mathfrak{M} = \{0\}$, то получим $A_0 = A_F$.

В случае $\operatorname{ran}(C) \neq \mathfrak{N}$ также возможно выбрать оператор X_1, удовлетворяющий условию (2.20). Например, можем взять $X_1 \in [0, I_{\mathfrak{N}}]$, $\ker(X_1) = \{0\}$ и затем взять $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{M} \cap \left(X^{1/2}\operatorname{ran}(C^{1/2})\right) = \{0\}$. В частности,

$$X_1 = I_{\mathfrak{N}} \iff S_1 = S_M \iff A_1 = A_K \Rightarrow S_0 = S_\mu + C^{1/2}P_{\mathfrak{M}}C^{1/2},$$

где $\mathfrak{M}$ подпространство в $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} \cap \operatorname{ran}(C^{1/2}) = \{0\}$. $\square$

Несколько замечаний.

1) Из доказательства следует, что оператор $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}\upharpoonright \mathrm{dom}\,(A_0^{1/2})$ зависит от выбора

- дизъюнктного к A_F неотрицательного самосопряженного расширения $A_1(= \mathcal{L}^2)$,
- неотрицательного, самосопряженного расширения A_0, дизъюнктного с A_1 и удовлетворяющего условию (2.12).

Минимальная область определения $\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0)$ симметрического оператора $\mathcal{L}_0$ совпадает с $\mathcal{D}[\dot{A}] = \mathrm{dom}\,(A_F^{1/2})$.

2) Согласно теореме 2.1.1, если $\dot{A}^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$, то $A_F = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$. В добавок, в этом случае трансверсальны расширения Фридрихса и Крейна оператора $\dot{A}$. Следовательно, если расширения Фридрихса и Крейна оператора $\dot{A}$ дизъюнктны, но не трансверсальны, то для каждого представления $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ сопряженный оператор $\dot{A}^*$ не равен $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$. С другой стороны, если трансверсальны расширения Фридрихса и Крейна оператора $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ и $A_F \neq \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$, то также и $\dot{A}^* \neq \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$.

3) Предположим что A_F и A_K не трансверсальны, но дизъюнктны. Тогда, если мы положим $A_1 = A_K(= \mathcal{L}^2)$, то неотрицательное самосопряженное расширение $A_0(= \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0)$ должно быть выбрано так, чтобы оно было экстремальным и дизъюнктным с A_K. Преобразование Кэли $S_0 = (I - A_0)(I + A_0)^{-1}$ представляется в виде:

$$S_0 = S_\mu + C^{1/2} P_{\mathfrak{M}} C^{1/2},$$

где $P_{\mathfrak{M}}$ – ортопроектор на подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathrm{ran}\,(C^{1/2}) = \{0\}$.

4) В [90, следствие к теореме X.25] утверждается без доказательства, что если $\mathcal{L}_0$ – симметрический оператор, квадрат которого $\mathcal{L}_0^2$ плотно определен, то фридрихсово расширение $(\mathcal{L}_0^2)_F$ оператора $\mathcal{L}_0^2$ это оператор $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$. Этот результат справедлив, если конечен один из индексов дефекта оператора $\mathcal{L}_0$ (это следует из предложения 2.1.2). Другое достаточное условие для равенства $(\mathcal{L}_0^2)_F = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ (для плотно определенного $\mathcal{L}_0^2$) это $(\mathcal{L}_0^2)^* = \mathcal{L}_0^{*2}$ (см. [83]). С другой стороны, как это следует из [94, теорема 4.5] для любого неограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{L}$ существует плотно определенное

замкнутое симметрическое сужение $\mathcal{L}_0$ такое, что $\mathcal{L}_0^2$ плотно определен, но область определения $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2)$ не плотна в $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0)$ по норме графика, то есть $(\mathcal{L}_0^2)_F \neq \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$. По теореме 2.2.6, если $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ и фридрихсово расширение оператора $\dot{A}$ не совпадает с $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$, то из предположения, что $\mathcal{L}_0^2$ – плотно определен следует, что $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$ не совпадает с фридрихсовым расширением оператора $\mathcal{L}_0^2$.

2.2.3 Факторизация неплотно определенных неотрицательных симметрических операторов

Теорема 2.2.7. *1) Неплотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор с конечными индексами дефекта не допускает представления в дивергентной форме.*

2) Неплотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор $\dot{A}$ с бесконечными индексами дефекта и имеющий дизъюнктные самосопряженные расширения (операторы) допускает бесконечного много факторизаций:

$$\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0,$$

где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный замкнутый неотрицательный симметрический оператор и $\mathcal{L}$ – его неотрицательное самосопряженное расширение.

Доказательство. 1) Пусть оператор $\dot{A}$ имеет конечные индексы дефекта $\langle n, n\rangle$. Тогда для двух неотрицательных самосопряженных расширений A_0 и A_1 таких, что $A_0 \geq A_1$, из (1.10) следует

$$\dim(\mathcal{D}[A_1]/\mathcal{D}[A_0]) \leq n.$$

Предположим, что $\dot{A} = L_1^*L_0$, где L_0 – замкнут и плотно определен в H и L_1 – замкнутое расширение оператора L_0 в H. Положим $A_0 = L_0^*L_0$, $A_1 = L_1^*L_1$, тогда $\dim(\operatorname{dom}(L_1)/\operatorname{dom}(L_0)) \leq n$. Это дает, что $\operatorname{dom}(L_1^*L_0)$ плотно в H. Получили противоречие.

2) Пусть $\dot{A}$ имеет бесконечные индексы дефекта. Поскольку $\dot{A}$ имеет дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения (операторы), получаем $\ker(C) = \operatorname{dom}(\dot{S})$ (предложение 1.2.5). Напомним, что $C = S_M - S_\mu$. Отметим, что расширений Крейна A_K является оператором, это означает,

что $\ker(I+S_M)=\{0\}$. Пусть

$$S_1 = S_\mu + C^{1/2}X_1C^{1/2},\ 0\le X_1\le I_{\mathfrak{N}}$$

это самосопряженное сжимающее расширение оператора $\dot{S}$. Используя равенство $I+S_1=(I+S_\mu)+C^{1/2}X_1C^{1/2}$ и (1.7) получаем, что

$$\ker(I+S_1)=\{0\} \iff \ker(X_1)\cap C^{1/2}\mathfrak{B}=\{0\},$$

где $\mathfrak{B}=H\ominus\overline{\mathrm{dom}}\,(\dot{A})$. Следовательно, если, в частности, $\ker(X_1)=\{0\}$, то $\ker(I+S_1)=\{0\}$. Пусть P – ортопроектор в H, $\mathrm{ran}\,(P)\subset\mathfrak{N}$. Положим $X_0=X_1^{1/2}PX_1^{1/2}$ и пусть

$$S_0=S_\mu+C^{1/2}X_0C^{1/2}=S_\mu+C^{1/2}X_1^{1/2}PX_1^{1/2}C^{1/2}.$$

Операторы S_0 и S_1 также должны удовлетворять следующим условиям:

$$\ker(S_1-S_0)=\{0\},\ \ker(I+S_0)=\{0\}.$$

Отсюда, (см. (2.20)) $(\mathfrak{N}\ominus\mathrm{ran}\,(P))\cap X_1^{1/2}C^{1/2}\mathfrak{B}=\{0\}$ и

$$\begin{cases}\ker(X_1)\cap\mathrm{ran}\,(C^{1/2})=\{0\},\\ \mathrm{ran}\,\left(X_1^{1/2}C^{1/2}\right)\cap\mathrm{ran}\,(P)=\{0\}.\end{cases}$$

Итак, если мы построим оператор $X_1\in[0,I_{\mathfrak{N}}]$ и подпространство $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ такие, что

$$\ker(X_1)=\{0\},\ \mathrm{ran}\,(X_1)\ne\mathfrak{N},\ \mathrm{ran}\,(X_1^{1/2})\cap\mathfrak{M}=\mathrm{ran}\,(X_1^{1/2})\cap(\mathfrak{N}\ominus\mathfrak{M})=\{0\},$$

то мы получим неотрицательные самосопряженные расширения $A_k=(I-S_k)(I+S_k)^{-1},\ k=0,1$ оператора $\dot{A}$, удовлетворяющие условию (2.12). Для конструкции такого оператора X_1 мы можем повторить конструкцию в подразделе 2.2 или использовать результаты в [94] (см. замечание 2.2.3). □

В случае $\mathrm{ran}\,(C)\ne\mathfrak{N}$ мы можем взять $X_1=I_{\mathfrak{N}}$, это эквивалентно выбору $S_1=S_M \iff A_1=A_K$. Тогда мы можем найти (см. замечание 2.2.3) подпространство $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$ такое, что

$$\mathfrak{M}\cap\mathrm{ran}\,(C^{1/2})=\{0\},\ (\mathfrak{N}\ominus\mathfrak{M})\cap\mathrm{ran}\,(C^{1/2})=\{0\}.$$

Отсюда, $S_0 = S_\mu + C^{1/2} P_{\mathfrak{M}} C^{1/2}$ и $A_0 = (I - S_0)(I + S_0)^{-1}$ – экстремальное расширение оператора $\dot{A}$.

Отметим, что возможна ограниченность оператора $\dot{A}$. Таким образом, ограниченный оператор $\dot{A}$, имеющий неотрицательные самосопряженные операторные расширения, допускает факторизацию $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ с неограниченными $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}$.

Выводы к главе 2

Во второй главе диссертации изучаются свойства операторов в дивергентной форме и их неотрицательных самосопряженных расширений.

- Для неотрицательного симметрического оператора $\mathcal{A}$, заданного в дивергентной форме (1.39), описаны расширения Фридрихса $\mathcal{A}_F$ и Крейна $\mathcal{A}_K$ и ассоциированные с ними полуторалинейные формы, сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ и устанавлен критерий трансверсальности $\mathcal{A}_F$ и $\mathcal{A}_K$; для случая, когда $\mathcal{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$ ($\mathcal{A} = \mathcal{L}_0\mathcal{L}$), где $\mathcal{L}_0$ – плотно определенный, замкнутый, симметрический оператор с равными индексами дефекта в H и $\mathcal{L}$ его неотрицательное самосопряженное расширение, устанавлен критерий выполнения равенства $\mathcal{A}^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$ ($\mathcal{A}^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$).

- Построена конструкция базисной граничной тройки для $\mathcal{A}^*$ и описаны все неотрицательные самосопряженные расширения оператора $\mathcal{A}$.

- Приведен пример конструкции двух операторов – плотно определенного неотрицательного симметрического оператора $\mathcal{L}_0$ и его неотрицательного самосопряженного расширения $\mathcal{L}$ таких, что $\operatorname{dom}(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$, в частности, $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^2) = \{0\}$.

- Доказано, что каждый плотно определенный неотрицательный симметрический оператор $\dot{A}$, имеющий дизъюнктные неотрицательные самосопряженные расширения, допускает бесконечного много факторизаций вида $\dot{A} = \mathcal{L}\mathcal{L}_0$, и параметризованы такие факторизации. Для случая неплотно заданного симметрического оператора $\dot{A}$ устанавлен критерий существования таких факторизаций.

Глава 3

Квази-самосопряженные расширения неотрицательного симметрического оператора

В данной главе мы развиваем метод описанный в разделе 1.2.9 теперь для описания всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений плотно определенного неотрицательного симметрического оператора во внутренних терминах. Описываем ассоциированные с ними полуторалинейные формы и даем критерий дизъюнктности и трансверсальности квази-самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ с фридрихсовым расширением S_F. А также даем критерий экстремальности квази-самосопряженных расширений.

3.1 Параметризация всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений

В следующей теореме мы даем описание всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора S.

Теорема 3.1.1. *Пусть S неотрицательный плотно определенный замкнутый симметрический оператор. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми m-аккретивными квази-самосопряженными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми (+)-m-аккретивными операторами $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$, удовлетворяющими условию:*

$$\operatorname{ran}(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(\widetilde{U}e, e)_+ \geq \omega_0[\widetilde{U}e], \quad \forall e \in \operatorname{dom}(\widetilde{U}). \tag{3.1}$$

Это соответствие дается формулами:

$$\begin{aligned} &\operatorname{dom}(\widetilde{S}) = \operatorname{dom}(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U})\operatorname{dom}(\widetilde{U}), \\ &\widetilde{S}(\varphi + e + S_F\widetilde{U}e) = S_F(\varphi + e) - \widetilde{U}e, \quad \varphi \in \operatorname{dom}(S), \ e \in \operatorname{dom}(\widetilde{U}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Расширение $\widetilde{S}$ определенное формулами (3.2) является m-секториальным в том и только том случае, если

$$\begin{aligned} &\text{оператор } \widetilde{U} \text{ (+)-m-аккретивен в } \mathfrak{N}_F, \ \operatorname{ran}(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0 \\ &\text{и секториальна полуторалинейная форма} \\ &\tau_{\widetilde{U}}[e,h] := (\widetilde{U}e, h)_+ - \omega_0[\widetilde{U}e, \widetilde{U}h], \ e, h \in \operatorname{dom}(\widetilde{U}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Замкнутая форма $\widetilde{S}[\cdot,\cdot]$, ассоциированная с $\widetilde{S}$,описывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}[\widetilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus S_F\mathcal{D}[\widetilde{U}^{-1}], \;\; \widetilde{S}[u+S_Ff, v+S_Fg] = \\
&= (S_F^{1/2}u - \widehat{S}_F^{-1/2}f, S_F^{1/2}v - \widehat{S}_F^{-1/2}g) + \widetilde{U}^{-1}[f,g] - \omega_0[f,g], \\
&u,v \in \mathcal{D}[S],\; f,g \in \mathcal{D}[\widetilde{U}^{-1}],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Расширения $\widetilde{S}$ и S_F дизъюнктны в том и только в том случае, когда оператор $\widetilde{U}$ обратим, и трансверсальны в том и только в том случае, когда оператор $\widetilde{U}^{-1}$ ограничен.

Доказательство. Предположим, что $\widetilde{S}$ это аккретивное квази-самосопряженное расширение оператора S. Если $e \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) \cap \mathfrak{M}_F$, то $e = S_Fg,\;\; g \in \mathfrak{N}_F,\; \widetilde{S}e = S^*S_Fg = -g$ и $\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}e, e) = -(g, S_Fg) \leq 0$. Но S_F неотрицательный самосопряженный оператор, значит $e = S_Fg = 0$. Следовательно, $\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) \cap \mathfrak{M}_F = \{0\}$.

Это означает, что область определения $\mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$ может быть представлена в виде:

$$
\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}) = \mathrm{dom}\,(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U})\mathrm{dom}\,(\widetilde{U}),
$$

где $\widetilde{U}$ это линейный оператор в $\mathfrak{N}_F$ с областью определения $\mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$.

Покажем, что $\widetilde{U}$ является $(+)$-аккретивным оператором в $\mathfrak{N}_F$. Рассмотрим произвольный вектор $f \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$ в виде $f = h + S_F\widetilde{U}h,\;\; h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$, тогда $\widetilde{S}f = S^*f = S_Fh - \widetilde{U}h$ и

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{S}f, f) = (S_Fh - \widetilde{U}h, h + S_F\widetilde{U}h) = \\
&= (S_Fh, h) - (\widetilde{U}h, S_F\widetilde{U}h) + (S_Fh, S_F\widetilde{U}h) - (\widetilde{U}h, h) = \\
&= (S_Fh, h) - (\widetilde{U}h, S_F\widetilde{U}h) + (S_Fh, S_F\widetilde{U}h) + (h, \widetilde{U}h) - 2\mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h) = \\
&= (S_Fh, h) - (\widetilde{U}h, S_F\widetilde{U}h) + (h, \widetilde{U}h)_+ - 2\mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h).
\end{aligned}
$$

Поскольку $\widetilde{S}$ аккретивное квази-самосопряженное расширение оператора S, то по теореме 1.3.2 каждый вектор $f \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$ принадлежит $\mathrm{dom}\,(S_K^{1/2})$ и выполняется неравенство $\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f) \geq ||S_K^{1/2}||^2$. Из (1.32) следует, что $\mathrm{ran}\,(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0$ и для всех $f = h + S_F\widetilde{U}h,\;\; h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$ выполняется неравенство:

$$
||S_F^{1/2}h - \widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 \leq (S_Fh, h) - (\widetilde{U}h, S_F\widetilde{U}h) + \mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h)_+ - 2\mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h).
$$

Поскольку $||S_F^{1/2}h - \widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 = (S_F h, h) + ||\widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 - 2\mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h)$, то $||\widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 + ||S_F^{1/2}\widetilde{U}h||^2 \le \mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h)_+$. Тогда (1.28) влечет

$$\omega_0[\widetilde{U}h] \le \mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h), \quad \forall h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}). \tag{3.5}$$

Это неравенство показывает, что оператор $\widetilde{U}$ является $(+)$-аккретивным.

Предположим теперь, что оператор $\widetilde{S}$ m-аккретивен, тогда его сопряженный $\widetilde{S}^*$ тоже m-аккретивен и является квази-самосопряженным расширением оператора S. В этом случае оператор $\widetilde{U}$ $(+)$-замкнутый и плотно определенный. Если вектор $e \in \mathfrak{N}_F$ $(+)$-ортогонален $\mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$, то есть $(e, h)_+ = 0$ для всех $h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$, тогда $(S_F e, S_F h) + (e, h) = 0, \quad \forall h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$. Используя $(+)$-ортогональность $S_F\mathfrak{N}_F$ к $\mathrm{dom}\,(S) \dotplus \mathfrak{N}_F$, получаем, что для каждого $\varphi \in \mathrm{dom}\,(S)$

$$(-e, \varphi + h + S_F\widetilde{U}h) = (S_F e, S\varphi + S_F h - \widetilde{U}h).$$

Последнее означает, что вектор $S_F e$ принадлежит $\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}^*)$, а значит $e = 0$. Таким образом, если $\widetilde{S}$ m-аккретивное квази-самосопряженное расширение оператора S, то соответствующий оператор $\widetilde{U}$ $(+)$-замкнут, плотно определен в $\mathfrak{N}_F$, $(+)$-аккретивен и удовлетворяет условую (3.5). Более того, для $\widetilde{S}^*$ выполняется разложение:

$$\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}^*) = \mathrm{dom}\,(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U}^*)\mathrm{dom}\,(\widetilde{U}^*),$$

где $\widetilde{U}^*$ это $(+)$-сопряженный оператор к $\widetilde{U}$ в подпространстве $\mathfrak{N}_F$. Так как $\widetilde{S}^*$ аккретивен, то оператор $\widetilde{U}^*$ является $(+)$-аккретивным и удовлетворяет условию (3.5), если заменить $\widetilde{U}$ на $\widetilde{U}^*$. Посклько оба оператора $\widetilde{U}$ и $\widetilde{U}^*$ $(+)$-аккретивны, то они являются $(+)$-m-аккретивными в подпространстве $\mathfrak{N}_F$ и удовлетворяют условию (3.5).

Предположим теперь, что оператор $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$ удовлетворяет условиям (3.1). Пусть оператор $\widetilde{S}$ задан формулами (3.2), тогда оператор $\widetilde{S}$ является замкнутым квази-самосопряженным расширением оператора S и вектор $f = h + S_F\widetilde{U}h$, где $h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$, удовлетворяет условию $\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f) \ge |S_K f||^2$. Тогда, из (1.9) следует, что для всех $\varphi \in \mathrm{dom}\,(S)$ выполняется неравенство:

$$|(S\varphi, f)|^2 \le (S\varphi, \varphi)\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f).$$

Что влечет $|(S\varphi, f)| \leq (S\varphi, \varphi) + \mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f)$. Значит,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}(\varphi + f), \varphi + f) = (S\varphi, \varphi) + \mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f) + 2\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}\varphi, f) \geq \\ &\geq (S\varphi, \varphi) + \mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f) - (S\varphi, \varphi) - \mathrm{Re}\,(\widetilde{S}f, f) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\widetilde{S}$ аккретивен. Рассмотрим пару $\langle S, \widetilde{S}\rangle$. Поскольку $(S\varphi, g) = (\varphi, \widetilde{S}g)$ для всех $\varphi \in \mathrm{dom}\,(S)$ и всех $g \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$, и $\widetilde{S}$ является замкнутым аккретивным оператором, то существует [93] m-аккретивный оператор $\widetilde{S}'$ такой, что $\widetilde{S}' \supset \widetilde{S}$ и $\widetilde{S}'^{*} \supset S$. Значит,

$$S \subset \widetilde{S} \subset \widetilde{S}' \subset S^{*}.$$

Это означает, что оператор $\widetilde{S}'$ является квази-самосопряженным m-аккретивным расширением оператора S. Так как $\widetilde{S}'$ расширяет $\widetilde{S}$, то соответствующий оператор $\widetilde{U}'$ в представлении

$$\mathrm{dom}\,(\widetilde{S}') = \mathrm{dom}\,(S) \oplus (I + S_F\widetilde{U}')\mathrm{dom}\,(\widetilde{U}')$$

является $(+)$-аккретивным расширением в $\mathfrak{N}_F$ оператора $\widetilde{U}$. Но, поскольку $\widetilde{U}$ m-аккретивен, то $\widetilde{U}' = \widetilde{U}$ и, следовательно, $\widetilde{S}' = \widetilde{S}$. То есть, $\widetilde{S}$ является m-аккретивным расширением оператора S. Так как, нуль пространства (ядра) m-аккретивного оператора и его сопряженного совпадают, то условие (3.5) эквивалентно условию (3.1).

Предположим, что квази-самосопряженное и m-аккретивное расширение $\widetilde{S}$ оператора S задано по формулам (3.2). Пусть $g = \varphi + h + S_F\widetilde{U}h$, где $\varphi \in \mathrm{dom}\,(S)$ и $h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U})$. Поскольку $(\widetilde{U}h, \varphi)_{+} = 0$, а значит, и $(\widetilde{U}h, \varphi) = -(S_F\widetilde{U}h, S_F\varphi)$, то

$$\begin{aligned}&(\widetilde{S}g, g) = (S_F(\varphi + h) - \widetilde{U}h, \varphi + h + S_F\widetilde{U}h) = \\ &= (S_F(\varphi + h), \varphi + h) + (S_F(\varphi + h), S_F\widetilde{U}h) - (\widetilde{U}h, \varphi + h) - (\widetilde{U}h, S_F\widetilde{U}h) = \\ &= (S_F(\varphi + h), \varphi + h) + 2\mathrm{Re}\,(S_F\widetilde{U}h, S_F\varphi) + (\widetilde{U}h, S_F\widetilde{U}h) - 2\mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h) + (h, \widetilde{U}h)_{+}.\end{aligned}$$

Из (1.32) следует, что

$$\begin{aligned}&||S_K^{1/2}g||^2 = ||S_F^{1/2}(\varphi + h) - \widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 = \\ &= (S_F(\varphi + h), \varphi + h) + ||\widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 - 2\mathrm{Re}\,(\varphi + h, \widetilde{U}h) = \\ &= (S_F(\varphi + h), \varphi + h) + ||\widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 - 2\mathrm{Re}\,(h, \widetilde{U}h) + 2\mathrm{Re}\,(S_F\varphi, S_F\widetilde{U}h).\end{aligned}$$

Так как $||S_F^{1/2}\widetilde{U}h||^2 + ||\widehat{S}_F^{-1/2}\widetilde{U}h||^2 = \omega_0[\widetilde{U}h]$, то

$$(\widetilde{S}g, g) - ||S_K^{1/2}g||^2 = (h, \widetilde{U}h)_+ - \omega_0[\widetilde{U}h]. \tag{3.6}$$

Согласно теореме 1.3.2 оператор $\widetilde{S}$ является секториальным в том и только в том случае, когда является секториальной квадратичная форма $(\widetilde{S}g, g) - ||S_K^{1/2}g||^2, \;\; g \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$. Из равенства (3.6) следует, что оператор $\widetilde{S}$ является секториальным в том и только в том случае, когда является секториальной форма:

$$\tau_{\widetilde{U}}[e, h] = (e, \widetilde{U}h)_+ - \omega_0[\widetilde{U}e, \widetilde{U}h], \;\; e, h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U}).$$

Из условий (3.3) следует, что являются секториальными оператор $\widetilde{U}$ и обратное линейное отношение $\widetilde{U}^{-1}$. Значит, форма $(\widetilde{U}^{-1}e, h)_+$ имеет замыкание $\widetilde{U}^{-1}[\cdot, \cdot]$ в $\mathfrak{N}_F$. Более того, $\mathcal{D}[\widetilde{U}^{-1}] \subseteq \mathfrak{N}_0 = \mathrm{dom}\,(\omega_0)$ и является секториальной полуторалинейная форма

$$\nu_{\widetilde{U}}[e, h] := \widetilde{U}^{-1}[e, h] - \omega_0[e, h], \;\; e, h \in \mathcal{D}[\widetilde{U}^{-1}].$$

Доказательство (3.4) аналогично доказательству теоремы 1.2.22. Отметим, что форма $\nu_{\widetilde{U}}$ замкнута в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}[S_K]$. $\square$

Определение 3.1.2 ([41, 46]). *Квази-самосопряженное m-аккретивное расширение $\widetilde{S}$ неотрицательного симметрического оператора S называется экстремальным, если для любого $f \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{S})$:*

$$\inf\{\mathrm{Re}\,(\widetilde{S}(f - \varphi), f - \varphi), \; \varphi \in \mathrm{dom}\,(S)\} = 0.$$

В следующем предложении мы даем критерий экстремальности квази-самосопряженного m-аккретивного расширения $\widetilde{S}$ неотрицательного симметрического оператора S.

Предложение 3.1.3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) квази-самосопряженное m-аккретивное расширение $\widetilde{S}$ неотрицательного симметрического оператора S является экстремальным;

2) (+)-m-аккретивный оператор $\widetilde{U}$ в $\mathfrak{N}_F$ из (3.2) удовлетворяет условию:

$$\mathrm{ran}\,(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0, \;\; \mathrm{Re}\,(\widetilde{U}h, h)_+ = \omega_0[\widetilde{U}h], \;\; \forall h \in \mathrm{dom}\,(\widetilde{U});$$

3) (+)-m-аккретивный оператор $\widetilde{U}$ *в* $\mathfrak{N}_F$ *из* (3.2) *удовлетворяет условию:*

$$\operatorname{ran}(\widetilde{U}) \subset \mathfrak{N}_0, \quad \operatorname{Re}((\widetilde{U}P_{\widetilde{U}})^{-1}e, e)_+ = \omega_0[e], \quad \forall e \in \operatorname{ran}(\widetilde{U}), \tag{3.7}$$

где $P_{\widetilde{U}}$ *(+)-ортогональный проектор в* $\mathfrak{N}_F$ *на* $\overline{\operatorname{ran}}\,(\widetilde{U})$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{S}$ квази-самосопряженное m-аккретивное расширение оператора S и пусть $g \in \operatorname{dom}(\widetilde{S})$, тогда, согласно (3.2), вектор g имеет представление $g = \psi + h + S_F\widetilde{U}h$, где $\psi \in \operatorname{dom}(S)$ и $h \in \operatorname{dom}(\widetilde{U})$. Пусть $\varphi \in \operatorname{dom}(S)$, тогда в силу (3.6) имеем:

$$(\widetilde{S}(g-\varphi), g-\varphi) = ||S_K^{1/2}(g-\varphi)||^2 + (h, \widetilde{U}h)_+ - \omega_0[\widetilde{U}h].$$

В силу (1.33) получаем:

$$\inf\left\{\operatorname{Re}(\widetilde{S}(g-\varphi), g-\varphi), \quad \varphi \in \operatorname{dom}(S)\right\} = \operatorname{Re}(h, \widetilde{U}h)_+ - \omega_0[\widetilde{U}h].$$

Следовательно, расширение $\widetilde{S}$ является экстремальным в том и только в том случае, когда $\operatorname{Re}(h, \widetilde{U}h)_+ = \omega_0[\widetilde{U}h]$ для всех $h \in \operatorname{dom}(\widetilde{U})$. Переходя к обратному оператора, мы получим эквивалентное условие (3.7). □

3.2 Случай симметрического оператора с конечными индексами дефекта

Предложение 3.2.1. *Предположим, что неотрицательный симметричкеский оператор* S *имеет индексы дефекта* $\langle m, m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_F$ *и пусть* $\{e_1, \ e_2, \ ..., \ e_m\}$ *линейный базис подпространства* $\mathfrak{N}_F$. *Обозначим через* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{W}_0$ *следующие* $m \times m$ *матрицы:*

$$\mathcal{G} = ||(e_k, e_j)_+||_{k,j=1}^m, \quad \mathcal{W}_0 = ||\omega_0[e_k, e_j]||_{k,j=1}^m.$$

Существует взаимно однозначное соответствие между

1) *всеми m-аккретивными квази-самосопряженными расширениями* $\widetilde{S}$ *оператора* S *и всеми* $m \times m$ *матрицами* $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^m$, *удовлетворяющими условию:*

$$\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^* \geq 2\mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*; \tag{3.8}$$

2) всеми m-секториальными квази-самосопряженными расширениями $\widetilde{S}$ оператора S и всеми $m \times m$ матрицами $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^m$, удовлетворяющими условию:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) + i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*, \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) - i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*. \end{cases}$$

Это соответствие дается формулами:

$$\operatorname{dom}(\widetilde{S}) = \left\{\varphi + \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j + \sum_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k S_F e_j, \ \ \varphi \in \operatorname{dom}(S), \ \lambda_j \in \mathbb{C}, j \leq m\right\},$$

$$\widetilde{S}\left(\varphi + \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j + \sum_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k S_F e_j\right) = S_F\varphi + \sum_{j=1}^m \lambda_j S_F e_j - \sum_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k e_j.$$

Если $\mathcal{U} = \mathcal{G}\mathcal{W}_0^{-1}$, то соответствующее расширения является расширением Крейна.

Доказательство. Пусть $h = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j \in \mathfrak{N}_F$ и пусть оператор U в $\mathfrak{N}_F$ определен следующим образом:

$$U\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j e_j\right) := \sum_{k,j=1}^m u_{kj}\lambda_k e_j,$$

тогда

$$(Uh, h)_+ = \sum_{k,j=1}^m \lambda_j \overline{\lambda}_k \left(\sum_{l=1}^m u_{jl}(e_l, e_k)_+\right). \tag{3.9}$$

Отметим, что матрица $\mathcal{W} = ||w_{kj}||_{k,j=1}^m$ оператора W_0, ассоциированного с формой $\omega_0[\cdot,\cdot]$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^m$ совпадает с матрицей $\mathcal{W}_0\mathcal{G}^{-1}$. Действительно, так как

$$\omega_0[h] = (W_0 h, h)_+ = \sum_{k,j=1}^m \lambda_j \overline{\lambda}_k \left(\sum_{l=1}^m w_{jl}(e_l, e_k)_+\right)$$

и

$$\omega_0[h] = \sum_{k,j=1}^m \lambda_j \overline{\lambda}_k \omega_0[e_j, e_k], \tag{3.10}$$

то получаем, что $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}\mathcal{G}$.

Обозначим $g_{kj} = (e_k, e_j)_+$ и $w^o_{kj} = \omega_0[e_k, e_j]$. Согласно (3.9) и (3.10) условие $\mathrm{Re}\,(Uh, h)_+ \geq \omega_0[Uh], \ \ h \in \mathrm{dom}\,(U)$, может быт записано в виде

$$\sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \overline{\lambda}_k \left(\sum_{s=1}^{m} (u_{js} g_{sk} + g_{js} \overline{u}_{ks}) - 2 \sum_{s,l=1}^{m} u_{js} w^o_{sl} \overline{u}_{kl} \right) \geq 0.$$

Что влечет (3.8). Расширение $\widetilde{S}$ является m-секториальным в том и только в том случае, если полуторалинейная форма $q[h, e] := (Uh, e)_+ - \omega_0[Uh, Ue]$, является секториальной, то есть

$$|\mathrm{Im}\, q[h]| \leq \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{Re}\, q[h], \quad h \in \mathrm{dom}\,(U). \tag{3.11}$$

Из равенств (3.9) и (3.10) получаем, что

$$\mathrm{Re}\, q[h] = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \overline{\lambda_k} \left(\sum_{s=1}^{m} (u_{js} g_{sk} + g_{js} \bar{u}_{ks}) - 2 \sum_{s,l=1}^{m} u_{js} w^0_{sl} \bar{u}_{kl} \right),$$

$$\mathrm{Im}\, q[h] = \frac{1}{2i} \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \bar{\lambda}_k \left(\sum_{s=1}^{m} (u_{js} g_{sk} - g_{js} \bar{u}_{ks}) \right).$$

Тогда неравенство (3.11) эквивалентно следующим:

$$\begin{cases} \frac{1}{2i} \sum\limits_{k,j=1}^{m} \lambda_j \bar{\lambda}_k \left(\sum\limits_{s=1}^{m} (u_{js} g_{sk} - g_{js} \bar{u}_{ks}) \right) \leq \\ \leq \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{1}{2} \sum\limits_{k,j=1}^{m} \lambda_j \overline{\lambda_k} \left(\sum\limits_{s=1}^{m} (u_{js} g_{sk} + g_{js} \bar{u}_{ks}) - 2 \sum\limits_{s,l=1}^{m} u_{js} w^0_{sl} \bar{u}_{kl} \right), \\ \frac{1}{2i} \sum\limits_{k,j=1}^{m} \lambda_j \bar{\lambda}_k \left(\sum\limits_{s=1}^{m} (g_{js} \bar{u}_{ks} - u_{js} g_{sk}) \right) \leq \\ \leq \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{1}{2} \sum\limits_{k,j=1}^{m} \lambda_j \bar{\lambda}_k \left(\sum\limits_{s=1}^{m} (u_{js} g_{sk} + g_{js} \bar{u}_{ks}) - 2 \sum\limits_{s,l=1}^{m} u_{js} w^0_{sl} \bar{u}_{kl} \right). \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) + i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*, \\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) - i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*. \end{cases}$$

Расширение Крейна S_K определяется параметром $\mathcal{U} = \mathcal{G}\mathcal{W}_0^{-1}$ этот факт доказан в работе Арлинского и Цекановского [60]. □

Выводы к главе 3

В третьей главе развит метод Арлинского-Цекановского, изложенный в разделе 1.2.9, для описания всех квази-самосопряженных m-аккретивних и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора.

- Дана параметризация всех квази-самосопряженных m-аккретивних и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора во внутренних терминах, в частности, для неотрицательного симметрического оператора с конечными индексами дефекта; описаны полуторалинейные формы ассоциированные с квази-самосопряженными расширениями и дан критерий дизъюнктности и трансверсальности квази-самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ и фридрихсова расширения S_F.

- Дан критерий экстремальности квази-самосопряженных m-аккретивних расширений неотрицательного симметрического оператора.

Глава 4

Связь пространств Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$, $W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y)$ и гильбертова пространства ℓ_2

В данной главе мы доказываем определенную взаимосвязь пространств Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$, $W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y)$, где Y – несходящаяся последовательность точек, с гильбертовым пространством ℓ_2. Данная связь используется нами в 5 и 6 главах для доказательства базисности Рисса дельта-функций Дирака, выяснения свойств дизъюнктности и трансверсальности расширений Крейна и Фридрихса, а также для построения базисных граничных троек.

4.1 Связь между $W_2^1(\mathbb{R})$, $W_2^2(\mathbb{R})$, $W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ и ℓ_2

Пусть Y – конечная или бесконечная монотонная последовательность точек на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию:

$$\inf\{|y' - y''|,\ y', y'' \in Y,\ y' \neq y''\} = d_1 > 0. \tag{4.1}$$

Установим определенную связь между пространствами Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$, $W_2^2(\mathbb{R})$ и гильбертовым пространством $\ell_2(\mathbb{J})$.

Предложение 4.1.1. *1) Если $g \in W_2^2(\mathbb{R})$, тогда последовательности $\{g(y_j),\ y_j \in Y\}$ и $\{g'(y_j),\ y_j \in Y\}$ лежат в $\ell_2(\mathbb{J})$. Более того, существует положительная константа c такая, что для всех g из $W_2^2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства:*

$$\|\{g(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})},\ \|\{g'(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})}.$$

2) Если $\{a_j,\ j \in \mathbb{J}\}$, $\{b_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$, тогда существует фукнция g из $W_2^2(\mathbb{R})$ такая, что $g(y_j) = a_j$, $g'(y_j) = b_j$, $\quad \forall j \in \mathbb{J}$.

Доказательство. 1) Пусть g лежит в $W_2^2(\mathbb{R})$, тогда согласно теореме вложения [4], функция g непрерывно дифференцируема. Справедливы равенства:

$$g(y_j) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x-y_j|}(g(x) - \operatorname{sgn}(x - y_j)g'(x))dx, \tag{4.2}$$

$$g'(y_j) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x-y_j|}(g'(x) - \operatorname{sgn}(x - y_j)g''(x))dx. \tag{4.3}$$

Далее

$$|g(y_j)| \le \tfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|x-y_j|}|g(x) - \operatorname{sgn}(x-y_j)g'(x)|dx \le$$

$$\le \tfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n} e^{-2|x-y_j|}dx\right)^{1/2}\left(2\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n}\left(|g(x)|^2+|g'(x)|^2\right)dx\right)^{1/2} = \tfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{jn}h_n,$$

где $\vec{h} := \left\{h_n := \left(2\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n}\left(|g(x)|^2+|g'(x)|^2\right)dx\right)^{1/2},\ n\in\mathbb{Z}\right\} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ так как

$$||\vec{h}||_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n}\left(|g(x)|^2+|g'(x)|^2\right)dx = 2||g||^2_{W_2^1(\mathbb{R})} \le 2||g||^2_{W_2^2(\mathbb{R})} < \infty,$$

и

$$M_{jn} = \left(\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n} e^{-2|x-y_j|}dx\right)^{1/2}.$$

Если $n \ge j+1$, тогда $y_{n-1} \ge y_j$ и

$$M_{jn}^2 = \int\limits_{y_{n-1}}^{y_n} e^{-2|x-y_j|}dx = \tfrac{e^{2y_j}}{2}(e^{-2y_{n-1}} - e^{-2y_n}) \le \tfrac{1}{2}e^{-2(y_{n-1}-y_j)} \le \tfrac{1}{2}e^{-2d_1(n-j-1)}.$$

Если $n \le j$, тогда $y_n \le y_j$ и

$$M_{jn}^2 = \int\limits_{y_{n-1}}^{y_n} e^{-2|x-y_j|}dx = \tfrac{e^{-2y_j}}{2}(e^{2y_n} - e^{2y_{n-1}}) \le \tfrac{1}{2}e^{-2(y_j-y_n)} \le \tfrac{1}{2}e^{-2d_1(j-n)}.$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{jn} = \sum_{n\ge j+1} M_{jn} + \sum_{n\le j} M_{jn} \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\ge j+1} e^{-d_1(n-j-1)} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\le j} e^{-d_1(j-n)} =$$

$$= \sqrt{2}\sum_{k\ge 0} e^{-d_1 k} = \frac{\sqrt{2}}{1-e^{-d_1}} < \infty.$$

Аналогично,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} M_{jn} \le \frac{\sqrt{2}}{1-e^{-d_1}} < \infty.$$

Пусть M – линейный оператор в $\ell_2(\mathbb{J})$, заданый матрицей $(M_{jn})_{j,n\in\mathbb{Z}}$. Тогда граница Хольмгрена оператора M [36, Appendix C] удовлетворяет неравенству:

$$\|M\|_H = \left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|M_{jn}|\right)^{1/2}\left(\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|M_{jn}|\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{2}}{1-e^{-d_1}} < \infty. \tag{4.4}$$

Это означает, что оператор M является ограниченным в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z})$.

В случае, если $\sup\{Y\} = y_{-1} < \infty$, пусть $y_0 := +\infty$, тогда

$$|g(y_j)| \leq \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n} e^{-2|x-y_j|}dx\right)^{1/2}\left(2\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n}\left(|g(x)|^2+|g'(x)|^2\right)dx\right)^{1/2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{jn}h_n,$$

где, очевидно

$$||\vec{h}||_{\ell_2(\mathbb{Z})} \leq \sqrt{2}||g||_{W_2^2(\mathbb{R})} < \infty,$$

$$M_{0n} = \lim_{y_0\to+\infty}\left(\int\limits_{y_{n-1}}^{y_n} e^{-2|x-y_0|}dx\right)^{1/2} = 0, \text{ для всех } n \leq 0,$$

$$M_{j0} = \lim_{y_0\to+\infty}\left(\int\limits_{y_{-1}}^{y_0} e^{-2|x-y_j|}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(y_{-1}-y_j)},$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{0} M_{jn} \leq \frac{\sqrt{2}}{1-e^{-d_1}} < \infty, \quad \sum_{j=-\infty}^{0} M_{jn} \leq \frac{\sqrt{2}}{1-e^{-d_1}} < \infty.$$

Отсюда, граница Хольмгрена оператора M удовлетворяют неравенству (4.4), то есть оператор M является ограниченным в пространстве $\ell_2(\mathbb{J})$. Аналогичный результат получаем в случае $\inf\{Y\} = y_1 > -\infty$ и в случае, когда Y содержит конечное число точек. Следовательно,

$$\begin{gathered}\sum_{j\in\mathbb{J}}|g(y_j)|^2 \leq \frac{1}{4}\sum_{j\in\mathbb{J}}\left(\sum_{n\in\mathbb{J}}M_{jn}h_n\right)^2 = \frac{1}{4}||Mh||^2_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq \\ \leq \frac{1}{4}||M||^2_H||g||^2_{W_2^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2(1-e^{-d_1})^2}||g||^2_{W_2^2(\mathbb{R})} = c^2||g||^2_{W_2^2(\mathbb{R})} < \infty.\end{gathered} \tag{4.5}$$

То есть, $\{g(y_j),\ y_j \in Y\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ и

$$\|\{g(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c||g||_{W_2^2(\mathbb{R})} < \infty,$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-e^{-d_1})}$.

Аналогично, $\{g'(y_j),\ y_j \in Y\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ и

$$\|\{g'(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c||g'||_{W_2^1(\mathbb{R})} \leq c||g||_{W_2^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

2) Пусть

$$f_\alpha(t)=\begin{cases} e\cdot\exp\left(\frac{\alpha^2}{t^2-\alpha^2}\right)\frac{-\alpha^2(a+bt)}{t^2-\alpha^2}, & |t|\le\alpha,\\ 0, & |t|>\alpha.\end{cases}$$

Отметим, что $f_\alpha(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$ и $f_\alpha(0)=a$. К тому же

$$f'_\alpha(t)=\begin{cases} e\cdot\exp\left(\frac{\alpha^2}{t^2-\alpha^2}\right)\frac{\alpha^2}{(t^2-\alpha^2)^3}\left(bt^4+2at^3+2b\alpha^2t^2-b\alpha^4\right), & |t|\le\alpha,\\ 0, & |t|>\alpha,\end{cases}$$

и $f'_\alpha(0)=b$.

Пусть $\vec a:=\{a_k,\ k\in\mathbb{J}\},\ \vec b:=\{b_k,\ k\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J})$,

$$g_k(x)=f_{d_1/2}(x-y_k)=$$

$$=\begin{cases} e\cdot\exp\left(\frac{(d_1/2)^2}{(x-y_k)^2-(d_1/2)^2}\right)\frac{-(d_1/2)^2(a_k+b_k(x-y_k))}{(x-y_k)^2-(d_1/2)^2}, & |x-y_k|<d_1/2,\\ 0, & |x-y_k|\ge d_1/2,\end{cases}\tag{4.6}$$

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{J}}g_k(x),$$

тогда $g(y_k)=a_k,\quad g'(y_k)=b_k$. Очевидно, что функция $g(x)$ лежит в $W_2^2(\mathbb{R})$, так как $f_\alpha(t)\in C^\infty(\mathbb{R})\subset W_2^2(\mathbb{R})$ и $\{a_k,\ k\in\mathbb{J}\}$, $\{b_k,\ k\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J})$.

□

В силу (4.5), (4.6) и так как $g(x)$ лежит в $W_2^2(\mathbb{R})$, мы получаем следующее

Следствие 4.1.2. *1) Если $f\in W_2^1(\mathbb{R})$, то последовательность $\{f(y_j),\ \ y_j\in Y\}$ лежит в $\ell_2(\mathbb{J})$.*

2) Для любого $\vec a=\{a_j,\ j\in\mathbb{J}\}$ из $\ell_2(\mathbb{J})$ существует функция g из $W_2^1(\mathbb{R})$ такая, что $g(y_j)=a_j,\ j\in\mathbb{J}$.

Предложение 4.1.3. *Пусть множество точек Y удовлетворяет условию* (4.1). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Если $\varphi\in W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y)$, то последовательность $\{\varphi(y_j+0)-\varphi(y_j-0),\ \ y_j\in Y\}$ лежит в $\ell_2(\mathbb{J})$.

2) Для любой $\vec a=\{a_j,\ j\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J})$ существует функция φ из $W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)$ такая, что $\varphi(y_j+0)-\varphi(y_j-0)=a_j,\ j\in\mathbb{J}$.

Доказательство. 1) Пусть $g(x)$ вещественная функция из $W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)$, тогда выполняются равенства:

$$\begin{gathered}
g^2(y_j-0)-g^2(y_{j-1}+0)e^{-(y_j-y_{j-1})}=\int\limits_{y_{j-1}+0}^{y_j-0} e^{-|x-y_j|}(g^2(x)+2g(x)g'(x))dx,\\
g^2(y_{j-1}+0)-g^2(y_j-0)e^{-(y_j-y_{j-1})}=\int\limits_{y_{j-1}+0}^{y_j-0} e^{-|x-y_{j-1}|}(g^2(x)-2g(x)g'(x))dx.
\end{gathered}\tag{4.7}$$

Из (4.7) получаем

$$\begin{gathered}
(g^2(y_j-0)+g^2(y_{j-1}+0))(1-e^{-(y_j-y_{j-1})})=\\
=\int\limits_{y_{j-1}+}^{y_j-}\left(g^2(x)(e^{-|x-y_j|}+e^{-|x-y_{j-1}|})+2g(x)g'(x)(e^{-|x-y_j|}-e^{-|x-y_{j-1}|})\right)dx\le\\
\le\int\limits_{y_{j-1}+}^{y_j-}\left(2g^2(x)+4|g(x)g'(x)|\right)dx\le 4\int\limits_{y_{j-1}+}^{y_j-}\left(g^2(x)+g'^2(x)\right)dx.
\end{gathered}$$

Поскольку $1-e^{-(y_j-y_{j-1})}\ge 1-e^{-d_1}$, то

$$\begin{gathered}
\sum_{j\in\mathbb{J}}(g^2(y_j-0)+g^2(y_{j-1}+0))\le\frac{4}{1-e^{-d_1}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus Y}\left(g^2(x)+g'^2(x)\right)dx=\\
=\frac{4}{1-e^{-d_1}}\|g\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)}<\infty.
\end{gathered}\tag{4.8}$$

Пусть $\varphi(x)$ из $W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)$ и $\varphi=\varphi_R(x)+i\varphi_I(x)$, где $\varphi_R(x)$ и $\varphi_I(x)$ – вещественные функции, тогда для них справедливо неравенство (4.8) и, следовательно, $\sum\limits_{j\in\mathbb{J}}(|\varphi(y_j-0)|^2+|\varphi(y_j+0)|^2)<\infty$. Так как $|\varphi(y_j+0)-\varphi(y_j-0)|^2\le 2(|\varphi(y_j-0)|^2+|\varphi(y_j+0)|^2)$, то $\{\varphi(y_j+0)-\varphi(y_j-0),\ j\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J})$.

2) Положим $\varphi(x)=\sum\limits_{j\in\mathbb{J}}a_i\omega_{d_1}(x-y_j)$, где

$$\omega_\alpha(x)=\begin{cases} e\cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}}, & 0\le x<\alpha\le d_1,\\ 0, & x\notin[0;\alpha].\end{cases}$$

Очевидно, что $\omega_\alpha(+0)=1$, $\omega_\alpha(-0)=0$ и $\varphi(y_j+0)-\varphi(y_j-0)=a_j$, $j\in\mathbb{J}$. Поскольку $\omega_{d_1}(x)\in W_2^1[0,d_1]$ и $\{a_j,\ j\in\mathbb{J}\}\in\ell_2(\mathbb{J})$, то $\varphi\in W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y)$. □

4.2 Связь между $W_2^2(\mathbb{R}^d), d = 2, 3,$ и ℓ_2

В дальнейшем $W_2^{\pm 1}(\mathbb{R}^d)$, $W_2^{\pm 2}(\mathbb{R}^d)$, (здесь и далее $d = 2$ или 3) – пространства Соболева [4]. Пусть $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – счетное множество точек в $\mathbb{R}^d$ таких, что

$$\inf\{|y_j - y_k|,\ j \neq k\} =: d_*(Y) > 0. \tag{4.9}$$

Предложение 4.2.1. *Пусть Y удовлетворяет условию* (6.3) *и пусть* $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$, *тогда существует функция* $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^d),\ d = 2,\ 3,$ *такая, что* $||f||_2 = 1$ *и* $f(y_j) = A \cdot a_j, \forall j \in \mathbb{N},\ A = const.$

Доказательство. Пусть $g(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j g_j(x)$, где $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и

$$g_j(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{|x-y_j|^2}{|x-y_j|^2-\alpha^2}\right), & |x - y_j| < \alpha < d_*(Y)/2, \\ 0, & |x - y_j| \geq \alpha. \end{cases}$$

Поскольку

$$||g_j||_2 = \sqrt{\int\limits_{|x|<\alpha} \left[e^{\frac{2|x|^2}{|x|^2-\alpha^2}} + \left|\Delta e^{\frac{|x|^2}{|x|^2-\alpha^2}}\right|^2\right] dx} =: \gamma(\alpha) < \infty,$$

то $||g(x)||_2 = \gamma(\alpha)||a||$ и $g(y_j) = a_j,\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Положим $f(x) := \frac{g(x)}{||a||\gamma(\alpha)}$, тогда $||f||_2 = 1$ и $f(y_j) = \frac{a_j}{\gamma(\alpha)||a||},\ \forall j \in \mathbb{N}$. □

Выводы к главе 4

В четвертой главе диссертации описаны связи пространств Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, $W_2^2(\mathbb{R}^d),\ d = 1,\ 2,\ 3,\ W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y)$, где Y – несходящаяся последовательность точек, с гильбертовым пространством ℓ_2.

- Если $g \in W_2^2(\mathbb{R})$, то

$$\{g(y_j),\ y_j \in Y\},\ \{g'(y_j),\ y_j \in Y\} \in \ell_2(\mathbb{J}).$$

Для любого $g \in W_2^2(\mathbb{R})$ существует $c > 0$ такая, что выполняются неравенства:

$$\|\{g(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})},\ \|\{g'(y_j)\}\|_{\ell_2(\mathbb{J})} \leq c\|g\|_{W_2^2(\mathbb{R})}.$$

Для любых последовательностей $\{a_j,\ j \in \mathbb{J}\},\ \{b_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$, существует функция $g \in W_2^2(\mathbb{R})$ такая, что

$$g(y_j) = a_j,\ g'(y_j) = b_j, \quad \forall j \in \mathbb{J}.$$

- Если $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$, то

$$\{\varphi(y_j + 0) - \varphi(y_j - 0),\ \ y_j \in Y\} \in \ell_2(\mathbb{J}).$$

Для любой последовательности $\vec{a} = \{a_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ существует функция $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ такая, что

$$\varphi(y_j + 0) - \varphi(y_j - 0) = a_j,\ j \in \mathbb{J}.$$

- Для любой последовательности $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ существует функция $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^d),\ d = 2,\ 3$ такая, что

$$||f||_2 = 1 \text{ и } f(y_j) = A \cdot a_j, \forall j \in \mathbb{N},\ A = const.$$

Глава 5

1D неотрицательные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями

В данном разделе мы исследуем свойства минимальных операторов Шрёдингера A_0, A' и H_0 с δ, δ' и $\delta-\delta'$ потенциалами (5.2)-(5.4). Даем представление операторов A_0, A' и H_0, и сопряженных к ним, в дивергентной форме. Пользуясь результатами 2 главы, мы описываем экстремальные расширения Фридрихса и Крейна в дивергентной форме.

Используя связь пространств Соболева $W_2^2(\mathbb{R})$, $W_2^1(\mathbb{R})$, $W(\mathbb{R}\backslash Y)$ с гильбертовым пространством $\ell_2(\mathbb{J})$, установленную в 4 главе, мы доказываем, что системы дельта-функций Дирака $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ и $\{\delta(x-y_j),\ \delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$, $x\in\mathbb{R}$ – образуют базисы Рисса в своих линейных оболочках.

Исходя из базисноти Рисса дельта-функций Дирака, мы доказываем трансверсальность расширений Крейна и Фридрихса, строим базисные граничные тройки и даем описание всех неотрицательных самосопряженных расширений операторов A_0, A' и H_0, соответственно.

В конце раздела, используя результаты 3 главы, мы даем описание во внутренних терминах всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных гамильтонианов соответствующих конечному числу δ' взаимодействий на прямой.

5.1 Операторы Шрёдингера A_0, A' и H_0 с δ, δ' и $\delta-\delta'$ потенциалами

5.1.1 Дивергентная форма операторов Шрёдингера A_0, A' и H_0

Пусть Y – конечная или бесконечная монотонная последовательность точек на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию:

$$\inf\{|y'-y''|,\ y',y''\in Y,\ y'\neq y''\}>0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{dom}(A_0)=\left\{f\in W_2^2(\mathbb{R}):f(y)=0,\ y\in Y\right\},\ A_0:=-\frac{d^2}{dx^2}, \tag{5.2}$$

$$\operatorname{dom}(A')=\left\{f\in W_2^2(\mathbb{R}):f'(y)=0,\ y\in Y\right\},\ A':=-\frac{d^2}{dx^2}, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{dom}\,(H_0) = \left\{ f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(y) = 0,\ f'(y) = 0,\ y \in Y \right\},\ H_0 := -\frac{d^2}{dx^2}. \quad (5.4)$$

Операторы A_0, A' и H_0 – плотно определеные неотрицательные и симметрические с равными конечными (если множество Y конечно) или бесконечными (если Y бесконечно) индексами дефекта и являются основой для исследования гамильтонианов на действительной оси, соответствующие точечным δ, δ' и $\delta - \delta'$ взаимодействиям [36]. Отметим, что (см. [36]):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dom}\,(A_0^*) = W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(\mathbb{R} \setminus Y),\ A_0^* = -\frac{d^2}{dx^2},\\
&\mathrm{dom}\,(A'^*) = \{g \in W_2^2(\mathbb{R}) : g'(y+) = g'(y-),\ y \in Y\},\ A'^* = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad (5.5)\\
&\mathrm{dom}\,(H_0^*) = W_2^2(\mathbb{R} \setminus Y),\ H_0^* = -\frac{d^2}{dx^2}.
\end{aligned}$$

В добавок $A_0 \supset H_0$, $A' \supset H_0$ и операторы A_0, A', H_0 являются сужениями неотрицательного самосопряженного оператора A:

$$\mathrm{dom}\,(A) = W_2^2(\mathbb{R}), A = -\frac{d^2}{dx^2}. \quad (5.6)$$

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел и пусть $\mathbb{Z}_- = \{j \in \mathbb{Z},\ j \le -1\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{j \in \mathbb{Z},\ j \ge 1\}$. Для случая бесконечного Y возможны три случая:

$$\begin{aligned}
&Y = \{y_j,\ j \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{если} \quad \inf\{Y\} = -\infty \quad \text{и} \quad \sup\{Y\} = +\infty,\\
&Y = \{y_j,\ j \in \mathbb{Z}_-\}, \quad \text{если} \quad y_{-1} = \sup\{Y\} < +\infty,\\
&Y = \{y_j,\ j \in \mathbb{Z}_+\}, \quad \text{если} \quad y_1 = \inf\{Y\} > -\infty.
\end{aligned}$$

Через $\mathbb{J}$ обозначим одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+$ для случая бесконечного Y.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ следующие операторы:

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) = \{f \in W_2^1(\mathbb{R}) : f(y) = 0,\ y \in Y\},\ \mathcal{L}_0 = i\frac{d}{dx}, \quad (5.7)$$

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}),\ \mathcal{L} = i\frac{d}{dx}. \quad (5.8)$$

Оператор $\mathcal{L}_0$ является плотно определенным симметрическим и его сопряженный $\mathcal{L}_0^*$ задается формулой

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) = W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y),\ \mathcal{L}_0^* = i\frac{d}{dx}. \quad (5.9)$$

Оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным расширением оператора $\mathcal{L}_0$ и

$$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0^*.$$

Если Y состоит из m точек, то дефектные индексы оператора $\mathcal{L}_0$ равны $\langle m, m\rangle$, а дефектные индексы операторов H_0, A_0, A', соответственно, $\langle 2m, 2m\rangle$, $\langle m, m\rangle$, и $\langle m, m\rangle$.

Пусть $d_k = |y_k - y_{k+1}|$, $k \in \mathbb{J}$,

$$\mathcal{L}_{0k} = i\frac{d}{dx},\ \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{0k}) = \{f \in W_2^1[y_k, y_{k+1}] : f(y_k) = f(y_{k+1}) = 0\},\ k \in \mathbb{J}.$$

Оператор $\mathcal{L}_{0k}$ является симметрическим в гильбертовом пространстве $L_2[y_k, y_{k+1}]$ и имеет дефектные индексы $(1, 1)$. Его сопряженный имеет вид:

$$\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{0k}^*) = W_2^1\,(y_k, y_{k+1})\,,\ \ \mathcal{L}_{0k}^* = i\frac{d}{dx}$$

Тогда, $(\mathcal{L}_{0k}^2)^* = \mathcal{L}_{0k}^{*2}$ (см. теорема 1.4.1). Очевидно, что

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) &= \bigoplus_k \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{0k}),\ \mathcal{L}_0 = \bigoplus_k \mathcal{L}_{0k},\\ \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) &= \bigoplus_k \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{0k}^*),\ \mathcal{L}_0^* = \bigoplus_k \mathcal{L}_{0k}^*.\end{aligned}$$

Далее,

$$\ker\,(\mathcal{L}_{0k}^*) = \Big\{\ f(x) = \mathrm{const},\ \ x \in [y_k, y_{k+1}]\Big\}\ \text{ и }\ \ker\,(\mathcal{L}_0^*) = \bigoplus_k \ker\,(\mathcal{L}_{0k}^*).$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\,(H_0) &= \bigoplus_k \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{0k}^2),\ H_0 = \mathcal{L}_0^2 = \bigoplus_k \mathcal{L}_{0k}^2,\\ \mathrm{dom}\,(H_0^*) &= \bigoplus_k \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_{0k}^{*2}),\ H_0^* = \mathcal{L}_0^{*2} = \bigoplus_k \mathcal{L}_{0k}^{*2}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

В силу теоремы 2.1.3 и из (5.5), (5.8) (5.2), (5.3), (5.4) следует, что

$$A_0 = \mathcal{L}\mathcal{L}_0,\ A' = \mathcal{L}_0\mathcal{L},\ H_0 = \mathcal{L}_0^2,\ A_0^* = \mathcal{L}_0^*\mathcal{L},\ A'^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*,\ H_0^* = \mathcal{L}_0^{*2}. \tag{5.11}$$

Обозначим через χ_k характеристическую функцию интервала $[y_k, y_{k+1}]$, тогда функции $\left\{\frac{\chi_k}{\sqrt{d_k}}\right\}_{k\in\mathbb{J}}$ образуют ортонормированный базис $\ker\,(\mathcal{L}_0^*)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&P_{\ker\,(\mathcal{L}_0^*)}\mathcal{L}_0^* f = \sum_k \left(f, \tfrac{\chi_k}{\sqrt{d_k}}\right)\tfrac{\chi_k}{\sqrt{d_k}} = \sum_k \tfrac{1}{d_k}\left(\int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} if'(x)dx\right)\chi_k =\\ &= i\sum_k \tfrac{1}{d_k}(f(y_{k+1}-0) - f(y_k+0))\chi_k,\ f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*),\end{aligned} \tag{5.12}$$

и

$$P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}_0^* f = if' - i\sum_k \frac{1}{d_k}(f(y_{k+1}-0)-f(y_k+0))\chi_k,\ f\in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*). \quad (5.13)$$

Если $f\in W_2^1(\mathbb{R})$, то $f(y\pm 0)=f(y)$, $y\in Y$.

Из (5.11) следует, что выполняются условия (5.1) и (2.1) для пар операторов $\langle \mathcal{L}_0,\mathcal{L}\rangle$, $\langle \mathcal{L},\mathcal{L}_0^*\rangle$, и $\langle \mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0^*\rangle$ и мы можем применять теорему 2.1.1.

5.1.2 Расширения Фридрихса и Крейна операторов A_0, A' и H_0

Расширения Фридрихса и Крейна оператора A_0

Пусть оператор A_0 задан равенствами (5.2), тогда $A_0=\mathcal{L}\mathcal{L}_0$, $A_0^*=\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$, где операторы $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0^*$ определены, соответственно, равенствами (5.7), (5.8) и (5.9). Поскольку $\mathcal{L}$ является самосопряженным расширением оператора $\mathcal{L}_0$, то мы можем применить теорему 2.1.1, где $L_1=\mathcal{L}_0$ и $L_2=\mathcal{L}$. Расширение Фридрихса A_{0F} определяется следующим образом $A_{0F}=\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0$, то есть,

$$A_{0F}f=-\tfrac{d^2f}{dx^2},\ \mathrm{dom}\,(A_{0F})=\left\{f\in W_2^1(\mathbb{R}): f'\in W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y),\ f(y)=0,\ y\in Y\right\}.$$

В силу теоремы 2.1.1 и (5.13), расширение Крейна имеет вид:

$$\begin{aligned}&\mathrm{dom}\,(A_{0K})=\left\{f\in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}): P_{\overline{\mathrm{ran}}\,(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}f\in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L})\right\}=\\ &=\left\{f\in W_2^1(\mathbb{R}): f'-\sum_k \tfrac{1}{d_k}(f(y_{k+1})-f(y_k))\chi_k\in W_2^1(\mathbb{R})\right\},\\ &A_{0K}=-\tfrac{d^2}{dx^2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что граничные условия для $f\in \mathrm{dom}\,(A_{0K})$ такие, что

$$f'(y_k-0)-\tfrac{1}{d_{k-1}}\left(f(y_k)-f(y_{k-1})\right)=f'(y_k+0)-\tfrac{1}{d_k}\left(f(y_{k+1})-f(y_k)\right),$$

или

$$f'(y_k+0)-f'(y_k-0)=\tfrac{1}{d_{k-1}}f(y_{k-1})-\left(\tfrac{1}{d_{k-1}}+\tfrac{1}{d_k}\right)f(y_k)+\tfrac{1}{d_k}f(y_{k+1}),\quad k\in\mathbb{J}.$$

Дополнительные условия появляются в случае когда множество точек Y ограничено слева $\inf\{Y\}>-\infty$, или справа $\sup\{Y\}<+\infty$. Пусть

$$\xi(x)=f'(x)-\sum_k \frac{1}{d_k}(f(y_{k+1})-f(y_k))\chi_k(x).$$

Если множество точек бесконечно Y и $-\infty < y_1 = \inf\{Y\}$, тогда $\xi(y_1+0) = \xi(y_1-0)$, где

$$\xi(y_1+0) = f'(y_1+0) - \frac{1}{d_1}(f(y_2)-f(y_1)), \text{ так как } (y_1+0)\in[y_1;y_2],$$

и

$$\xi(y_1-0) = f'(y_1-0), \text{ так как } (y_1-0)\in(-\infty;y_1],$$

отсюда

$$f'(y_1-0) - f'(y_1+0) = \frac{1}{d_1}(f(y_1)-f(y_2)).$$

Если $+\infty > y_{-1} = \sup\{Y\}$, тогда $\xi(y_{-1}+0) = \xi(y_{-1}-0)$, где

$$\xi(y_{-1}-0) = f'(y_{-1}-0) - \frac{1}{d_{-2}}(f(y_{-1})-f(y_{-2})), \text{ так как } (y_{-1}-0)\in[y_{-2};y_{-1}],$$

и

$$\xi(y_{-1}+0) = f'(y_{-1}+0), \text{ так как } (y_{-1}+0)\in[y_{-1};+\infty),$$

отсюда

$$f'(y_{-1}+0) - f'(y_{-1}-0) = \frac{1}{d_{-2}}(f(y_{-1})-f(y_{-2})).$$

В случае когда множество точек Y конечно, то есть $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, мы получаем

$$\begin{array}{l}
f'(y_1-0) - f'(y_1+0) = \frac{1}{d_1}(f(y_1)-f(y_2)),\\
f'(y_m+0) - f'(y_m-0) = \frac{1}{d_{m-1}}(f(y_m)-f(y_{m-1})),\\
f'(y_k+0) - f'(y_k-0) = \frac{1}{d_{k-1}}f(y_{k-1}) - \left(\frac{1}{d_{k-1}}+\frac{1}{d_k}\right)f(y_k) + \frac{1}{d_k}f(y_{k+1}),\\
k = 2,\ldots,m-1.
\end{array}$$

Область определения квадратичной формы $A_{0K}[f,g]$ равна $\mathcal{D}[A_{0K}] = W_2^1(\mathbb{R})$ и $\forall f,g\in W_2^1(\mathbb{R})$

$$A_{0K}[f,g] = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\overline{g'(x)}dx - \sum_k \frac{1}{d_k}\left(f(y_{k+1})-f(y_k)\right)\left(\overline{g(y_{k+1})}-\overline{g(y_k)}\right).$$

Расширения Фридрихса и Крейна оператора A'

Рассмотрим оператор A' заданый формулами (5.3). Тогда $A' = \mathcal{L}_0\mathcal{L}$, $A'^* = \mathcal{L}\mathcal{L}_0^*$. Обозначив $L_1 = \mathcal{L}$, $L_2 = \mathcal{L}_0^*$, мы можем применять теорему 2.1.1:

$$\mathrm{dom}\,(A'_F) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}^2) = W_2^2(\mathbb{R}), \quad A'_F f = \mathcal{L}^2 f = -\frac{d^2 f}{dx^2}, \; f\in W_2^2(\mathbb{R}).$$

Так как $\ker(\mathcal{L}) = \{0\}$, то $A'_K = \mathcal{L}_0\mathcal{L}_0^*$, то есть,

$$A'_K f = -\tfrac{d^2 f}{dx^2},\ \mathrm{dom}\,(A'_K) = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y) : f' \in W_2^1(\mathbb{R}),\ f'(y) = 0,\ y \in Y \right\}.$$

Область определения формы, ассоциированной с расширением Крейна, равна $\mathcal{D}[A'_K] = W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ и $A'_K[f, g] = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\overline{g'(x)}dx,\ f, g \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$.

Расширения Фридрихса и Крейна оператора H_0

Пусть оператор H_0 задан формулами (5.4), тогда $H_0 = \mathcal{L}_0^2, H_0^* = \mathcal{L}_0^{*2}$. Положим $L_1 = \mathcal{L}_0,\quad L_2 = \mathcal{L}_0^*$, тогда по теореме 2.1.1 мы получим фридрихсово расширение:

$$\begin{aligned}&\mathrm{dom}\,(H_{0F}) = \{f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) : \mathcal{L}_0 f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*)\} = \\ &= \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}),\ f' \in W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y),\ f(y) = 0,\ y \in Y \right\}.\end{aligned}$$

Отметим, что $A_{0F} = H_{0F}$.

Расширение Крейна $\mathrm{dom}\,(H_{0K})$:

$$\mathrm{dom}\,(H_{0K}) = \left\{ f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) :\quad P_{\overline{\mathrm{ran}\,(\mathcal{L}_0)}}\mathcal{L}_0^* f \in \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) \right\} =$$

$$\begin{aligned}&= \Bigg\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y) :\ g = f' - \sum_k \tfrac{1}{d_k}(f(y_{k+1} - 0) - f(y_k + 0))\chi_k, \\ &g \in W_2^1(\mathbb{R}),\ g(y) = 0,\ y \in Y \Bigg\}.\end{aligned}$$

Граничные условия для $f \in \mathrm{dom}\,(H_{0K})$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned}f'(y_k + 0) &= \frac{1}{d_k}\left(f(y_{k+1} - 0) - f(y_k + 0)\right), \\ f'(y_k - 0) &= \frac{1}{d_{k-1}}\left(f(y_k - 0) - f(y_{k-1} + 0)\right) \text{ для всех } y_k \in Y,\end{aligned}$$

к тому же

$$f'(y_{-1} + 0) = 0 \text{ если } +\infty > y_{-1} = \sup\{Y\},$$

или

$$f'(y_1 - 0) = 0 \text{ если } -\infty < y_1 = \inf\{Y\},$$

и если $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, то

$$\begin{aligned}
&f'(y_1 - 0) = 0,\ f'(y_m + 0) = 0,\\
&f'(y_k + 0) = \frac{1}{d_k}\left(f(y_{k+1} - 0) - f(y_k + 0)\right),\ k = 1, \dots, m-1,\\
&f'(y_k - 0) = \frac{1}{d_{k-1}}\left(f(y_k - 0) - f(y_{k-1} + 0)\right),\ k = 2, \dots, m.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}[H_{0K}] = W_2^1(\mathbb{R}\backslash Y),\ \ H_{0K}[f,g] = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\overline{g'(x)}dx -\\
&-\sum\limits_k \tfrac{1}{d_k}\left(f(y_{k+1} - 0) - f(y_k + 0)\right)\left(\overline{g(y_{k+1} - 0)} - \overline{g(y_k + 0)}\right).
\end{aligned}$$

Отметим, что в силу (5.10) и согласно [85, следствию 5.5] мы имеем:

$$H_{0F} = \bigoplus_k \left(\mathcal{L}_{0k}^2\right)_F,\ H_{0K} = \bigoplus_k \left(\mathcal{L}_{0k}^2\right)_K.$$

5.1.3 Базисы Рисса $\delta(\cdot - y)$, $\delta'(\cdot - y)$ и $\delta(\cdot - y) - \delta'(\cdot - y)$ функций Дирака

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ дифференциальные операторы A_0, A' и H_0 определенные формулами (5.2), (5.3) и (5.4), соответственно.

Хорошо известно [36], что

$$\delta_y = \delta(x-y) \in W_2^{-1}(\mathbb{R}) \setminus L_2(\mathbb{R}),\ (\delta_y)' = \delta'(x-y) \in W_2^{-2}(\mathbb{R}) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R}),\ \ (5.14)$$

где $\delta(x-y)$ и $\delta'(x-y)$ – дельта-функция Дирака и ее производная.

Пространства Соболева образуют цепочку гильбертовых пространств:

$$W_2^2(\mathbb{R}) \subset W_2^1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$$

Тройки $W_2^2(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R})$ и $W_2^1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R})$ – оснащенные гильбертовы пространства, то есть, гильбертово пространство $W_2^{-2}(\mathbb{R})$ (соответственно, $W_2^{-1}(\mathbb{R})$) является множествоим всех непрерывных антилинейных функционалов над $W_2^2(\mathbb{R})$ (соответственно, над $W_2^1(\mathbb{R})$) [4].

Определим следующие подпространства:

$$\Phi = \overline{\operatorname{span}}\left\{\delta'(x-y),\ y \in Y\right\} \quad (\text{замыкание в} \quad W_2^{-2}(\mathbb{R})),$$

$$\Psi_{-1} = \overline{\operatorname{span}}\,\{\delta(x-y),\ y \in Y\} \quad (\text{замыкание в} \quad W_2^{-1}(\mathbb{R})),$$

$$\Psi_{-2} = \overline{\operatorname{span}}\,\{\delta(x-y), \quad y \in Y\} \quad (\text{замыкание в} \quad W_2^{-2}(\mathbb{R})),$$

$$\Omega = \overline{\operatorname{span}}\,\{\delta(x-y),\ \delta'(x-y), \quad y \in Y\} \quad (\text{замыкание в} \quad W_2^{-2}(\mathbb{R})).$$

Очевидно, $\Psi_{-1} \subseteq \Psi_{-2}$. Отметим [36], что

$$\Phi \cap L_2(\mathbb{R}) = \{0\},\ \Psi_{-2} \cap L_2(\mathbb{R}) = \{0\},\ \Omega \cap L_2(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

Значит, операторы A', A_0, и H_0 можно определить следующим образом:

$$\operatorname{dom}(A') = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) :\ (f,\varphi) = 0,\ \varphi \in \Phi\}, \tag{5.15}$$

$$\operatorname{dom}(A_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) :\ (f,\psi) = 0,\ \psi \in \Psi_{-2}\}, \tag{5.16}$$

$$\operatorname{dom}(H_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) :\ (f,\omega) = 0,\ \omega \in \Omega\}. \tag{5.17}$$

Оператор A, как уже говорилось, неотрицательный и самосопряженный в $H = L_2(\mathbb{R})$, далее обозначим

$$\begin{array}{ll} H_{+2} = \operatorname{dom}(A) = W_2^2(\mathbb{R}), & H_{+1} = \operatorname{dom}(A^{1/2}) = W_2^1(\mathbb{R}), \\ H_{-1} = W_2^{-1}(\mathbb{R}), & H_{-2} = W_2^{-2}(\mathbb{R}). \end{array}$$

Как отмечалось выше (см. (5.14))

$$\delta_y = \delta(x-y) \in H_{-1} \setminus H, \quad (\delta_y)' = \delta'(x-y) \in H_{-2} \setminus H_{-1}.$$

Дефектные подпространства операторов A', A_0 и H_0 определяются следующим образом (см. [36]):

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}_\lambda(A') = \overline{\operatorname{span}}\,\left\{\operatorname{sgn}(x-y_j)\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y_j|),\ j \in \mathbb{J}\right\}, \\ &\mathfrak{N}_\lambda(A_0) = \overline{\operatorname{span}}\,\{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y_j|),\ j \in \mathbb{J}\}, \\ &\mathfrak{N}_\lambda(H_0) = \overline{\operatorname{span}}\,\{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y_j|),\ \operatorname{sgn}(x-y_j)\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y_j|),\ j \in \mathbb{J}\}. \end{aligned}$$

Напомним [12], что счетное множество векторов $\{e_j\}$ образует *базис Рисса* в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ если

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_j\} = \mathfrak{H}$$

и существуют две положительные константы c_1 и c_2 такие, что для каждого натурального n и каждого набора комплексных чисел $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ выполняется неравенство

$$c_2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \le \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_{\mathfrak{H}}^2 \le c_1 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2.$$

Поскольку $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$, каждый $f \in \mathfrak{H}$ имеет разложение $f = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ такое, что $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, и наоборот, если $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_j|^2 < \infty$, то ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j$ сходится в $\mathfrak{H}$.

Предложение 5.1.1. *Системы функций* $\{\delta(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{\delta'(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ *и* $\{\delta(x - y_j),\ \delta'(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ *образуют базисы Рисса подпространств* Ψ_{-2}, Φ *и, соответственно,* Ω.

Доказательство. Покажем, что система $\{\delta(x - y_j),\ \delta'(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ образует базис Рисса подпространства Ω.

Пусть $f = \sum\limits_j a_j\delta(x-y_j) + b_j\delta'(x-y_j) \in \Omega$, где $\vec{a} := \{a_j\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\vec{b} := \{b_j\}_{j\in\mathbb{J}} \in l_2(\mathbb{J})$, тогда, в силу утверждения 1) предложения 4.1.1, получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_j a_j\delta(x-y_j) + b_j\delta'(x-y_j) \right\|_{H_{-2}}^2 = \sup_{\|g\|_2=1} |(f,g)|^2 = \\
&= \sup_{\|g\|_2=1} \left| \sum_j a_j g(y_j) + b_j g'(y_j) \right|^2 \le \\
&\le 2\left(\sup_{\|g\|_2=1} \sum_j |a_j|^2 \sum_j |g(y_j)|^2 + \sup_{\|g\|_2=1} \sum_j |b_j|^2 \sum_j |g'(y_j)|^2 \right) = \\
&= \frac{1}{(1-e^{-d_1})^2} \left(\|\vec{a}\|_{\ell_2(\mathbb{J})}^2 + \|\vec{b}\|_{\ell_2(\mathbb{J})}^2 \right) < \infty.
\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу утверждения 2) предложения 4.1.1 для любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\ell_2(\mathbb{J})$ существует функция $f(x)$ из $W_2^2(\mathbb{R})$ вида (4.6) такая, что $f(y_j) = a_j$ и $f'(y_j) = b_j$. Положим $g(x) := \dfrac{f(x)}{\|f\|_2}$.

$$\|f_{d/2}\|^2 = |a|^2\xi_1 + |b|^2\xi_2 \ \text{ и } \ \|f''_{d/2}\|^2 = |a|^2\xi_3 + |b|^2\xi_4,$$

где

$$\xi_1 = e^2 d_1 \int\limits_0^1 e^{\frac{2}{x^2-1}} \frac{dx}{(x^2-1)^2} < \infty, \;\; \xi_2 = \frac{e^2 d_1^3}{4} \int\limits_0^1 e^{\frac{2}{x^2-1}} \frac{x^2 dx}{(x^2-1)^2} < \infty,$$

$$\xi_3 = \frac{64e^2}{d_1^5} \int\limits_0^1 e^{\frac{2}{x^2-1}} \frac{(-6x^6-4x^4+6x^2)^2}{(x^2-1)^{10}} dx < \infty,$$
$$\xi_4 = \frac{16e^2}{d_1^3} \int\limits_0^1 e^{\frac{2}{x^2-1}} \frac{(-2x^7-12x^5-2x^3+8x)^2}{(x^2-1)^{10}} dx < \infty,$$

тогда

$$\|f\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \xi_1 + \|\vec{b}\|^2 \xi_2 \;\text{ и }\; \|f''\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \xi_3 + \|\vec{b}\|^2 \xi_4.$$

Пусть $\gamma = 2\max\{\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4\}$, тогда

$$||f||_2^2 = ||f||^2 + ||f''||^2 = (\xi_1+\xi_3)||\vec{a}||^2 + (\xi_2+\xi_4)||\vec{b}||^2 \leq \gamma(||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2).$$

Значит,

$$\sup_{\|g\|_2=1} \left| \sum_j a_j g(y_j) + b_j g'(y_j) \right|^2 \geq \left| \sum_j a_j \frac{\overline{a_j}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{(||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2)}} + b_j \frac{\overline{b_j}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{(||\vec{a}||^2+||\vec{b}||^2)}} \right|^2 =$$
$$= \tfrac{1}{\gamma}\left(||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2\right).$$

Следовательно, система функций $\{\delta(x-y_j),\ \delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ образует базис Рисса подпространства Ω. Отсюда следует, что и системы функций $\{\delta(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ и $\{\delta'(x-y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ образуют базисы Рисса, соответственно в подпространствах Ψ_{-2} и Φ. $\square$

Пусть $\mathcal{F}:\ L_2(\mathbb{R},dx) \to\ L_2(\mathbb{R},dp)$ – преобразование Фурье:

$$\widehat{f}(p) = (\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_R^R f(x) e^{-ipx} dx.$$

Отметим, что

$$(\mathcal{F}\delta_y)(p) = \widehat{\delta}_y(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipy},\ (\mathcal{F}\delta'_y)(p) = \widehat{\delta}'_y(p) = \frac{ipe^{-ipy}}{\sqrt{2\pi}},$$

и преобразование Фурье $\mathcal{F}$ является унитарным отображением. К тому же

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{A}) = \widehat{H}_{+2} = \left\{\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}, dp): \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(p)|^2(p^4+1)dp < \infty\right\},$$

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{A}^{1/2}) = \widehat{H}_{+1} = \left\{\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}, dp): \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(p)|^2(p^2+1)dp < \infty\right\},$$

$$(\widehat{A}^{1/2}\widehat{f})(p) = |p|\widehat{f}(p), \quad (\widehat{A}\widehat{f})(p) = p^2\widehat{f}(p).$$

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{A}') = \left\{\hat{f} \in \widehat{H}_{+2}: \int\limits_{\mathbb{R}} pe^{ipy_j}\hat{f}(p)dp = 0,\ j \in \mathbb{J}\right\},\ (\widehat{A}'\widehat{f})(p) = p^2\widehat{f}(p),$$

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{A}_0) = \left\{\hat{f} \in \widehat{H}_{+2}: \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipy_j}\hat{f}(p)dp = 0,\ j \in \mathbb{J}\right\},\ (\widehat{A}_0\widehat{f})(p) = p^2\widehat{f}(p),$$

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{H}_0) = \left\{\hat{f} \in \widehat{H}_{+2}: \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipy_j}\hat{f}(p)dp = 0,\ \int\limits_{\mathbb{R}} pe^{ipy_j}\hat{f}(p)dp = 0\ j \in \mathbb{J}\right\},$$

$$(\widehat{H}_0\widehat{f})(p) = p^2\widehat{f}(p)$$

Пары операторов $\left\langle\widehat{A}, A\right\rangle$, $\left\langle\widehat{A}', A'\right\rangle$, $\left\langle\widehat{A}_0, A_0\right\rangle$, и $\left\langle\widehat{H_0}, H_0\right\rangle$ являются унитарно эквивалентными, так как $\mathcal{F}A = \widehat{A}\mathcal{F}$. Очевидно, что $\widehat{H}_{+2} = \mathcal{F}H_{+2}$, $\widehat{H}_{+1} = \mathcal{F}H_{+1}$,

$$\widehat{H}_{-1} = \mathcal{F}H_{-1} = \left\{\widehat{f}(p): \quad \tfrac{\hat{f}(p)}{p^2+1} \in \widehat{H}_{+1}\right\},\ ||\widehat{f}(p)||^2_{-1} = \int\limits_{\mathbb{R}} \tfrac{|\widehat{f}(p)|^2}{p^2+1}\,dp,$$

$$\widehat{H}_{-2} = \mathcal{F}H_{-2} = \left\{\widehat{f}(p): \quad \tfrac{\hat{f}(p)}{p^4+1} \in \widehat{H}_{+2}\right\},\ ||\widehat{f}(p)||^2_{-2} = \int\limits_{\mathbb{R}} \tfrac{|\widehat{f}(p)|^2}{p^4+1}\,dp,$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\hat{f} = p^2\hat{f}(p), \quad \widehat{\mathbf{A}}: \quad \widehat{H}_{+1} \to \widehat{H}_{-1}, \quad L_2(\mathbb{R}) \to \widehat{H}_{-2}.$$

Пусть

$$\widehat{\Phi} = \mathcal{F}\Phi, \quad \widehat{\Psi}_{-1} = \mathcal{F}\Psi_{-1}, \quad \widehat{\Psi}_{-2} = \mathcal{F}\Psi_{-2}, \quad \widehat{\Omega} = \mathcal{F}\Omega.$$

Тогда

$$\widehat{\Phi} = \overline{\mathrm{span}}_{\,\widehat{H}_{-2}}\{pe^{-ipy_j},\ j \in \mathbb{J}\}, \quad \widehat{\Psi}_{-2} = \overline{\mathrm{span}}_{\,\widehat{H}_{-2}}\{e^{-ipy_j},\ j \in \mathbb{J}\},$$

$$\widehat{\Psi}_{-1} = \overline{\mathrm{span}}_{\,\widehat{H}_{-1}}\{e^{-ipy_j},\ j \in \mathbb{J}\}, \quad \widehat{\Omega} = \overline{\mathrm{span}}_{\,\widehat{H}_{-2}}\{e^{-ipy_j}, pe^{-ipy_j},\ j \in \mathbb{J}\}.$$

Предложение 5.1.2. *Справедливо следующее равенство:* $\Psi_{-2} = \Psi_{-1}$.

Доказательство. Пусть $f \in \Psi_{-2}$, тогда $f = \sum\limits_k c_k\delta(x - y_k)$, $\vec{c} := \{c_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$. В силу (4.1.2) имеем

$$\|f\|^2_{-1} = \sup_{\|g\|_1=1} |(f,g)|^2 = \sup_{\|g\|_1=1} \left|\sum_{k\in\mathbb{J}} c_k g(y_k)\right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{J}} |c_k|^2 \sup_{\|g\|_1=1} \sum_{k\in\mathbb{J}} |g(y_k)|^2 \leq \tfrac{||\vec{c}||^2}{2(1-e^{-d_1})^2}||g||_2^2 < \infty.$$

Следовательно, $\Psi_{-2} \subset H_{-1}$ и $\Psi_{-2} = \Psi_{-1}$. $\square$

Предложение 5.1.3. *Системы функций* $\{e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{pe^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{pe^{-ipy_j},\ \ e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{J}}$ *и* $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{p^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\left\{\frac{pe^{-ipy_j}}{p^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\left\{\frac{pe^{-ipy_j}}{p^2+1},\ \frac{e^{-ipy_j}}{p^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$ *образуют базисы Рисса подпространств, соответственно,* $\widehat{\Psi}_{-1}$, $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Omega}$ *и* $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_0)$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}')$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{H}_0)$.

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{F}$ унитарно отображает H_{-2} на $\widehat{H}_{-2}$ и в силу предложения (6.2.1) системы $\{e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{pe^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{pe^{-ipy_j},\ e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{J}}$ образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\Psi}_{-1}$, $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Omega}$. Пусть

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}') = \ker(\widehat{A'^*} + I),\ \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_0) = \ker(\widehat{A_0^*} + I),\ \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{H}_0) = \ker(\widehat{H_0^*} + I).$$

Тогда

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}') = (\widehat{\mathbf{A}} + I)^{-1}\widehat{\Phi},\ \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_0) = (\widehat{\mathbf{A}} + I)^{-1}\widehat{\Psi}_{-1}, \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{H}_0) = (\widehat{\mathbf{A}} + I)^{-1}\widehat{\Omega}$$

и $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{p^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\left\{\frac{pe^{-ipy_j}}{p^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\left\{\frac{pe^{-ipy_j}}{p^2+1},\ \frac{e^{-ipy_j}}{p^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{J}}$ образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_0) \subset \widehat{H}_{+1}$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}') \subset \widehat{H}$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{H}_0) \subset \widehat{H}$. $\square$

5.1.4 Трансверсальность расширений Фридрихса и Крейна

Предложение 5.1.4. *Справедливо следующее равенство:* $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $g \in \widehat{\Phi}$, тогда $g(p) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k p e^{-ipy_k}$, $\vec{c} := \{c_j,\ j \in \mathbb{Z}\} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Вектор g лежит в H_{-1} в том и только в том случае, если $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|g(p)|^2}{p^2+1} dp < \infty$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|g(p)|^2}{p^2+1} dp = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{p^2+1} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k p e^{-ipy_k} \right|^2 dp =$$

$$= ||\vec{c}||^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p^2 dp}{p^2+1} + \sum_{k,j\in\mathbb{Z}, k>j} c_k \overline{c}_j \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p^2\left(e^{-ip(y_k-y_j)} + e^{ip(y_k-y_j)}\right)}{p^2+1} dp.$$

Рассмотрим второй интеграл ($a > 0$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p^2\left(e^{-ipa} + e^{ipa}\right)}{p^2+1} dp = 2\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p^2 e^{ipa}}{p^2+1} dp = -2\pi e^{-a}.$$

Значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|g(p)|^2}{p^2+1} dp = ||\vec{c}||^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p^2 dp}{p^2+1} - \pi \sum_{k,j\in\mathbb{Z}, k\neq j} c_k \overline{c}_j e^{-|y_k - y_j|}.$$

Пусть M – оператор в $\ell_2(\mathbb{Z})$ заданый матрицей $\left(e^{-|y_k-y_j|}\right)_{k,j\in\mathbb{Z},k\neq j}$. Оператор M является ограниченным в $\ell_2(\mathbb{Z})$, так как является эрмитовым и удовлетворяет тесту Шура [96]

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |M_{kj}| = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-|y_k-y_j|} \leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-d_1|k-j|} <$$

$$< 2 \cdot \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-d_1 n} = \frac{2}{1-e^{-d_1}} < \infty.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k,j\in\mathbb{Z},k\neq j} c_k \overline{c}_j e^{-|y_k-y_j|} \right| = \left| ((M-I)\vec{c}, \vec{c})_{\ell_2(\mathbb{Z})} \right| < \infty.$$

Поскольку $\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{p^2 dp}{p^2+1} = +\infty$, то $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|g(p)|^2}{p^2+1} dp = +\infty$. То есть g не лежит в $\widehat{H}_{-1}$, следовательно $\widehat{\Phi} \cap \widehat{H}_{-1} = \{0\}$ и $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$. $\square$

Поскольку $\Phi \cap H_{-1} = \{0\}$, то в силу предложения 1.5.1 справедливо следующее

Следствие 5.1.5. *Оператор A является фридрихсовым расширением оператора A'.*

Предложение 5.1.6. *Расширения Фридрихса и Крейна операторов H_0, A', A_0 являются трансверсальными.*

Доказательство. 1) Пусть $u(p) \in \widehat{\Phi}$, тогда $u(p) = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} b_j p e^{-ipy_j}$, $\vec{b} = \{b_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$. По предложению 1.5.2, исходя из следствия 5.1.5, A'_F и A'_K трансверсальны, в том и только в том случае, если $\widehat{\Phi} \subset \widehat{\mathbf{A}}^{1/2} \widehat{H}_{-1}$. Функция $u(p)$ лежит в $\widehat{\mathbf{A}}^{1/2} \widehat{H}_{-1}$ в том случае, если существует $f(p) \in \widehat{H}_{-1}$ такой, что $u(p) = |p| f(p)$, то есть $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|u(p)|^2}{p^2(p^2+1)} dp < \infty$. В силу предложения 6.2.2

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|u(p)|^2}{p^2(p^2+1)} dp = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{p^2+1} \left| \sum_{j\in\mathbb{J}} b_j e^{-ipy_j} \right|^2 dp < \infty.$$

Значит, A'_F и A'_K трансверсальны.

2) Пусть $w(p) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_0)$, тогда $w(p) = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} \frac{a_j e^{-ipy_j}}{p^2+1}$, $\vec{a} = \{a_j,\ j \in \mathbb{J}\} \in \ell_2(\mathbb{J})$. По предложению 6.2.2

$$\sup_{f\in \operatorname{dom}(\widehat{A}_0)} \frac{|(\widehat{A}_0 f, w)|^2}{(\widehat{A}_0 f, f)} = \sup_{f\in \operatorname{dom}(\widehat{A}_0)} \frac{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} p^2 f(p)\overline{w(p)}dp\right|^2}{\int\limits_{\mathbb{R}} p^2 |f(p)|^2 dp} \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} p^2 |w(p)|^2 dp = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j\in\mathbb{J}} \frac{a_j p e^{-ipy_j}}{p^2+1} \right|^2 dp < \infty,$$

значит, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_0) \subset \operatorname{dom}(\widehat{A}_{0K}^{1/2})$. По теореме 1.2.11 операторы A_{0K} и A_{0F} трансверсальны.

3) Пусть $s(p) \in \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{H}_0)$, тогда $s(p) = \sum\limits_{j\in\mathbb{J}} a_j \frac{e^{-ipy_j}}{p^2+1} + b_j \frac{pe^{-ipy_j}}{p^2+1}$ и

$$\sup_{f\in \operatorname{dom}(\widehat{H}_0)} \frac{|(f,s)|^2}{(\widehat{H}_0 f, f)} = \sup_{f\in \operatorname{dom}(\widehat{H}_0)} \frac{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(p)\overline{s(p)}dp\right|^2}{\int\limits_{\mathbb{R}} p^2|f(p)|^2 dp} \leq$$

$$\leq \sup_{f\in \operatorname{dom}(\widehat{H}_0)} \left(\frac{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} p^2 f(p)\overline{v(p)}dp\right|^2}{\int\limits_{\mathbb{R}} p^2|f(p)|^2 dp} + \frac{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} p^2 f(p)\overline{w(p)}dp\right|^2}{\int\limits_{\mathbb{R}} p^2|f(p)|^2 dp} \right) < \infty,$$

так как пары операторов A_{0K} и A_{0F}, A'_F и A'_K трансверсальны, где $v(p) := (\widehat{\mathbf{A}}+I)^{-1}u(p)$. Тогда $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{H}_0) \subset \operatorname{ran}(\widehat{H}_{0F}^{1/2})$ и по предложению 1.5.2 операторы H_{0F} и H_{0K} трансверсальны. □

5.1.5 Базисные граничные тройки и описание всех неотрицательных самосопряженных расширений операторов A_0, A' и H_0.

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ плотно определенный неотрицательный симметрический оператор $\mathcal{L}_0$ (5.7), оператор $\mathcal{L}$ (5.8) является его неотрицательным самосопряженным расширением, а сопряженный $\mathcal{L}_0^*$ определяется равенствами (5.9).

В следующих утверждениях для операторов A'^*, A_0^* и H_0^* построены базисные граничные тройки и описаны все неотрицательные самосопряженные расширения операторов A', A_0 и H_0, с помощью абстрактных граничных условий.

Предложение 5.1.7. *Пусть*

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathbb{C}^m, & Y \text{ состоит из } \quad m \quad \text{точек}, \\ \ell_2(\mathbb{J}), & Y \text{ бесконечно}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\Gamma) = W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y), \quad \Gamma u = \{u(y_j+0) - u(y_j-0),\ j \in \mathbb{J}\}, \\ &\mathrm{dom}\,(G) = W_2^1(\mathbb{R}), \qquad\quad Gf = \{-if(y_j),\ j\in\mathbb{J}\}. \end{aligned}$$

Тогда

(i) $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ *– граничная тройка для пары операторов* $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0^*$*;*

(ii) граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, G\mathcal{L}_0^*\}$ *является базисной для* A'^**, где* $G\mathcal{L}_0^*$ *определяется отношением*

$$G\mathcal{L}_0^* f = \{f'(y_j),\ j \in \mathbb{J}\},\ f \in \mathrm{dom}\,(A'^*);$$

(iii) отображение

$$\begin{aligned} &\Theta \mapsto A'_\Theta = A'^* \upharpoonright \{f \in \mathrm{dom}\,(A'^*):\ (\{f(y_j+0) - f(y_j-0),\ j\in\mathbb{J}\}, \\ &\{f'(y_j),\ j\in\mathbb{J}\}) \in \Theta\} \end{aligned}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями оператора A' *и всеми неотрицательными самосопряженными линейными отношениями* Θ *в* $\mathcal{H}$*.*

Доказательство. По определению граничной тройки для пары операторов $L_1 \subset L_2$, где $L_1 = \mathcal{L},\ L_2 = \mathcal{L}_0^*$ получаем:

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\Gamma) = \mathrm{dom}\,(L_2) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) = W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y), \\ &\ker(\Gamma) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Также

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(G) = \mathrm{dom}\,(L_1^*) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}), \\ &\ker(G) = \mathrm{dom}\,(L_2^*) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) = \{u \in W_2^1(\mathbb{R}):\ u(y) = 0,\ y \in Y\}. \end{aligned}$$

В силу следствия 4.1.2 получаем, что $\mathrm{ran}\,(G) = \mathcal{H}$, из предложения 4.1.3 – $\mathrm{ran}\,(\Gamma) = \mathcal{H}$.

Справедливо тождество Грина:

$$(L_1^*f,u)-(f,L_2u)=\int\limits_{\mathbb{R}} if'(x)\overline{u(x)}dx-\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{iu'(x)}dx=$$
$$=i\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{u}(x)df(x)-f(x)d\overline{u}(x).$$

В случае, когда $\mathbb{J}=\mathbb{Z}$, получаем:

$$(L_1^*f,u)-(f,L_2u)=i\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\limits_{y_j+0}^{y_{j+1}-0}\overline{u}(x)df(x)-f(x)d\overline{u}(x)=$$
$$=i\sum_{j\in\mathbb{Z}}f(x)\overline{u(x)}\Big|_{y_j+0}^{y_{j+1}-0}=i\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(f(y_{j+1})\overline{u}(y_{j+1}-0)-f(y_j)\overline{u}(y_j+0)\right)=$$
$$=i\sum_{j\in\mathbb{Z}}f(y_j)\left(\overline{u}(y_j-0)-\overline{u}(y_j+0)\right)=$$
$$=-i\sum_{j\in\mathbb{Z}}f(y_j)\overline{(u(y_j+0)-u(y_j-0))}=(Gf,\Gamma u)_{\mathcal{H}}.$$

Если множество точек Y ограничено слева, то есть $\inf\{Y\}=y_1>-\infty$, положим $y_0=-\infty$, тогда

$$(L_1^*f,u)-(f,L_2u)=i\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{y_j+0}^{y_{j+1}-0}\overline{u}(x)df(x)-f(x)d\overline{u}(x)=$$
$$=i\sum_{j=0}^{\infty}f(x)\overline{u(x)}\Big|_{y_j+0}^{y_{j+1}-0}=i\sum_{j=0}^{\infty}\left(f(y_{j+1})\overline{u}(y_{j+1}-0)-f(y_j)\overline{u}(y_j+0)\right)=$$
$$=i\sum_{j=1}^{\infty}f(y_j)\left(\overline{u}(y_j-0)-\overline{u}(y_j+0)\right)=$$
$$=-i\sum_{j=1}^{\infty}f(y_j)\overline{(u(y_j+0)-u(y_j-0))}=(Gf,\Gamma u)_{\mathcal{H}}.$$

В случае, когда Y конечно, $Y=\{y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m\}$, и $y_1=\inf\{Y\}>-\infty$, $y_m=\sup\{Y\}<+\infty$, положим $y_0=-\infty$ и $y_{m+1}=+\infty$, тогда

$$(L_1^*f,u)-(f,L_2u)=i\sum_{j=0}^{m}\int\limits_{y_j+0}^{y_{j+1}-0}\overline{u}(x)df(x)-f(x)d\overline{u}(x)=$$
$$=i\sum_{j=0}^{m}f(x)\overline{u(x)}\Big|_{y_j+0}^{y_{j+1}-0}=i\sum_{j=0}^{m}\left(f(y_{j+1})\overline{u}(y_{j+1}-0)-f(y_j)\overline{u}(y_j+0)\right)=$$
$$=i\sum_{j=1}^{m}f(y_j)\left(\overline{u}(y_j-0)-\overline{u}(y_j+0)\right)=$$
$$=-i\sum_{j=1}^{m}f(y_j)\overline{(u(y_j+0)-u(y_j-0))}=(Gf,\Gamma u)_{\mathcal{H}}.$$

По предложениям 4.1.2 и 4.1.3 операторы Γ и G ограничены. Значит, тройка $\{\mathcal{H},G,\Gamma\}$ является граничной для пары операторов $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}_0^*$.

Поскольку $\ker(\mathcal{L}) = \{0\}$, и применяя теорему 2.1.4 получаем утверждения (ii) и (iii). $\square$

Предложение 5.1.8. *Пусть*

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathbb{C}^m, \; Y \textit{ состоит из } \; m \; \textit{ точек}, \\ \ell_2(\mathbb{J}), \qquad Y \quad \textit{бесконечно}, \end{cases}$$

$$\operatorname{dom}(\Gamma) = W_2^1(\mathbb{R}), \;\; \Gamma u = \{u(y_j), \; j \in \mathbb{J}\},$$
$$\operatorname{dom}(G) = W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y), \;\; Gf = \{-i(f(y_j+0) - f(y_j-0)), \; j \in \mathbb{J}\},$$

тогда

(i) $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ *– граничная тройка для пары операторов* $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$*;*

(ii) тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, GP_{\overline{\operatorname{ran}}(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}\}$ *является базисной для оператора* A_0^**, где*
$GP_{\overline{\operatorname{ran}}(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}f =$
$= \left\{ f'(y_j+0) - f'(y_j-0) - \frac{f(y_{j+1}-0) - f(y_j+0)}{y_{j+1}-y_j} + \frac{f(y_j-0)-f(y_{j-1}+0)}{y_j - y_{j-1}}, \; j \in \mathbb{J} \right\},$
$f \in \operatorname{dom}(A_0^*)$;

(iii) отображение

$$\Theta \mapsto A_{0\Theta} = A_0{}^* \restriction \Big\{ f \in \operatorname{dom}(A_0{}^*) : \; \Big(\{f(y_j), \; j \in \mathbb{J}\},$$
$$\Big\{ f'(y_j+0) - f'(y_j-0) - \tfrac{f(y_{j+1}-0)-f(y_j+0)}{y_{j+1}-y_j} + \tfrac{f(y_j-0)-f(y_{j-1}+0)}{y_j-y_{j-1}}, \; j \in \mathbb{J} \Big\} \Big) \in \Theta \Big\}$$

устанавливает взимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженным расширениями оператора A_0 *и всеми неотрицаетльными самосопряженными линейными отношениями* Θ *в* $\mathcal{H}$*.*

Доказательство. По определению граничной тройки для пары операторов $L_1 \subset L_2$, где $L_1 = \mathcal{L}_0, \; L_2 = \mathcal{L}$ получаем:

$$\operatorname{dom}(\Gamma) = \operatorname{dom}(L_2) = \operatorname{dom}(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}),$$
$$\operatorname{dom}(G) = \operatorname{dom}(L_1^*) = \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0^*) = W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y).$$

Также

$$\ker(\Gamma) = \operatorname{dom}(L_1) = \operatorname{dom}(\mathcal{L}_0) = \{u \in W_2^1(\mathbb{R}) : \;\; u(y_j) = 0, \; j \in \mathbb{J}\},$$
$$\ker(G) = \operatorname{dom}(L_2^*) = \operatorname{dom}(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}).$$

В силу следствия 4.1.2 получаем, что $\operatorname{ran}(\Gamma) = \mathcal{H}$, из предложения 4.1.3 – $\operatorname{ran}(G) = \mathcal{H}$.

Справедливо тождество Грина, так как

$$\begin{aligned}
&(L_1^* f, u) - (f, L_2 u) = \int_{\mathbb{R}} i f'(x)\overline{u(x)}dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{iu'(x)}dx = \\
&= i\sum_{j\in\mathbb{J}}\left(\int_{y_j+0}^{y_{j+1}-0} f'(x)\overline{u(x)}dx + \int_{y_j+0}^{y_{j+1}-0} f(x)\overline{u'(x)}dx\right) = \\
&= i\sum_{j\in\mathbb{J}} f(x)\overline{u(x)}\Big|_{y_j+0}^{y_{j+1}-0} = -i\sum_{j\in\mathbb{J}}\left(f(y_j+0) - f(y_j-0)\right)\overline{u(y_j)} = \\
&= (Gf, \Gamma u)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

В силу предложений 4.1.2 и 4.1.3 операторы Γ и G ограничены. Значит, тройка $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ является граничной для пары операторов $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$.

Пусть $f \in \operatorname{dom}(A_0^*) = W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(\mathbb{R}\setminus Y)$, тогда

$$GP_{\overline{\operatorname{ran}}(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}f(x) = G\left(if'(x) - i\sum_{j\in\mathbb{J}}\frac{1}{d_j}(f(y_{j+1}-0) - f(y_j+0))\chi_j(x)\right) =$$

$$= \left\{ f'(y_j+0) - \frac{1}{d_j}\left(f(y_{j+1}-0) - f(y_j+0)\right) - \right.$$

$$\left. -f'(y_j-0) + \frac{1}{d_{j-1}}\left(f(y_j-0) - f(y_{j-1}+0)\right),\ \ j\in\mathbb{J} \right\}$$

Из теоремы 2.1.4 получаем утверждения (ii) и (iii). □

Предложение 5.1.9. *Пусть*

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathbb{C}^{2m}, & Y \text{ состоит из } m \text{ точек}, \\ \ell_2(\mathbb{J})\otimes\mathbb{C}^2, & Y \text{ бесконечно}, \end{cases}$$

$$\operatorname{dom}(\Gamma) = W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y),\ \ \Gamma u = \{(u(y_j-0), u(y_j+0)),\ j\in\mathbb{J}\},$$
$$\operatorname{dom}(G) = W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y),\ \ Gf = \{(if(y_j-0), -if(y_j+0)),\ j\in\mathbb{J}\}.$$

Тогда

(i) $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ *– граничная тройка для пары операторов* $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0^*$*;*

(ii) тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma, GP_{\overline{\operatorname{ran}}(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}_0^*\}$ *является базисной для* H_0^**, где*

$$\begin{aligned}
&GP_{\overline{\operatorname{ran}}(\mathcal{L}_0)}\mathcal{L}_0^* f = \\
&= \left\{\left(-f'(y_j-0) + \tfrac{f(y_j-0)-f(y_{j-1}+0)}{y_j-y_{j-1}}, f'(y_j+0) - \tfrac{f(y_{j+1}-0)-f(y_j+0)}{y_{j+1}-y_j}\right),\ j\in\mathbb{J}\right\}, \\
&f\in\operatorname{dom}(H_0^*);
\end{aligned}$$

(iii) отображение

$$\Theta \mapsto H_{0\Theta} = H_0{}^* \upharpoonright \Big\{ f \in \mathrm{dom}\,(H_0{}^*) : \Big\{ \Big(f(y_j-0), f(y_j+0) \Big),\ j \in \mathbb{J} \Big\},$$
$$\Big\{ \Big(-f'(y_j-0) + \tfrac{f(y_j-0)-f(y_{j-1}+0)}{y_j-y_{j-1}}, f'(y_j+0) - \tfrac{f(y_{j+1}-0)-f(y_j+0)}{y_{j+1}-y_j} \Big),\ j \in \mathbb{J} \Big\} \in \Theta \Big\}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями оператора H_0 и всеми неотрицательными самосопряженными линейными отношениями Θ в $\mathcal{H}$.

Доказательство. По определению граничной тройки для пары операторов $L_1 = \mathcal{L}_0 \subset L_2 = \mathcal{L}_0^*$ получаем:

$$\mathrm{dom}\,(\Gamma) = \mathrm{dom}\,(L_2) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) = W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y),$$
$$\mathrm{dom}\,(G) = \mathrm{dom}\,(L_1^*) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0^*) = W_2^1(\mathbb{R}\setminus Y).$$

Также

$$\ker(\Gamma) = \mathrm{dom}\,(L_1) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0) = \{u \in W_2^1(\mathbb{R}) :\quad u(y_j) = 0,\ j \in \mathbb{J}\},$$
$$\ker(G) = \mathrm{dom}\,(L_2^*) = \mathrm{dom}\,(\mathcal{L}_0).$$

В силу следствия 4.1.2 получаем, что $\mathrm{ran}\,(\Gamma) = \mathcal{H}$ и $\mathrm{ran}\,(G) = \mathcal{H}$.

Справедливо тождество Грина, так как

$$(L_1^* f, u) - (f, L_2 u) = i \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{u}(x)df(x) + f(x)d\overline{u}(x) =$$
$$= i \sum_{j\in\mathbb{J}} \left(\int\limits_{y_j+0}^{y_{j+1}-0} \overline{u}(x)df(x) + f(x)d\overline{u}(x) \right) = i \sum_{j\in\mathbb{J}} f(x)\overline{u(x)}\,\Big|_{y_j+0}^{y_{j+1}-0} =$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{J}} \Big(\overline{u(y_j-0)} i f(y_j-0) - i f(y_j+0)\overline{u(y_j+0)} \Big) = (Gf, \Gamma u)_{\mathcal{H}}.$$

В силу предложений 4.1.2 и 4.1.3 операторы Γ и G ограничены. Значит, тройка $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ является граничной для пары операторов $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0^*$.

Пусть $f \in \mathrm{dom}\,(H_0^*) = W_2^2(\mathbb{R}\setminus Y)$, тогда

$$GP_{\overline{\mathrm{ran}}\,(\mathcal{L}_0)} \mathcal{L}_0^* f(x) = G \left(i f'(x) - i \sum_{j\in\mathbb{J}} \frac{1}{d_j} (f(y_{j+1}-0) - f(y_j+0)) \chi_j(x) \right) =$$

$$= \Big\{ \Big(-f'(y_j-0) + \frac{1}{d_{j-1}} (f(y_j-0) - f(y_{j-1}+0)),$$

$$f'(y_j+0)-\frac{1}{d_j}\left(f(y_{j+1}-0)-f(y_j+0)\right)\Big),\ \ j\in\mathbb{J}.\Big\}$$

Из теоремы 2.1.4 получаем утверждения (ii) и (iii). $\square$

Другая граничная тройка для H_0^* была предложена в [18] и [81].

5.2 m-аккретивные гамильтонианы соответствующие конечному числу δ' взаимодействий

Пусть $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}\subset\mathbb{R}$. Рассмотрим линейный оператор A' определенный формулами (5.3). Пусть $\mathcal{F}$, как и выше, преобразование Фурье и $\widehat{A'}=\mathcal{F}A'\mathcal{F}^{-1}$. Обозначим $e_j(p)=p\frac{\exp(-ipy_j)}{1+p^4}, j=1,...,m$, тогда

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathfrak{N}}_F=(\widehat{\mathbf{A}}^2+I)^{-1}\widehat{\Phi}=\operatorname{span}\{e_1(p),...,e_m(p)\},\\&\widehat{\mathfrak{M}}_F=\operatorname{span}\{p^2e_1(p),...,p^2e_m(p)\}.\end{aligned}$$

Сопряженный оператор $\widehat{A}'^*$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\operatorname{dom}(\widehat{A}'^*)=\operatorname{dom}(\widehat{A}')\dotplus\widehat{\mathfrak{N}}_F\dotplus\widehat{\mathfrak{M}}_F=\widehat{H}_2(\mathbb{R})\dotplus\widehat{\mathfrak{M}}_F,\\&\widehat{A}'^*(\hat f(p)+\sum_{j=1}^m\lambda_jp^2e_j(p))=p^2\hat f(p)-\sum_{j=1}^m\lambda_je_j(p),\\&\hat f(p)\in\widehat{H}_2(\mathbb{R}),(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\mathbb{C}^m.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}&\operatorname{dom}(\widehat{A}'^{1/2})=\widehat{H}_1(\mathbb{R}):=L^2(\mathbb{R},(p^2+1)dp),\\&(\widehat{A}'^{1/2}\hat f)(p)=|p|\hat f(p),\hat f(p)\in\widehat{H}_1(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

то

$$\widehat{A}'^{-1/2}e_j(p)=\frac{p\exp(-ipy_j)}{|p|(1+p^4)}\in\widehat{H}_1(\mathbb{R}),j=1,...,m.$$

Пусть $\hat\varphi\in\widehat{\Phi}$, тогда $\hat\varphi(p)=\sum\limits_{j=1}^m a_jpe^{-ipy_j},\ a_j\in\mathbb{C},\ j=1,...m$. Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^m a_jpe^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(p^2+1)}dp\le\pi\left|\sum_{j=1}^m a_j\right|^2<\infty,$$

то $\hat\varphi\in\widehat{\mathbf{A}}^{1/2}\widehat{H}_{-1}$, то есть $\widehat{\Phi}\subset\widehat{\mathbf{A}}^{1/2}\widehat{H}_{-1}$. Следовательно, по теореме 1.5.2 операторы $\widehat{A}'$ и $\widehat{A}'_K$ трансверсальны и $\widehat{\mathfrak{N}}_F=\widehat{\mathfrak{N}}_0=\widehat{\mathfrak{N}}_F\cap\operatorname{ran}(\widehat{A}'^{1/2})$. Пусть

$$\mathcal{W}_0=||\omega_{kj}||_{k,j=1}^m,\ \mathcal{G}=||g_{kj}||_{k,j=1}^m,$$

где

$$g_{kj} = (e_k(p), e_j(p))_+ = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|p|^2 e^{-ip(y_k-y_j)}}{1+p^4} dp =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp(-\tfrac{|y_k-y_j|}{\sqrt{2}})(\cos \tfrac{|y_k-y_j|}{\sqrt{2}} - \sin \tfrac{|y_k-y_j|}{\sqrt{2}}),$$

и

$$\omega_{kj} = (A_F^{1/2} e_k(p), A_F^{1/2} e_j(p)) + (A_F^{-1/2} e_k(p), A_F^{-1/2} e_j(p)) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ip(y_k-y_j)}}{1+p^4} dp = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp(-\tfrac{|y_k-y_j|}{\sqrt{2}})(\cos \tfrac{|y_k-y_j|}{\sqrt{2}} + \sin \tfrac{|y_k-y_j|}{\sqrt{2}}).$$

По предложению 3.2.1 мы получаем описание в импульсном виде 1) всех m-аккретивных квази-самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора $\widehat{A}'$, 2) всех m-секториальных квази-самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора $\widehat{A}'$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dom}\,(\widetilde{A}) = \left\{ \hat{\varphi}(p) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j(p) + \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj} \lambda_k p^2 e_j(p) \right\}, \\
&\hat{\varphi}(p) \in \mathrm{dom}\,(A), (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^m, \\
&\widetilde{A} \left(\hat{\varphi}(p) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j(p) + \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj} \lambda_k p^2 e_j(p) \right) = \\
&= p^2 \hat{\varphi}(p) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p^2 e_j(p) - \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj} \lambda_k e_j(p),
\end{aligned}$$

где матрицы $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^m$ удовлетворяют соответственно условиям:

$$1) \mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^* \geq 2\mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*,$$

$$2) \begin{cases} \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) + i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*, \\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) - i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*. \end{cases}$$

В случае одноточечного взаимодействия, $m = 1$, мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dom}\,(\widetilde{A}) = \left\{ \hat{\varphi}(p) + \lambda \tfrac{(1+up^2)\exp(-ipy)}{1+p^4} \right\}, \\
&\widetilde{A} \left(\hat{\varphi}(p) + \lambda \tfrac{(1+up^2)\exp(-ipy)}{1+p^4} \right) = p^2 \hat{\varphi}(p) + \lambda p \tfrac{(p^2-u)\exp(-ipy)}{1+p^4}, \\
&\hat{\varphi}(p) \in \mathrm{dom}\,(A),\ \lambda \in \mathbb{C},\ y \in \mathbb{R}, \\
&(\mathrm{Re}\,u - \tfrac{1}{2})^2 + (\mathrm{Im}\,u)^2 \leq \tfrac{1}{4} \quad \text{- для m-аккретивных расширений,} \\
&(\mathrm{Re}\,u - \tfrac{1}{2})^2 + (\mathrm{Im}\,u \pm \tfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{2})^2 \leq \tfrac{1}{4\sin^2\alpha} \quad \text{- для m-секториальных расширений.}
\end{aligned}$$

Проводя обратные преобразования Фурье, получаем:

$$\mathcal{F}^{-1} e_j(p) = g_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p \exp(ip(x-y_j))}{1+p^4} dp =$$
$$= i\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \exp\left(-\tfrac{|x-y_j|}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\tfrac{|x-y_j|}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathcal{F}^{-1}A_F e_j(p) = h_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{p^3 \exp(ip(x-y_j))}{1+p^4} dp =$$
$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y_j|}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{|x-y_j|}{\sqrt{2}}\right).$$

Теорема 5.2.1. *Пусть оператор A' задан формулами (5.3). Тогда следующие формулы*

$$\mathrm{dom}\,(\widetilde{A}') = \left\{ f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj}\lambda_k h_j(x) \right\},$$
$$f_0(x) \in \mathrm{dom}\,(A'), (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^m,$$
$$\widetilde{A}' \left(f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj}\lambda_k h_j(x) \right) =$$
$$= -\frac{d^2}{dx^2} f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x) - \sum_{k,j=1}^{m} u_{kj}\lambda_k g_j(x),$$

описывают взаимно однозначное соответствие между

1) *всеми m-аккретивными квази-самосопряженными расширениями $\widetilde{A}'$ оператора A' и всеми матрицами $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^m$ удовлетворяющими условию:*
$$\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^* \geq 2\mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*,$$

2) *всеми m-секториальными квази-самосопряженными расширениями $\widetilde{A}'$ оператора A' и всеми матрицами $\mathcal{U} = ||u_{kj}||_{k,j=1}^m$ удовлетворяющими условию:*
$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) + i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*, \\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (\mathcal{U}\mathcal{G} + \mathcal{G}\mathcal{U}^*) - i(\mathcal{U}\mathcal{G} - \mathcal{G}\mathcal{U}^*) \geq 2\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathcal{U}\mathcal{W}_0\mathcal{U}^*. \end{cases}$$

В случае одноточечного взаимодействия, $m = 1$:

$$\mathrm{dom}\,(\widetilde{A}') = \left\{ f_0(x) + \lambda \exp\left(-\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right) \left(\sin\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} + u\cos\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right) \right\},$$
$$f_0(x) \in \mathrm{dom}\,(A'), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad y \in \mathbb{R},$$
$(\mathrm{Re}\, u - \frac{1}{2})^2 + (\mathrm{Im}\, u)^2 \leq \frac{1}{4}$ - *для m-аккретивных расширений,*
$(\mathrm{Re}\, u - \frac{1}{2})^2 + (\mathrm{Im}\, u \pm \frac{\cot\alpha}{2})^2 \leq \frac{1}{4\sin^2\alpha}$ *для m-секториальных расширений*
$$\widetilde{A}' \left(f_0(x) + \lambda \exp\left(-\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right) \left(\sin\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} + u\cos\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right) \right) =$$
$$= -\frac{d^2}{dx^2} f_0(x) + \lambda \exp\left(-\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right) \left(\cos\frac{|x-y|}{\sqrt{2}} - u\sin\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right).$$

Выводы к главе 5

В данном разделе исследуются свойства минимальных операторов Шрёдингера A_0, A' и H_0 с δ, δ' и $\delta - \delta'$ потенциалами (5.2)-(5.4).

- Дано представление операторов A_0, A' и H_0, и сопряженных к ним, в дивергентной форме, и описаны их экстремальные расширения Фридрихса и Крейна (также в дивергентной форме).

- При условии, что последовательность точек $Y = \{y_j \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет условию (5.1), доказано, что системы дельта-функций Дирака $\{\delta(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$, $\{\delta'(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}}$ и $\{\delta(x - y_j),\ \delta'(x - y_j)\}_{j\in\mathbb{J}},\ x \in \mathbb{R}$ – образуют базисы Рисса в своих линейных оболочках в негативных пространствах Соболева.

- Доказана трансверсальность расширений Крейна и Фридрихса, построены базисные граничные тройки и дано описание всех неотрицательных самосопряженных расширений операторов A_0, A' и H_0, соответственно, в терминах граничных троек.

- Дано описание во внутренних терминах всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных гамильтонианов соответствующих конечному числу δ' взаимодействий на прямой.

Глава 6

2D и 3D неотрицательные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями

Применяя подход описания неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательных симметрических операторов во внутренних терминах, предложенный Ю.Арлинским и Э.Цекановским [60], мы начинаем главу с описания всех неотрицательных гамильтонианов, соответствующих конечному числу точечных взаимодействий на плоскости.

Далее, используя связь пространств Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ и $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2,\ 3$, с гильбертовым пространством ℓ_2, доказанную в 4 главе, мы показываем, что системы дельта-функций Дирака $\{\delta(x-y),\ y \in Y\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, где Y – несходящаяся конечная или бесконечная последовательность точек в $\mathbb{R}^d$, $d = 2,\ 3$, образуют базисы Рисса в своих линейных оболочках в пространствах $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, соответственно.

Исходя из базисности Рисса систем дельта-функций Дирака, мы исследуем свойства дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса $(A_{Y,d})_F$ и Крейна $(A_{Y,d})_K$ минимальных операторов Шрёдингера $A_{Y,d}$, $d = 2,\ 3$, определенных формулами (6.4). А именно, мы доказываем, что в двухмерном случае расширения Фридрихса и Крейна дизъюнктны, но не трансверсальны, в трехмерном случае мы устанавливаем критерий трансверсальности расширений Фридрихса и Крейна.

В последней секции мы строим унифицированную конструкцию граничных троек для $A_{Y,d}^*$ для обоих случаев $d = 2$ и $d = 3$, а также γ-поле и функцию Вейля. Используя свойства функции Вейля мы даем еще одно доказательство свойств дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса $(A_{Y,d})_F$ и Крейна $(A_{Y,d})_K$, доказанных в предыдущей секции.

6.1 Неотрицательные 2D гамильтонианы соответствующие конечному числу точечных взаимодействий

Пусть $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\} \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим линейный оператор:

$$A_{Y,2} = -\Delta, \ \ \mathrm{dom}\,(A_{Y,2}) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^2) : f(y_j) = 0, j = 1, ..., m\}. \tag{6.1}$$

Оператор $A_{Y,2}$ является неотрицательным плотно определенным замкнутым и симметрическим с индексами дефекта $\langle m, m \rangle$. Его фридрихсово расширение это свбодный гамильтониан:

$$\mathrm{dom}\,(A_2) = W_2^2(\mathbb{R}^2), \quad A_2 = -\Delta.$$

Пусть $\mathcal{F}:\ L^2(\mathbb{R}^2, dx) \to L^2(\mathbb{R}^2, dp)$ – преобразование Фурье:

$$\hat{f}(p) = (\mathcal{F}f)(p) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x|<R} f(x) e^{-ipx} dx$$

В импульсном представлении мы получаем неотрицательный симметрический оператор $\widehat{A}_{Y,2}$ и его фридрихсово расширение $\widehat{A}_2$:

$$\mathrm{dom}\,(\widehat{A}_{Y,2}) = \left\{ \hat{h}(p) \in L^2(\mathbb{R}^2, dp) : \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(p) \exp(ipy_j) dp = 0, j = 1, ..., m \right\},$$
$$(\widehat{A}_{Y,2}\hat{h})(p) = |p|^2 \hat{h}(p),\ \hat{h}(p) \in \mathrm{dom}\,(\widehat{A}_{Y,2}),$$

$$\begin{gathered} \mathrm{dom}\,(\widehat{A}_2) = \widehat{H}_2(\mathbb{R}^2) := L^2(\mathbb{R}^2, (|p|^4+1)dp), \\ (\widehat{A}_2\hat{h})(p) = |p|^2\hat{h}(p),\ \hat{h}(p) \in \mathrm{dom}\,(\widehat{A}_2), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \mathrm{dom}\,(\widehat{A}_2^{1/2}) = \widehat{H}_1(\mathbb{R}^2) := L^2(\mathbb{R}^2, (|p|^2+1)dp), \\ (\widehat{A}_2^{1/2}\hat{h})(p) = |p|\hat{h}(p),\ \hat{h}(p) \in \mathrm{dom}\,(\widehat{A}_2^{1/2}). \end{gathered}$$

Пусть

$$\widehat{\Phi}_2 = \mathrm{span}\,\{\exp(-ipy_j),\ j = 1, ..., m\}$$

$$e_j(p) = \frac{\exp(-ipy_j)}{1+|p|^4},\ j = 1, ..., m,$$

и

$$\gamma_j(p) = \frac{\exp(-ipy_j) - \exp(-ipy_1)}{1+|p|^4},\ j = 2, ..., m,$$

тогда

$$\widehat{\mathfrak{N}}_F = \mathrm{span}\,\{e_1(p), ..., e_m(p)\},\ \ \widehat{\mathfrak{M}}_F = \mathrm{span}\,\{|p|^2 e_1(p), ..., |p|^2 e_m(p)\}.$$

Сопряженный оператор $\widehat{A}^*_{Y,2}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\,(\widehat{A}^*_{Y,2}) = \mathrm{dom}\,(\widehat{A}_{Y,2}) \dotplus \widehat{\mathfrak{N}}_F \dotplus \widehat{\mathfrak{M}}_F = \widehat{H}_2(\mathbb{R}^2) \dotplus \widehat{\mathfrak{M}}_F, \\ &\widehat{A}^*_{Y,2}(\hat{f}(p) + \sum_{j=1}^m \lambda_j |p|^2 e_j(p)) = |p|^2 \hat{f}(p) - \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j(p), \\ &\hat{f}(p) \in \widehat{H}_2(\mathbb{R}^2), (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{C}^m. \end{aligned}$$

Поскольку $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1+|p|^2}{|p|^2(1+|p|^4)^2}dp = 2\pi\int\limits_0^\infty \frac{1+\rho^2}{\rho(1+\rho^4)^2}d\rho = \infty$, то

$$\widehat{A}_2^{-1/2}e_j(p) = \frac{\exp(-ipy_j)}{|p|(1+|p|^4)} \notin H_1(\mathbb{R}^2),\ j = 1, ..., m.$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|e^{-ipy_j}-e^{-ipy_1}\right|^2}{|p|^2(1+|p|^4)^2}(1+|p|^2)dp = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|e^{-ip(y_j-y_1)}-1\right|^2}{|p|^2(1+|p|^4)^2}(1+|p|^2)dp =$$
$$= 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^\infty \frac{\left|e^{-i\rho|y_j-y_1|\cos\varphi}-1\right|^2}{\rho(1+\rho^4)^2}(1+\rho^2)d\rho =$$
$$= 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^\infty \left[\frac{\left|e^{-i\rho|y_j-y_1|\cos\varphi}-1\right|^2}{\rho(1+\rho^4)} + \frac{\left|e^{-i\rho|y_j-y_1|\cos\varphi}-1\right|^2\rho(1-\rho^2)}{(1+\rho^4)^2}\right]d\rho \le$$
$$\le 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^\infty \left[\frac{\left|e^{-i\rho|y_j-y_1|\cos\varphi}-1\right|^2}{\rho(1+\rho^4)} + \frac{4\rho|1-\rho^2|}{(1+\rho^4)^2}\right]d\rho \le$$
$$\le 8\pi + 2\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^\infty \frac{2-e^{-i\rho|y_j-y_1|\cos\varphi}-e^{i\rho|y_j-y_1|\cos\varphi}}{\rho(1+\rho^4)}d\rho =$$
$$= 8\pi + 4\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos(\rho|y_j-y_1|\cos\varphi)}{\rho(1+\rho^4)}d\rho =$$
$$= 8\pi + 4\pi\int\limits_0^\infty \frac{1-J_0(\rho|y_j-y_1|)}{\rho(1+\rho^4)}d\rho =$$
$$= 8\pi + 4\pi\left(\ker\left(|y_j-y_1|\right) + \gamma - \ln(2|y_j-y_1|)\right),$$

где [13] $J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(z\cos x)dx$ – функция Бесселя, (цилиндрическая функция первого рода), и (см. [13])

$$\int_0^\infty \frac{J_0(ax)-1}{x(1+x^4)}dx = \int_0^\infty \frac{J_0(ax)-1}{x}dx + \int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^4}dx - \int_0^\infty \frac{x^3J_0(ax)}{1+x^4}dx =$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\int\limits_{R/a}^\infty \frac{J_0(x)dx}{x} - \gamma - \ln\frac{R}{2a} + \frac{1}{4}\ln|1+R^4|\right) - \ker(a) =$$
$$= \ln(2a) - \gamma - \ker(a),$$

$\ker(z) = \int\limits_0^\infty \dfrac{x^3J_0(zx)}{1+x^4}dx$ – обобщенная функция Кельвина [34, 13], γ – постоянная Эйлера.

Следовательно,

$$\widehat{A}_2^{-1/2}\gamma_i(p) = \frac{e^{-ipy_j}-e^{-ipy_1}}{|p|(1+|p|^4)} \in \widehat{H}_1(\mathbb{R}^2),\ j = 2, ..., m,$$

и

$$\widehat{\mathfrak{N}}_0 = \mathrm{span}\ \{\gamma_2(p), ..., \gamma_m(p)\} \subset \widehat{\mathfrak{N}}_F, \quad \dim(\widehat{\mathfrak{N}}_0) = m-1. \qquad (6.2)$$

Таким образом, по теореме 1.5.2 расширения Фридрихса и Крейна не трансверсальны, так как $\mathfrak{N}_F = (\mathbf{A}_2^2 + I)^{-1}\Phi_{Y,2} \not\subseteq A_2^{1/2} H_1$, более того, они не дизъюнктны, ввиду (6.2) и теоремы 1.5.2.

Прямым вычислением, при $k \neq j$, получаем:

$$\omega_{kj} = (\widehat{A}_2^{1/2}\gamma_k, \widehat{A}_2^{1/2}\gamma_j) + (\widehat{A}_2^{-1/2}\gamma_k, \widehat{A}_2^{-1/2}\gamma_j) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{-ipy_k} - e^{-ipy_1})(e^{ipy_j} - e^{ipy_1})}{|p|^2(1+|p|^4)} dp =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{-ip(y_k - y_j)} - 1) - (e^{-ip(y_1 - y_j)} - 1) - (e^{-ip(y_k - y_1)} - 1)}{|p|^2(1+|p|^4)} dp =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{e^{-i|y_k - y_j|\rho\cos\varphi} - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho - \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{e^{-i|y_k - y_1|\rho\cos\varphi} - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho -$$
$$- \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{e^{-i|y_j - y_1|\rho\cos\varphi} - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{\cos(|y_k - y_j|\rho\cos\varphi) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho - 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{\cos(|y_k - y_1|\rho\cos\varphi) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho -$$
$$-2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{\cos(|y_j - y_1|\rho\cos\varphi) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{J_0(\rho|y_k - y_j|) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho - 2\pi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{J_0(\rho|y_k - y_1|) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho - 2\pi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{J_0(\rho|y_j - y_1|) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho =$$

$$= 2\pi \Big(\gamma - \ker(|y_k - y_j|) + \ker(|y_k - y_1|) +$$
$$+ \ker(|y_j - y_1|) + \ln \tfrac{|y_k - y_j|}{2|y_k - y_1||y_j - y_1|} \Big).$$

При $k = j$:

$$\omega_{kk} = -4\pi \int\limits_0^{\infty} \tfrac{J_0(\rho|y_k - y_1|) - 1}{\rho(1+\rho^4)} d\rho = -4\pi \left(\ln(2|y_k - y_1|) - \gamma - \ker(|y_k - y_1|) \right).$$

Значит

$$\omega_{kj} = \begin{cases} 2\pi \left(\gamma - \ker(|y_k - y_j|) + \ker(|y_k - y_1|) + \ker(|y_j - y_1|) + \right. \\ \left. \qquad + \ln \dfrac{|y_k - y_j|}{2|y_k - y_1||y_j - y_1|} \right), & k \neq j, \\ -4\pi \left(\ln(2|y_k - y_1|) - \gamma - \ker(|y_k - y_1|) \right), & k = j, \end{cases}$$

$k, j = 2, ..., m.$

Далее,

$$g_{kj} = (\gamma_k, \gamma_j) + (\widehat{A}^*_{Y,2}\gamma_k, \widehat{A}^*_{Y,2}\gamma_j) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{-ipy_k} - e^{-ipy_1})(e^{ipy_j} - e^{ipy_1})}{1+|p|^4} dp =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2} + 2\pi \int\limits_0^\infty \dfrac{\rho(J_0(\rho|y_k - y_j|) - J_0(\rho|y_k - y_1|) - J_0(\rho|y_j - y_1|))}{1+\rho^4} d\rho, & k \neq j, \\ \pi^2 - 4\pi \int\limits_0^\infty \dfrac{\rho J_0(\rho|y_k - y_1|)}{1+\rho^4} d\rho, & k = j, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2} - 2\pi(\mathrm{kei}\,(|y_k - y_j|) - \mathrm{kei}\,(|y_k - y_1|) - \mathrm{kei}\,(|y_j - y_1|)), & k \neq j, \\ \pi^2 + 4\pi \mathrm{kei}\,(|y_k - y_1|), & k = j, \end{cases}$$

$$k, j = 2, ..., m,$$

где $\mathrm{kei}\,(z) = -\int\limits_0^\infty \frac{xJ_0(xz)}{1+x^4} dx$ – обобщенная функция Кельвина [34, 13]. Пусть $\mathcal{W} = (\omega_{kj})^m_{k,j=2}$, $\mathcal{V} = \mathcal{W}^{-1} = (v_{jk})^m_{k,j=2}$ и

$$\mathcal{W}_0^{-1} = \begin{pmatrix} v_{22} & ... & v_{m2} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ v_{2m} & ... & v_{mm} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{22} & ... & g_{2m} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ g_{2m} & ... & g_{mm} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проводя обратные преобразования Фурье, находим:

$$\mathcal{F}^{-1}\gamma_k(p) = g_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-ip(y_k - x)} - e^{-ip(y_1 - x)}}{1+|p|^4} dp =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\rho(J_0(\rho|y_k - x|) - J_0(\rho|y_1 - x|))}{1+\rho^4} d\rho = \mathrm{kei}\,(|x - y_1|) - \mathrm{kei}\,(|x - y_k|),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{A}_2\gamma_k(p) = h_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|p|^2(e^{-ip(y_k - x)} - e^{-ip(y_1 - x)})}{1+|p|^4} dp =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\rho^3(J_0(\rho|y_k - x|) - J_0(\rho|y_1 - x|))}{1+\rho^4} d\rho = \mathrm{ker}\,(|x - y_k|) - \mathrm{ker}\,(|x - y_1|),\ k = 2, ..., m.$$

Теорема 6.1.1. *Пусть оператор $A_{Y,2}$ задан формулами* (6.1), *тогда форму-*

лы

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{dom}(\widetilde{A}_{Y,2}) = \left\{\varphi(x) + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k,j=2}^{m} u_{kj}\lambda_k h_j(x)\right\},\\
&\widetilde{A}_{Y,2}\left(\varphi(x) + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k,j=2}^{m} u_{kj}\lambda_k h_j(x)\right) =\\
&= -\Delta\varphi(x) + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j h_j(x) - \sum_{k,j=2}^{m} u_{kj}\lambda_k g_j(x),\\
&\varphi \in \operatorname{dom}(A_{Y,2}), \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad k = 2, ..., m,
\end{aligned}
$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными самосопряженными расширениями $\widetilde{A}_{Y,2}$ *оператора* $A_{Y,2}$ *и между всеми матрицами* $\mathcal{U} = (u_{kj})_{k,j=2}^{m}$*, удовлетворяющими условию:*

$$
0 \le \mathcal{U}\mathcal{G} \le \mathcal{G}\mathcal{W}_0^{-1}\mathcal{G}.
$$

Расширение $\widetilde{A}_{Y,2}$ *совпадает с расширением Крейна, если* $\mathcal{U} = \mathcal{G}\mathcal{W}_0^{-1}$.

6.2 Операторы Шрёдингера $A_{Y,d}$ с δ потенциалом в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$

6.2.1 Базисы Рисса $\delta(\cdot - y)$ функций Дирака в $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$

В дальнейшем $W_2^{\pm 1}(\mathbb{R}^d)$, $W_2^{\pm 2}(\mathbb{R}^d)$, (здесь и далее $d = 2$ или 3) – пространства Соболева [4]. Тройки $W_2^2(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ и $W_2^1(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$ – оснащенные гильбертовы пространства [4], т.е. гильбертово пространство $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$ ($W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$) – множество всех непрерывных антилинейных функционалов на $W_2^2(\mathbb{R}^d)$ (на $W_2^1(\mathbb{R}^d)$). Имеем цепочку гильбертовых пространств

$$
W_2^2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^1(\mathbb{R}^d) \subset L_2(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-1}(\mathbb{R}^d) \subset W_2^{-2}(\mathbb{R}^d).
$$

Пусть $Y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – счетное множество точек в $\mathbb{R}^d$ таких, что

$$
\inf\{|y_j - y_k|,\ j \ne k\} =: d_*(Y) > 0. \tag{6.3}
$$

Определим в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ линейный оператор

$$
A_{Y,d} := -\Delta,\ \operatorname{dom}(A_{Y,d}) := \left\{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) : f(y) = 0,\ y \in Y\right\}, \tag{6.4}
$$

где Δ – оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Оператор $A_{Y,d}$ – основа для исследований гамильтонианов в $\mathbb{R}^d$, соответствующих δ взаимодействиям [36], см.

также [35, 37, 5, 60, 15, 76, 77, 18, 81, 87, 28, 10, 9]. $A_{Y,d}$ – плотно определенный замкнутый симметрический и неотрицательный оператор, являющийся сужением самосопряженного неотрицательного оператора A_d (свободного гамильтониана) [36]:

$$A_d = -\Delta,\ \mathrm{dom}(A_d) = W_2^2(\mathbb{R}^d). \tag{6.5}$$

Как известно, функция $\delta(\cdot - y)$ принадлежит $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$ при любом $y \in \mathbb{R}^d$ [36]. Определим следующее подпространство в $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$:

$$\Phi_{Y,d} := \overline{\mathrm{span}}\{\delta(\cdot - y),\ y \in Y\} \quad (\text{замыкание в} \quad W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)). \tag{6.6}$$

Тогда $\Phi_{Y,d} \cap L_2(\mathbb{R}^d) = \{0\}$ [36], а область определения оператора $A_{Y,d}$ можно задать так

$$\mathrm{dom}(A_{Y,d}) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^d) :\ (f, \varphi) = 0,\ \varphi \in \Phi_{Y,d}\}.$$

Оператор A_d заданный формулами (6.5) – неотрицательный и самосопряженный в $H = L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$\begin{aligned}
&H_{+2} = \mathrm{dom}(A_d) = W_2^2(\mathbb{R}^d), \qquad H_{+1} = \mathrm{dom}(A_d^{1/2}) = W_2^1(\mathbb{R}^d),\\
&H_{-1} = W_2^{-1}(\mathbb{R}^d),\ H_{-2} = W_2^{-2}(\mathbb{R}^d),\ d = 2,\, 3,\\
&||f||_k := ||f||_{H_k},\ f \in H_k,\ k = \pm 1, \pm 2.
\end{aligned}$$

Мы докажем, что система дельта-функций $\{\delta(\cdot - y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса подпространства $\Phi_{Y,d}$.

Предложение 6.2.1. *При условии* (6.3) *система дельта-функций* $\{\delta(x - y_j),\ x \in \mathbb{R}^d\}_{j\in\mathbb{N}}$ *образует базис Рисса подпространства* $\Phi_{Y,d}$, $d = 2,\ 3$.

Доказательство. Пусть $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и $f = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \delta(\cdot - y_j)$, тогда

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \delta(\cdot - y_j) \right\|_{-2}^2 = \sup_{\|g\|_2 = 1} |(f, g)|^2 = \sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j g(y_j) \right|^2.$$

Из предложения 4.2.1 следует, что существует такая функция $g(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$, что $g(y_j) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{\overline{a_j}}{\|a\|}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ и $||g||_2 = 1$. Тогда

$$\sup_{\|g\|_2 = 1} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j g(y_j) \right|^2 \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{\overline{a_j}}{\|a\|} \right|^2 = \frac{1}{\gamma^2(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2.$$

С другой стороны

$$\sup_{\|g\|_2=1}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j g(y_j)\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}|a_j|^2 \sup_{\|g\|_2=1}\sum_{j=1}^{n}|g(y_j)|^2.$$

Если $g \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$, то $\vec{g} := \{g(y_j),\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$, см. [36, с. 213,398].

Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с один раз кусочно непрерывно дифференцируемой границей Γ, тогда согласно теореме вложения [4] при $0 \leq k < l - d/p$ пространство $W_p^l(G)$ непрерывно вложено в $C^k(G \cup \Gamma)$ и выполняется неравенство

$$||f||_{C^k(G\cup\Gamma)} \leq c||f||_{W_p^l(G)},\ c > 0,\ f \in W_p^l(G).$$

Пусть $B(y,r)$ – шар с центром в точке $y \in \mathbb{R}^d$ и радиусом $0 < r < d_*(Y)/2$. Поскольку $l = p = 2$, то $l - d/p = 0,5$ при $d = 3$ и $l - d/p = 1$ при $d = 2$, тогда $k = 0$, $|g(y_j)| \leq ||g||_{C(B(y_j,r))} \leq c_1||g||_{W_2^2(B(y_j,r))}$ и

$$\begin{gathered}\sup_{||g||_2=1}\sum_{j=1}^{n}|g(y_j)|^2 \leq \sup_{||g||_2=1}\sum_{j=1}^{n}||g||^2_{C(B(y_j,r))} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{n} c_1^2||g||^2_{W_2^2(B(y_j,r))} \leq c_1^2||g||^2_{W_2^2(\mathbb{R}^d)} = c_1^2\end{gathered}$$

Таким образом, при $n \to \infty$ мы получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j\delta(\cdot - y_j) \in \Phi_{Y,d}$$

и

$$c_2^2\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_j|^2 \leq \left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j\delta(\cdot - y_j)\right\|_{-2}^2 \leq c_1^2\sum_{j\in\mathbb{N}}|a_j|^2.$$

$\square$

Обозначим через $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d, dx) \to L^2(\mathbb{R}^d, dp)$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}f = \widehat{f}(p) = \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{|x|<R} f(x)e^{-ixp}dx.$$

Тогда $\widehat{H} = L_2(\mathbb{R}^d, dp)$. Пусть $\widehat{A} = \mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$. Оператор $\widehat{A}$ действует в $\widehat{H}$ и унитарно эквивалентен оператору A. Пусть $\widehat{H}_k := \mathcal{F}H_k$, $k = \pm1, \pm2$, $\widehat{\Phi}_{Y,d} =$

$\mathcal{F}\Phi_{Y,d}$. Определим также симметрический оператор $\widehat{A}_{Y,d} := \mathcal{F}A_{Y,d}\mathcal{F}^{-1}$. Имеем

$$\mathrm{dom}(\widehat{A}^{k/2}) = \widehat{H}_k = \left\{ \widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}^d, dp) : \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(p)|^2(|p|^{2k}+1)dp < \infty \right\},$$

$$(\widehat{A}^{k/2}\widehat{f})(p) = |p|^k\widehat{f}(p),$$

$$\widehat{H}_{-k} = \left\{ \widehat{f}(p) : \ \frac{\widehat{f}(p)}{|p|^{2k}+1} \in \widehat{H}_k \right\}, \ ||\widehat{f}(p)||^2_{-k} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{f}(p)|^2}{|p|^{2k}+1}\, dp,$$

$$\mathrm{dom}(\widehat{A}_{Y,d}) = \left\{ \widehat{f} \in \widehat{H}_{+2} : \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(p)e^{ipy} = 0, \ y \in Y \right\}, \ (\widehat{A}_{Y,d}\widehat{f})(p) = |p|^2\widehat{f}(p),$$

$$\widehat{\Phi}_{Y,d} = \mathcal{F}\Phi_{Y,d} = \overline{\mathrm{span}}\{e^{-ipy}, \ y \in Y\} \quad \text{замыкание в} \ \ \widehat{H}_{-2},$$

$$\widehat{\mathfrak{N}}_z(\widehat{A}_{Y,d}) = \overline{\mathrm{span}} \left\{ \frac{e^{-ipy}}{|p|^2 - z}, \ y \in Y \right\}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \ k = 1, 2.$$

Предложение 6.2.2. *Системы функций* $\{e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *и* $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{(|p|^2+1)^2}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *образуют базисы Рисса подпространств* $\widehat{\Phi}_{Y,d}$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$ *и* $(\widehat{\mathbf{A}}_d + I)^{-1}\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$, *соответственно.*

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{F}$ унитарно отображает H_{-2} на $\widehat{H}_{-2}$, то по предложению 6.2.1 система $\{e^{-ipy_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ образует базис Рисса подпространства $\widehat{\Phi}_{Y,d}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d}) = \ker(\widehat{A}^*_{Y,d} + I)$, тогда

$$\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d}) = (\widehat{\mathbf{A}}_d + I)^{-1}\widehat{\Phi}_{Y,d}$$

и $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{(|p|^2+1)^2}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d}) \subset \widehat{H}$ и $(\widehat{\mathbf{A}}_d + I)^{-1}\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$, соответственно. □

Предложение 6.2.3. *Пусть операторы* $A_{Y,d}$, $d = 2, 3$, *определены формулами* (6.4) *и пусть* Y *удовлетворяет условию* (6.3). *Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}_z(A_{Y,3}) = \overline{\mathrm{span}} \left\{ \varphi^{(3)}_{k,z}(x) := \tfrac{e^{i\sqrt{z}|x-y_k|}}{|x-y_k|}, \ k \in \mathbb{N} \right\}, \\ &(-\Delta - zI)^{-1}\mathfrak{N}_z(A_{Y,3}) = \overline{\mathrm{span}} \left\{ \tau^{(3)}_{k,z}(x) := \tfrac{ie^{i\sqrt{z}|x-y_k|}}{2\sqrt{z}}, \ k \in \mathbb{N} \right\}, \\ &z \in \mathbb{C} \setminus [\,0, +\infty), \ \mathrm{Im}\sqrt{z} \geq 0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{N}_z(A_{Y,2}) = \overline{\operatorname{span}}\left\{\varphi^{(2)}_{k,z}(x) := \tfrac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x-y_k|),\ k\in\mathbb{N}\right\},\\
&(-\Delta - zI)^{-1}\mathfrak{N}_z(A_{Y,2}) =\\
&= \overline{\operatorname{span}}\left\{\tau^{(2)}_{k,z}(x) := \tfrac{\pi|x-y_k|}{4i\sqrt{z}} H_1^{(1)}(\sqrt{z}|x-y_k|), k\in\mathbb{N}\right\},\\
&z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\ \operatorname{Im}\sqrt{z}\geq 0,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

где $H_0^{(1)}(z)$, $H_1^{(1)}(z)$ *функции Ханкеля [34].*

Доказательство. По предложению 6.2.2 системы функций $\{e^{-ipy_j}\}$, $\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2-z}\}$ и $\{\frac{e^{-ipy_j}}{(|p|^2-z)^2}\}$, $j\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$, $\operatorname{Im}\sqrt{z}\geq 0$, образуют базисы Рисса подпространств $\widehat{\Phi}_{Y,d}$, $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$ и $(-\widehat{\Delta}+I)^{-1}\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,d})$, соответственно. Применяя обратное преобразование Фурье, мы получим (6.7) и (6.8) (см. [36]). □

Замечание 6.2.4. *В [86, теорема 3.8] доказано, что условие* (6.3) *является необходимым, чтобы системы* $\left\{\varphi^{(3)}_{k,z}(x)\right\}$ *и* $\left\{\varphi^{(2)}_{k,z}(x)\right\}$ *были базисами в* $\mathfrak{N}_z(A_{Y,3})$ *и* $\mathfrak{N}_z(A_{Y,2})$, *соответственно.*

Замечание 6.2.5. *Далее, мы будем использовать следующие обозначения (для случая* $z=-1$*)*

$$
\varphi^{(d)}_k(x) := \varphi^{(d)}_{k,-1}(x) \quad \text{и} \quad \tau^{(d)}_k(x) := \tau^{(d)}_{k,-1}(x). \tag{6.9}
$$

Лемма 6.2.6. *Пусть функции* $\varphi^{(d)}_j(\cdot)$ *и* $\tau^{(d)}_j(\cdot)$ *заданы формулами* (6.9) *и пусть*

$$
L_d := \left(\tau^{(d)}_j(y_k)\right)_{k,j\in\mathbb{N}}, \tag{6.10}
$$

$$
K_d := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \varphi^{(d)}_j(y_k) & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \\ \varphi^{(d)}_k(y_j) & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}_{k,j\in\mathbb{N}}. \tag{6.11}
$$

Тогда матрицы L_d *и* K_d *определяют ограниченные самосопряженные операторы в* ℓ_2.

Доказательство. Резольвента $(-\Delta - zI)^{-1}$ яляется интегральным оператором с ядром [36]

$$
G^{(3)}_z(x) = \frac{e^{i\sqrt{z}|x|}}{4\pi|x|},\ x\neq 0, \quad x\in\mathbb{R}^3,
$$

и

$$G_z^{(2)}(x)=\begin{cases}\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x|), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad x\in\mathbb{R}^2.$$

Поскольку $(-\Delta+I)^{-1}\varphi_j^{(d)}(x)=\tau_j^{(d)}(x)$, то $\tau_j^{(d)}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}G_{-1}^{(d)}(x-t)\varphi_j^{(d)}(t)dt$, а значит

$$\tau_j^{(3)}(y_k)=\frac{1}{2}e^{-|y_k-y_j|}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-|y_k-t|}}{|y_k-t|}\frac{e^{-|y_j-t|}}{|y_j-t|}dt=\frac{1}{4\pi}\left(\varphi_k^{(3)},\varphi_j^{(3)}\right)_{L_2(\mathbb{R}^3)}$$

и

$$\begin{aligned}&\tau_j^{(2)}(y_k)=\tfrac{-\pi|y_j-y_k|}{4}H_1^{(1)}(i|y_k-y_j|)=\\ &=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\tfrac{i}{4}H_0^{(1)}(i|y_k-t|)\tfrac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(i|y_j-t|)dt=\tfrac{2}{\pi}\left(\varphi_k^{(2)},\varphi_j^{(2)}\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Мы получили, что

$$L_d=\left(\tau_j^{(d)}(y_k)\right)_{j,k\in\mathbb{N}}=q_d\left((\varphi_k^{(d)},\varphi_j^{(d)})\right)_{j,k\in\mathbb{N}},$$

где $q_2=\frac{2}{\pi}$ в случае $\mathbb{R}^2$ и $q_3=\frac{1}{4\pi}$ в случае $\mathbb{R}^3$.

Пусть $f\in\mathfrak{N}_{-1}(A_{Y,d})$, так как $\{\varphi_j^{(d)}(x),\ j\in\mathbb{N}\}$ образуют базис Рисса подпространства $\mathfrak{N}_{-1}(A_{Y,d})$, то $f(x)=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}c_j\varphi_j^{(d)}(x),\ c=\{c_j,\,j\in\mathbb{N}\}\in\ell_2(\mathbb{N})$ и $\forall c\in\ell_2(\mathbb{N})$ выполняется неравенство

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\sum_{j,k\in\mathbb{N}}(\varphi_k^{(d)},\varphi_j^{(d)})c_k\bar{c}_j=(L_dc,c)_{\ell_2(\mathbb{N})}\leq C\sum_{j\in\mathbb{N}}|c_j|^2<\infty.$$

Следовательно, L_d – ограниченный оператор в $\ell_2(\mathbb{N})$.

Так как, $\varphi_j^{(d)}(y_k)\sim\frac{\tau_j^{(d)}(y_k)}{|y_j-y_k|},\ j\neq k$, то $|\varphi_j^{(d)}(y_k)|\leq C|\tau_j^{(d)}(y_k)|,\ j\neq k$ для достаточно больших значений j и k. Значит, K_d – ограниченыйн оператор в $\ell_2(\mathbb{N})$. □

Замечание 6.2.7. *Пусть Y из $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет условию* (6.3), *$F=\{f_k:=e^{i(\cdot,y_k)}\}_{k=1}^\infty$, $y_k\in Y$. В [86] доказана эквивалентность следующих утверждений:*

(i) *матрица Грама*

$$Gr_F=((f_k,f_j)_{L^2(\mathbb{R}^d;\mu)})_{k,j\in\mathbb{N}}$$

определяет ограниченый оператор на $\ell_2(\mathbb{N})$,

(ii) *существует положительная постоянная C такая, что для любого m и для любого набора комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ справедливо неравенство*

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j f_j \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2.$$

6.2.2 Дизъюнктность и трансверсальность расширений Фридрихса и Крейна операторов $A_{Y,d}$

Теорема 6.2.8. *Оператор A_d, определенный равенством* (6.5), *является расширением по Фридрихсу оператора $A_{Y,d}$.*

Мы даем два доказательства, первое предложено автором, а второе – профессором Арлинским Ю.М.

Доказательство. Пусть $\widehat{\varphi} \in \widehat{\Phi}_{Y,d}$, тогда по предложению 6.2.2

$$\widehat{\varphi}(p) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j},\ \vec{c} = \{c_j,\, j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N}).$$

Функция $\widehat{\varphi}(p) \in \widehat{H}_{-1}$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{\varphi}(p)|^2}{|p|^2+1} dp = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{j,k=1}^{\infty} c_j \bar{c}_k \frac{e^{-ip(y_j-y_k)}}{|p|^2+1} dp < \infty.$$

Легко видеть, что $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{dp}{|p|^2+1} = \infty$. Пусть $a \in \mathbb{R}^2$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-ipa}}{|p|^2+1} dp = \left\{ \begin{array}{ll} p = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), & dp = \rho d\varphi d\rho, \\ pa = \rho|a|\cos\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho < \infty, \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{\rho\cos(i\rho|a|\cos\varphi)}{\rho^2+1} d\rho.$$

Поскольку (см. [34, с. 182]), $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos t)dt$, то получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-ipa}}{|p|^2+1} dp = 2\pi \int\limits_0^{\infty} \frac{\rho J_0(\rho|a|)}{\rho^2+1} d\rho,$$

и, так как (см. [13, с. 692]) $\int\limits_0^\infty \dfrac{xJ_0(xz)}{1+x^2}dx = K_0(z)$, $\mathrm{Re}z > 0$, и (см. [34, с. 196]) $K_0(z) = \dfrac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-ip(y_k-y_j)}}{|p|^2+1}dp = 2\pi\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(i|y_k-y_j|) = 2\pi\varphi_k^{(2)}(y_j),$$

где $k \neq j$ и функции $\varphi_k^{(2)}(x)$ определены в (6.8), (6.9).

Пусть теперь $a \in \mathbb{R}^3$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ipa}}{|p|^2+1}dp = \left\{\begin{array}{l} pa = \rho|a|u,\ u=\cos\theta,\ dp = \rho^2 d\varphi du d\rho, \\ p = (\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta) \\ 0 \le \theta \le \pi,\ -1 \le u \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho < \infty \end{array}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_0^\infty \frac{\rho^2 e^{-i\rho|a|u}}{\rho^2+1}d\rho = \frac{2\pi i}{|a|}\int\limits_0^\infty \frac{\rho(e^{-i\rho|a|}-e^{i\rho|a|})}{\rho^2+1}d\rho = \frac{4\pi i}{|a|}\int\limits_0^\infty \frac{\rho\sin(\rho|a|)}{\rho^2+1}d\rho.$$

Так как (см. [13, с. 420]), $\int\limits_0^\infty \dfrac{x\sin(ax)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$, $a > 0$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ip(y_k-y_j)}}{|p|^2+1}dp = 2\pi^2\frac{e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|} = 2\pi^2\varphi_k^{(3)}(y_j),$$

где $k \neq j$ и функции $\varphi_k^{(d)}(x)$ определены в (6.7), (6.9).

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{j,k\neq j} c_j\bar{c}_k \frac{e^{-ip(y_j-y_k)}}{|p|^2+1}dp = 2\pi^{d-1}(K_d\vec{c},\vec{c})_{\ell_2(\mathbb{N})}.$$

В силу леммы 6.2.6, оператор K_d является ограниченым на $\ell_2(\mathbb{N})$. Значит для любого $\widehat{\varphi}(p)$ из $\widehat{\Phi}_{Y,d}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{\varphi}(p)|^2}{|p|^2+1}dp = +\infty.$$

Значит, $\Phi_{Y,d} \cap H_{-1} = \{0\}$, следовательно по предложению 1.5.1 оператор A_d является расширением по Фридрихсу оператора $A_{Y,d}$. $\square$

Доказательство. (*Предложено Арлинским Ю.М.*) Докажем, что

$$\Phi_{Y,d} \cap W_2^{-1}(\mathbb{R}^d) = \{0\}. \tag{6.12}$$

Отметим, что $\delta(\cdot - y) \in W_2^{-2}(\mathbb{R}^d) \setminus W_2^{-1}(\mathbb{R}^d)$ [36].

Допустим, что существует $\vec{c} = \{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ и

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta(x - y_j) \in W_2^{-1}(\mathbb{R}^d).$$

Тогда, $\mu(x)$ порождает линейный непрерывный функционал μ на $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ по формуле [4]

$$\mu[f] = (f(\cdot), \mu(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}^d)},\ f \in W_2^1(\mathbb{R}^d).$$

Кроме того, также по теореме Рисса

$$\begin{aligned}&\mu[f] = (f(\cdot), \varphi(\cdot))_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\varphi(x)}dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)(x)\overline{(\nabla\varphi)(x)}dx = \\ &= (f(\cdot), \varphi(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}^d)} + ((\nabla f)(\cdot), (\nabla\varphi)(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

где $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}^d)$.

В частности, для любого $f \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned}&\mu[f] = (f(\cdot), \mu(\cdot))_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, f(y_j) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\varphi(x)}dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\nabla f)(x)\overline{(\nabla\varphi)(x)}dx.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Определим функцию

$$\omega_h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{h^2}{h^2-t^2}}, & |t| \le h \\ 0, & |t| \ge h \end{cases}.$$

Тогда $0 < \omega_h(t) \le e^{-1}$ и $\dfrac{d\omega_h(t)}{dt} = -\dfrac{2h^2 t}{(h^2-t^2)^2} e^{-\frac{h^2}{h^2-t^2}} = -\dfrac{2h^4}{(h^2-t^2)^2} e^{-\frac{h^2}{h^2-t^2}}\, \dfrac{t}{h^2}$.
Отсюда

$$\left|\frac{d\omega_h(t)}{dt}\right| \le A\,h^{-1},\ A = 4e^{-2}.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, $\omega_h(x) = \omega_h(|x|)$. Тогда $\omega_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\omega_h = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le h\}$, $0 < \omega_h(x) \le e^{-1}$, $(\nabla\omega_h)(x) = \dfrac{d\,\omega_h(|x|)}{d\,|x|}\,\dfrac{x}{|x|}$, $|\nabla\omega_h(x)| \le A\,h^{-1}$.

Кроме того

$$\|\omega_h(\cdot - y_j)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\omega_h(x-y_j)|^2\, dx \right)^{1/2} \le \begin{cases} \dfrac{1}{e}\sqrt{\pi}\, h, \ d=2 \\ \dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}}\sqrt{h^3}, \ d=3 \end{cases}.$$

Поэтому

$$\lim_{h\to 0} \|\omega_h(\cdot - y_j)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{6.14}$$

Если $d = 3$, то

$$\|(\nabla\omega_h)(\cdot - y_j)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |(\nabla\omega_h)(x-y_j)|^2\, dx \right)^{1/2} \le A\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{h}\,.$$

Отсюда

$$\lim_{h\to 0} \|(\nabla\omega_h)(\cdot - y_j)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{6.15}$$

Если $d = 2$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\nabla\omega_h)(x-y_j)\overline{(\nabla\varphi)(x)} dx \right| \le \left(\int\limits_{|x-y_j|\le h} |(\nabla\omega_h)(x-y_j)|^2\ dx \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{|x-y_j|\le h} |(\nabla\varphi)(x)|^2\ dx \right)^{1/2} \le \sqrt{A\pi}\left(\int\limits_{|x-y_j|\le h} |(\nabla\varphi)(x)|^2\ dx \right)^{1/2}.$$

Поэтому, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, получаем

$$\lim_{h\to 0} \left((\nabla\omega_h)(\cdot - y_j), (\nabla\varphi)(\cdot)\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0. \tag{6.16}$$

Если $f_h(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\, \omega_h(x-y_j)$, то из (6.13) следует

$$\frac{1}{e}\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\omega_h(\cdot - y_j), \varphi(\cdot)\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left((\nabla\omega_h)(\cdot - y_j), (\nabla\varphi)(\cdot)\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

Далее, учитывая (6.14), (6.15), (6.16), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j = 0.$$

Поскольку последнее равенство верно для любого n и любого набора $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ и поскольку $c = \{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{N})$, то $c_j = 0$ $\forall j$. Это означает, что $\mu(x) = 0$, т.е. (6.12) имеет место. Последнее равенство влечет $(A_{Y,d})_F = A_d$ (см. предложение 1.5.1). $\square$

Замечание 6.2.9. *В [86] равенство $(A_{Y,3})_F = A_3$ доказано с использованием свойств функции Вейля [70, 71].*

Теорема 6.2.10. *Расширения Фридрихса $(A_{Y,2})_F (= A_d)$ и Крейна $(A_{Y,2})_K$ оператора $A_{Y,2}$ дизъюнктны, но не трансверсальны.*

Доказательство. Перейдем к преобразованиям Фурье. Пусть $\varphi \in \widehat{\Phi}_{Y,2}$, тогда по предложению 6.2.2 $\varphi(p) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j e^{-ipy_j}$, $\{a_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$. Пусть

$$h_j(p) = \frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1},\ j \in \mathbb{N}.$$

По предложению 6.2.2 система функций $\{h_j(p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ является базисом Рисса в дефектном подространстве $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}$ оператора $\widehat{A}_{Y,2}$. Поскольку $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dp}{|p|^2(|p|^2+1)} = +\infty$, то $h_j \notin \widehat{A}_2^{1/2}\widehat{H}_{+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Поэтому, по теореме 1.5.2 расширения Фридрихса $\widehat{A}_2$ и Крейна $(\widehat{A}_{Y,2})_K$ оператора $\widehat{A}_{Y,2}$ не трансверсальны.

Рассмотрим линейное многообразие

$$\mathcal{L} := \operatorname{span}\left\{g_j(p) = h_j(p) - h_{j+1}(p),\ j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Так как любой вектор из $\mathcal{L}$ имеет конечное число ненулевых координат относительно базиса $\{h_j(p)\}_{j\in\mathbb{N}}$ и сумма координат равна нулю, то $\mathcal{L}$ всюду плотно в $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}$. Очевидно, что $\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ipy_j} - e^{-ipy_{j+1}}|^2 dp}{|p|^2(|p|^2+1)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ip(y_j - y_{j+1})} - 1|^2 dp}{|p|^2(|p|^2+1)}$. Пусть $a \in \mathbb{R}^2$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ipa} - 1|^2 dp}{|p|^2(|p|^2+1)} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{\left|e^{-i\rho|a|\cos\varphi} - 1\right|^2}{\rho(\rho^2+1)} d\rho =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{1 - \cos(\rho|a|\cos\varphi)}{\rho(\rho^2+1)} d\rho = 4\pi \int\limits_0^{\infty} \frac{1 - J_0(\rho|a|)}{\rho(\rho^2+1)} d\rho,$$

так как

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(z\cos x)dx.$$

Далее

$$\int_0^\infty \frac{1-J_0(\rho|a|)}{\rho(\rho^2+1)}d\rho = \int_0^\infty \frac{1-J_0(\rho|a|)}{\rho}d\rho + \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho|a|)}{\rho^2+1}d\rho - \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho^2+1}d\rho.$$

Поскольку (см. [13, с. 692]) $\int\limits_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho|a|)}{\rho^2+1}d\rho = K_0(|a|)$, и (см. [34, с. 299]) $\int\limits_0^x \frac{1-J_0(t)}{t}dt = \int\limits_x^\infty \frac{J_0(t)dt}{t} + \gamma + \ln\frac{x}{2}$, то

$$\int_0^\infty \frac{1-J_0(\rho|a|)}{\rho(\rho^2+1)}d\rho = K_0(|a|)+$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^\infty \frac{J_0(\rho|a|)}{\rho}d\rho + \gamma + \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = K_0(|a|)+\gamma.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|e^{-ipy_j}-e^{-ipy_{j+1}}|^2dp}{|p|^2(|p|^2+1)} = 4\pi(\gamma + K_0(|y_j-y_{j+1}|)) < \infty,$$

где γ – постоянная Эйлера и $K_0(z) = \frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(iz)$ – цилиндрическая функция мнимого аргумента. Это означает, что $g_j(p) \in \widehat{A}_2^{1/2}\widehat{H}_{+1}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\mathcal{L} \subset \widehat{A}_2^{1/2}\widehat{H}_{+1}$. В силу теоремы 1.5.2 получаем, что $\widehat{A}_2$ и $(\widehat{A}_{Y,2})_K$ дизъюнктны. Используя унитарную эквивалентность, получаем дизъюнктность A_2 и $(A_{Y,2})_K$. □

Теорема 6.2.11. *Пусть*

$$M_{jk} = \begin{cases} \frac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & j\neq k, \\ 1, & j=k. \end{cases} \tag{6.17}$$

Расширения Фридрихса и Крейна оператора $A_{Y,3}$ дизъюнктны. Они трансверсальны тогда и только тогда, когда оператор M, определенный матрицей $\|M_{jk}\|_{j,k}$, ограничен на $\ell_2(\mathbb{N})$.

Доказательство. Перейдем к преобразованиям Фурье. По предложению 6.2.2

$$\varphi \in \widehat{\Phi}_{Y,3} \iff \varphi(p) = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j},\ \vec{c} = \{c_j,\ j\in\mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$$

Отметим, что

$$g(p) := \frac{\varphi(p)}{|p|^2+1} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{c_j e^{-ipy_j}}{|p|^2+1} \in (\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\widehat{\Phi}_{Y,3} = \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}).$$

Кроме того, $\left\|\frac{e^{-ipy_j}}{|p|(|p|^2+1)}\right\|^2_{\widehat{H}_{+1}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|p|^2(|p|^2+1)}dp = 2\pi^2 < \infty$. Это означает, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1} \in \widehat{A}_3^{1/2}\widehat{H}_{+1}$. Так как линейная оболочка системы функций $\left\{\frac{e^{-ipy_j}}{|p|^2+1}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ плотна в $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3})$, то по теореме 1.5.2 операторы $\widehat{A}_{3K}$ и $\widehat{A}_{3F}$ дизъюнктны.

Допустим, что они трансверальны. Тогда по теореме 1.5.2 справедливо включение $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}) \subset \widehat{A}_3^{1/2}\widehat{H}_{+1}$. Оператор $\widehat{A}_3^{1/2}$ непрерывно действует из $\widehat{H}_{+1}$ в $\widehat{H} = L_2(\mathbb{R}^3, dp)$. Поэтому $\widehat{A}_3^{-1/2}$ – замкнутый оператор из $\widehat{H}$ в $\widehat{H}_{+1}$. Поскольку $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3})$ является подпространством в $\widehat{H}$ (замкнутым линейным многообразием), то по теореме о замкнутом графике сужение $\widehat{A}_3^{-1/2} \upharpoonright \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3})$ – ограниченный оператор из $\widehat{H}$ в $\widehat{H}_{+1}$, т.е.

$$||\widehat{A}_3^{-1/2}g||^2_{\widehat{H}_{+1}} \leq \gamma ||g||^2, \ \ \forall g \in \widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}).$$

Но $\widehat{\mathfrak{N}}_{-1}(\widehat{A}_{Y,3}) = (\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\widehat{\Phi}_{Y,3}$, причем оператор

$$(\mathbf{A}_3 + I)^{-1} \upharpoonright \widehat{\Phi}_{Y,3}$$

непрерывно действует из $\widehat{H}_{-2}$ в $\widehat{H}$, т.е.

$$\left\|(\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\varphi\right\|^2_{\widehat{H}} \leq C \left\|\varphi\right\|^2_{\widehat{H}_{-2}} \forall \varphi \in \widehat{\Phi}_{Y,3}.$$

Таким образом, для

$$g(p) = (\widehat{\mathbf{A}}_3 + I)^{-1}\varphi(p) = \frac{\varphi(p)}{|p|^2+1}, \ \ \widehat{\mathbf{A}}_3^{-1/2}g(p) = \frac{\varphi(p)}{|p|(|p|^2+1)}$$

с учетом того, что $\left\{e^{-ipy_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ – базис Рисса в $\widehat{\Phi}_{Y,3}$, имеем

$$||\widehat{\mathbf{A}}_3^{-1/2}g||^2_{\widehat{H}_{+1}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(p)|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}dp, \quad ||g||^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\varphi(p)|^2}{(|p|^2+1)^2}dp, \quad ||\varphi||^2_{\widehat{H}_{-2}} \leq C \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2.$$

Это влечет

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)}dp \leq C \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j|^2, \tag{6.18}$$

при любом выборе $\vec{c} = \{c_j,\ j \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$. Раскрывая формально числитель, мы получаем $\left|\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2 = \sum\limits_{j,k\in\mathbb{N}} c_j\overline{c_k} e^{ip(y_k-y_j)}$. Поскольку (см. [13, стр. 422]) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\rho|a|d\rho}{\rho(\rho^2+1)} = \frac{1-e^{-|a|}}{|a|}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ipa}}{|p|^2(|p|^2+1)} dp =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} pa = \rho|a|u,\ u = \cos\theta,\ dp = \rho^2 d\varphi du d\rho, \\ p = (\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta) \\ 0 \le \theta \le \pi,\ -1 \le u \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho < \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^1 du \int\limits_0^\infty \frac{e^{i\rho|a|u}}{\rho^2+1} d\rho = \frac{2\pi}{i|a|} \int\limits_0^\infty \frac{e^{i\rho|a|} - e^{-i\rho|a|}}{\rho(\rho^2+1)} d\rho =$$

$$= \frac{4\pi}{|a|} \int\limits_0^\infty \frac{\sin\rho|a|d\rho}{\rho(\rho^2+1)} = 2\pi^2 \frac{1-e^{-|a|}}{|a|}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)} dp = 2\pi^2 \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 + 2\pi^2 \sum_{j\neq k} \frac{1-e^{-|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|} c_j\overline{c_k} = \tag{6.19}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 \sum_{j,k=1}^n M_{jk} c_j \overline{c_k},$$

где M_{jk} определены равенствами (6.17). Таким образом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e^{-ipy_j}\right|^2}{|p|^2(|p|^2+1)} dp = \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 \sum_{j,k=1}^n M_{jk} c_j \overline{c_k} \le C \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2.$$

Теперь (6.18), (6.19) влечет

$$0 < \sum_{j,k=1}^n M_{jk} c_j \overline{c_k} \le C \sum_{j=1}^n |c_j|^2,$$

для любого $\vec{c} \in \ell_2(\mathbb{N})$, $\vec{c} \neq 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что M– ограниченный самосопряженный и неотрицательный оператор в $\ell_2(\mathbb{N})$ (см. [3, Глава II, стр. 88–94]).

Исходя из ограниченности оператора M в $\ell_2(\mathbb{N})$ и проводя рассуждения в обратном порядке, мы получим, что расширения Фридрихса и Крейна трансверсальны.

$\square$

6.2.3 Граничные тройки и функция Вейля для $A^*_{Y,d}$

Предложение 6.2.12. *Пусть Y бесконечное множество точек удовлетворяющее условию* (6.3) *и пусть $A_{Y,d}$ оператор определенный формулами* (6.4). *Тогда*

$$
\begin{gathered}
\operatorname{dom}(A^*_{Y,d}) = \left\{ f = f_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{fj}\tau_j^{(d)}(x), \right. \\
\left. \vec{a}_f := \{a_{fj}\}_{j\in\mathbb{N}}, \vec{b}_f := \{b_{fj}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \right\}, \\
A^*_{Y,d} f = -\Delta f_0 - \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{fj}\left(\varphi_j^{(d)}(x) - \tau_j^{(d)}(x)\right),
\end{gathered} \tag{6.20}
$$

где функции $\varphi_j^{(d)}(x)$ и $\tau_j^{(d)}(x)$ определены формулами (6.9) *и $f_0 \in \operatorname{dom}(A_{Y,d})$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ замкнутый плотно определенный симметрический оператор на $\mathfrak{H}$, оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ – самосопряженное расширение оператора $\mathcal{A}$ и $(-1) \in \rho(\widetilde{\mathcal{A}})$, тогда (см., например [8]):

$$
\operatorname{dom}(\mathcal{A}^*) = \operatorname{dom}(\mathcal{A}) \dot{+} \mathfrak{N}_{-1} \dot{+} (\widetilde{\mathcal{A}} + I)^{-1}\mathfrak{N}_{-1},
$$

$$
\mathcal{A}^*(f_0 + f_1 + f_2) = \mathcal{A}f_0 - f_1 + \widetilde{\mathcal{A}}f_2,
$$

где $f_0 \in \operatorname{dom}(\mathcal{A})$, $f_1 \in \mathfrak{N}_{-1}$ и $f_2 \in (\widetilde{\mathcal{A}} + I)^{-1}\mathfrak{N}_{-1}$.

По предложению 6.2.3 справедливо равенство $\tau_j^{(d)} = (-\Delta + I)^{-1}\varphi_j^{(d)}$, тогда $-\Delta\tau_j^{(d)} = -\Delta(-\Delta + I)^{-1}\varphi_j^{(d)} = \varphi_j^{(d)} - (-\Delta + I)^{-1}\varphi_j^{(d)} = \varphi_j^{(d)} - \tau_j^{(d)}$ и получаем (6.20). $\square$

В следующем предложении мы дадим унифицированную конструкцию граничных троек для оператора $A^*_{Y,d}$ для обоих случаев $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Другая граничная тройка для оператора $A^*_{Y,3}$ была предложена в [86].

Предложение 6.2.13. *Пусть $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ и пусть линейные операторы*

$$G_d, \Gamma'_d, \Gamma_d : \mathrm{dom}(A^*_{Y,d}) \to \mathcal{H}$$

определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&G_d f = \left\{ \lim_{x\to y_k} \tfrac{f(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} \right\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{fk}\}_{k\in\mathbb{N}},\\
&\Gamma'_d f = \left\{ \lim_{x\to y_k} \left(f(x) - \textstyle\sum\limits_j a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}} = L_d\vec{b}_f = \left\{ \textstyle\sum\limits_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k) \right\}_{k\in\mathbb{N}},\\
&\Gamma_d f = \left\{ \lim_{x\to y_k} \left(f(x) - a_{fk}\varphi_k^{(d)}(x) \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}} = K_d\vec{a}_f + L_d\vec{b}_f =\\
&= \left\{ \textstyle\sum\limits_{j\neq k} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(y_k) + \textstyle\sum\limits_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k) \right\}_{k\in\mathbb{N}}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Тогда совокупности $\Pi'_d = \{\mathcal{H}, G_d, \Gamma'_d\}$ и $\Pi_d = \{\mathcal{H}, G_d, \Gamma_d\}$ являются граничными тройками для $A^*_{Y,d}$.

Доказательство. Пусть f и g из $\mathrm{dom}(A^*_{Y,d})$, тогда, в силу предложения 6.2.12, получим:

$$(A^*_{Y,d}f, g) - (f, A^*_{Y,d}g) = \sum_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \sum_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k),$$

$$(\Gamma'_d f, G_d g)_{\mathcal{H}} - (G_d f, \Gamma'_d g)_{\mathcal{H}} = \sum_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \sum_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k)$$

и

$$\begin{aligned}
(\Gamma_d f, G_d g)_{\mathcal{H}} - (G_d f, \Gamma_d g)_{\mathcal{H}} = \textstyle\sum\limits_{j,k\neq j} a_{fj}\overline{a}_{gk}\varphi_j^{(d)}(y_k) + \textstyle\sum\limits_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) -\\
-\textstyle\sum\limits_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \textstyle\sum\limits_{j,k\neq j} a_{fk}\overline{a}_{gj}\varphi_j^{(d)}(y_k) = \textstyle\sum\limits_{j,k} b_{fj}\overline{a}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k) - \textstyle\sum\limits_{j,k} a_{fj}\overline{b}_{gk}\tau_j^{(d)}(y_k).
\end{aligned}$$

Значит, тождество Грина (1.21) выполняется. Более того,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y_k} \tfrac{f(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} = \lim_{x\to y_k} \Bigg(\tfrac{f_0(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} + a_{fk} +\\
+ \tfrac{1}{\varphi_k^{(d)}(x)} \textstyle\sum\limits_{j\neq k} a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) + \tfrac{1}{\varphi_k^{(d)}(x)} \textstyle\sum\limits_j a_{fj}\tau_j^{(d)}(x) \Bigg) = a_{fk},
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to y_k} \left(f(x) - \textstyle\sum\limits_j a_{fj}\varphi_j^{(d)}(x) \right) = \textstyle\sum\limits_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k),$$

$$\lim_{x\to y_k}\left(f(x)-a_{fk}\varphi_k^{(d)}(x)\right)=\sum_{j\neq k}a_{fj}\varphi_j^{(d)}(y_k)+\sum_j b_{fj}\tau_j^{(d)}(y_k),$$

следовательно формулы (6.21) справедливы. Исходя из леммы 6.10 отображения $\mathbf{\Gamma}_d:\ x\mapsto\{G_dx,\Gamma_dx\}$ и $\mathbf{\Gamma}'_d:\ x\mapsto\{G_dx,\Gamma'_dx\}$ являются сюръекциями из $\mathrm{dom}(\mathrm{A}^*_{\mathrm{Y,d}})$ на $\ell_2\times\ell_2$. $\square$

Замечание 6.2.14. *В [86, предложение 5.3] граничная тройка $\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ для оператора $A^*_{Y,3}$ определяется следующим образом: $\mathcal{H}=\ell_2(\mathbb{N})$,*

$$\Gamma_0f=\{\lim_{x\to y_k}f(x)|x-y_k|\}_1^\infty=\vec{a}_f,$$
$$\Gamma_1f=\{\lim_{x\to y_k}(f(x)-a_{fk}|x-y_k|^{-1})\}_1^\infty=T_0\vec{a}_f+T_1\vec{b}_f,$$

где $T_0=K_3-I$, $T_1=L_3$, а $\vec{a}_f,\vec{b}_f\in\ell_2$ определены в предложении 6.20.

Очевидно, ввиду эквивалентности $\varphi_k^{(3)}(x)\sim\frac{1}{|x-y_k|}$, при $x\to y_k$, мы получаем $\Gamma_0f=G_3f$ и $\Gamma_1f=\Gamma_3f+Ia_f$.

Предложение 6.2.15. *Пусть граничная тройка $\Pi_d=\{\mathcal{H},G_d,\Gamma_d\}$ задана формулами (6.21), тогда γ-поле и функция Вейля $M^{(d)}(z)$ определяются следующим образом:*

$$\gamma^{(d)}(z)(\{a\})=\sum_{j\in\mathbb{N}}a_j\varphi_{j,z}^{(d)}(x),\tag{6.22}$$

$$M^{(d)}(z)(\{a\})=\left\{\sum_{j\neq k}a_j\varphi_{j,z}^{(d)}(y_k)+a_k\lim_{x\to y_k}\left(\varphi_{k,z}^{(d)}(x)-\varphi_k^{(d)}(x)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}},\tag{6.23}$$
$$\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\ell_2(\mathbb{N}),\ z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty),\ \mathrm{Im}\sqrt{z}\geq0.$$

Оператор-функции $M^{(d)}(z)$ задаются матрицами $(M_{kj}^{(d)}(z))_{k,j\in\mathbb{N}}$, где

$$M_{kj}^{(3)}(z)=\begin{cases}i\sqrt{z}+1, & k=j,\\ \frac{e^{i\sqrt{z}|y_k-y_j|}}{|y_k-y_j|}, & k\neq j,\end{cases}$$

$$M_{kj}^{(2)}(z)=\begin{cases}\frac{\pi i}{2}-\frac{1}{2}\ln z, & k=j,\\ \frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(\sqrt{z}|y_k-y_j|), & k\neq j.\end{cases}\tag{6.24}$$

Доказательство. Очевидно, γ-поле ограниченный оператор на $\ell_2(\mathbb{N})$ и

$$G_d\gamma^{(d)}(z)(\{a\})=\left\{a_k\lim_{x\to y_k}\frac{\varphi_{k,z}^{(d)}(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}=\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}},$$

так как $H_0^{(1)}(z) \sim \frac{2i}{\pi}\ln z$, при $z \to 0$ [34], то $\lim\limits_{x\to y_k} \frac{\varphi_{k,z}^{(d)}(x)}{\varphi_k^{(d)}(x)} = 1$. Тогда, из (1.25) мы получаем (6.22).

Далее, из (6.22) и (6.21) получаем (6.23):

$$M^{(d)}(z)(\{a\}) = \Gamma_d \gamma^{(d)}(z)(\{a\}) = \Gamma_d \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \varphi_{j,z}^{(d)}(x) \right) =$$
$$= \left\{ \sum_{j\neq k} a_j \varphi_{j,z}^{(d)}(y_k) + a_k \lim_{x\to y_k} \left(\varphi_{k,z}^{(d)}(x) - \varphi_k^{(d)}(x) \right) \right\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

В случае $\mathbb{R}^3$:

$$\lim_{x\to y_k} \left(\varphi_{k,z}^{(3)}(x) - \varphi_k^{(3)}(x) \right) = \lim_{x\to y_k} \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y_k|} - e^{-|x-y_k|}}{|x-y_k|} = i\sqrt{z} + 1.$$

В случае $\mathbb{R}^2$:

$$\lim_{x\to y_k} \left(\varphi_{k,z}^{(2)}(x) - \varphi_k^{(2)}(x) \right) = \lim_{x\to y_k} \tfrac{\pi i}{2} \left(H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x-y_k|) - H_0^{(1)}(i|x-y_k|) \right) =$$
$$= \lim_{x\to y_k} \left(\ln(i|x-y_k|) - \ln(\sqrt{z}|x-y_k|) \right) = \tfrac{\pi i}{2} - \tfrac{1}{2}\ln z.$$

Функция Вейля $M^{(d)}(z)$ – ограниченный оператор при $z \in \rho(A_{Y,d})$, так как Γ_d и $\gamma^{(d)}(z)$, $z \in \rho(A_{Y,d})$, ограниченные операторы. □

Отметим, что $\gamma^{(3)}(z) = \gamma(z)$ и $M^{(3)}(z) = M(z) + I$, где I единичная матрица, $M(z)$ и $\gamma(z)$ - функция Вейля и γ-поле, соответственно, построенные М. Маламудом и К. Шмюдгеном в [86].

Использую теорему 1.2.20 мы приходим к следующему утверждению (см. [86, лемма 5.6, теорема 5.8]).

Следствие 6.2.16. *Расширения A_3 и $(A_{Y,3})_K$ дизъюнктны. Они трансверсальны в том и только том случае, если оператор $M^{(3)}(0)$ ограничен на $\ell_2(\mathbb{N})$. Самосопряженный оператор $M^{(3)}(0)$ ассоциирован с формой t:*

$$t[c] = \sum_{k,j\neq k} \tfrac{1}{|y_j-y_k|} c_j \overline{c_k} + \|c\|^2_{\ell_2(\mathbb{N})},$$
$$\mathrm{dom}(t) = \left\{ c \in \ell_2(\mathbb{N}) : \sum_{k,j\neq k} \tfrac{1}{|y_j-y_k|} c_j \overline{c_k} < \infty \right\},$$
$$(M^{(3)}(0)a, b) = \sum_{k,j\neq k} \tfrac{1}{|y_j-y_k|} a_j \overline{b_k} + \sum_j a_j \overline{b_j},$$
$$a \in \mathrm{dom}(M^{(3)}(0)) \subset \mathrm{dom}(t), \quad b \in \mathrm{dom}(t).$$

Дадим еще одно доказательство дизъюнктности, но не трансверсальности расширений A_2 и $(A_{Y,2})_K$ (см. теорему 6.2.10).

Пусть $e_j = \{e_{jk} = \delta_{jk},\ k \in \mathbb{N}\}$ стандартный ортонормированный базис в $\ell_2(\mathbb{N})$. Тогда из (6.24) получаем

$$(M^{(2)}(0)e_j, e_j) = \lim_{z\uparrow 0}(M^{(2)}(z)e_j, e_j) = \lim_{z\uparrow 0}\frac{-1}{2}\ln(-z) = +\infty.$$

Рассмотрим линейное многообразие $S_0 := \operatorname{span}\{f_j = e_j - e_{j+1}\}$ из ℓ_2. Пусть $a \in S_0$, тогда для любого $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&(M^{(2)}(0)a, a) = \sum_{k,j\le n_0} a_j\overline{a_k}\lim_{z\uparrow 0}(M^{(2)}(z)f_j, f_k),\\
&\lim_{z\uparrow 0}(M^{(2)}(z)f_j, f_k) =\\
&= \begin{cases} 2\ln|y_j - y_{j+1}| - 2\psi(1) - 2\ln 2, & k = j,\\ \ln\frac{|y_{j+2}-y_j|}{|y_{j+2}-y_{j+1}|} - \ln|y_j - y_{j+1}| + \ln 2 + \psi(1), & k = j+1,\\ \ln\frac{|y_{j-1}-y_{j+1}|}{|y_{j-1}-y_j|} - \ln|y_j - y_{j+1}| + \ln 2 + \psi(1), & k = j-1,\\ \ln\frac{|y_{j+1}-y_k|}{|y_j-y_k|} - \ln\frac{|y_{j+1}-y_{k+1}|}{|y_j-y_{k+1}|}, & k \le j-2 \ \text{ или } k \ge j+2,\end{cases}
\end{aligned}$$

так как (см. [34])

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(\sqrt{z}|y_k - y_j|) = J_0(\sqrt{z}|y_k - y_j|)\left(\tfrac{\pi i}{2} - \tfrac{1}{2}\ln z + \ln 2 - \ln|y_k - y_j|\right) +\\
&+\psi(1) + \sum_{s=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^s\psi(s+1)}{(s!)^2}\left(\tfrac{z|y_k-y_j|^2}{4}\right)^s,
\end{aligned}$$

где $\psi(1) = -\gamma$ и γ постоянная Эйлера. Следовательно,

$$S_0 \subseteq \mathcal{D} := \left\{h \in \ell_2(\mathbb{N}) : \lim_{z\uparrow 0}(M^{(2)}(z)h, h) < \infty\right\}.$$

Линейное многообразие S_0 плотно в $\ell_2(\mathbb{N})$. Действительно, предположим, что $h \in \ell_2(\mathbb{N})$ и $h \perp S_0$, тогда $(h, a)_{\ell_2(\mathbb{N})} = 0$ для всех $a \in S_0$, то есть

$$\sum_{j=1}^{n_0}(h_j - h_{j+1})\overline{a_j} = 0,$$

тогда, $h_j = h_{j+1}$. Следовательно, $h = 0$ и линейное многообразие S_0 плотно в ℓ_2. Значит, $\mathcal{D}$ плотно в $\ell_2(\mathbb{N})$, но $\mathcal{D} \ne \ell_2(\mathbb{N})$. По теореме 1.2.20 расширения A_2 и $(A_{Y,2})_K$ дизъюнктны, но не трансверсальны.

Замечание 6.2.17. *В случае конечного числа точечных взаимодействий в* $\mathbb{R}^3$ *расширения Фридрихса и Крейна трансверсальны [60]. В случае* $\mathbb{R}^2$ *расширения Фридрихса и Крейна не трансверсальны и* $\dim(\mathcal{D}[(A_{Y,2})_K]/\mathcal{D}[A_2]) = n-1$, *где* n *– число точек в* Y *и если* $n=1$, *то расширения Фридрихса и Крейна совпадают (см. [35, 75, 76, 21]).*

Выводы к главе 6

В шестой главе диссертации рассматриваются минимальные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями на плоскости и в пространстве.

- Во внутренних терминах описаны все неотрицательные гамильтонианы соответствующие конечному числу точечных взаимодействий на плоскости.

- Доказано, что системы дельта-функций Дирака $\{\delta(x-y),\ y \in Y\},\ x \in \mathbb{R}^d$, где Y – несходящаяся конечная или бесконечная последовательность точек в $\mathbb{R}^d,\ d=2,\ 3$, образуют базисы Рисса в своих линейных оболочках в пространствах $W_2^{-2}(\mathbb{R}^d)$, соответственно.

- Исследуются свойства дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса $(A_{Y,d})_F$ и Крейна $(A_{Y,d})_K$ минимальных операторов Шрёдингера $A_{Y,d},\ d=2,\ 3$, определенных формулами (6.4). Доказано, что в двухмерном случае расширения Фридрихса и Крейна дизъюнктны, но не трансверсальны, в трехмерном случае устанавлен критерий трансверсальности расширений Фридрихса и Крейна.

- Унифицированно построена конструкция граничных троек для $A^*_{Y,d}$ для обоих случаев $d=2$ и $d=3$, а также вычислены γ-поле и функция Вейля. Дано еще одно доказательство свойств дизъюнктности и трансверсальности расширений Фридрихса $(A_{Y,d})_F$ и Крейна $(A_{Y,d})_K$, используя свойства функции Вейля.

Выводы

В диссертации исследуются свойства неотрицательных симметрических операторов, а также исследуются свойства и описываютя их все неотрицательные самосопряженные или квази-самосопряженные расширения, в частности, операторы Шрёдингера с дельта потенциалами.

Исследуются симметрические операторы в дивергентной форме и их неотрицательные самосопряженные расширения, в частности, расширения Фридрихса и Крейна. Доказано, что каждый замкнутый плотно определенный неотрицательный симметрический оператор, имеющий дизъюнткные неотрицательные самосопряженные расширения, допускает бесконечно много факторизаций вида $\mathcal{L}\mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ – замкнутый неотрицательный симметрический оператор и $\mathcal{L}$ – его неотрицательное самосопряженное расширение. И дана параметризация такой факторизации через дизъюнктные самосопряженные расширения. Доказана возможность такой факторизации для неплотно определенного замкнутого неотрицательного симметрического оператора с бесконечными индексами дефекта, а в случае конечных индексов дефекта доказана невозможность факторизации такого вида.

Приведена конструкция операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ – замкнутый неотрицательный симметрический оператор и $\mathcal{L}$ – его неотрицательное самосопряженное расширение, таких, что $\operatorname{dom}(\mathcal{L}\mathcal{L}_0) = \{0\}$, в то время как оператор $\mathcal{L}_0\mathcal{L}$ плотно определен.

Развивается подход Арлинского-Цекановского для описания всех квази-самосопряженных m-аккретивных и m-секториальных расширений неотрицательного симметрического оператора во внутренних терминах. Дана параметризация всех неотрицательных гамильтонианов, соответствующих конечному числу точечных взаимодействий на плоскости, m-аккретивних и m-секториальных гамильтонианов, соответствующих конечному числу δ'-взаимодействий на прямой.

В диссертации установлены определенные связи между пространствами Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$, $W_2^1(\mathbb{R} \setminus Y)$ и гильбертовым пространством ℓ_2. С помощью установленных связей доказана базисность Рисса дельта-функций Дирака в своих линейных оболочках в негативных пространствах Соболева.

В дивергентной форме описаны экстремальные расширения Фридрихса и

Крейна минимальных операторов Шрёдингера, соответствующих бесконечному или конечному числу точечных δ, δ' и δ–δ' взаимодействий на прямой, доказана их трансверсальность, построены базисные граничные тройки и описаны все неотрицательные гамильтонианы.

Доказана дизъюнктность и нетрансверсальность расширений Фридрихса и Крейна минимального оператора Шрёдингера в случае бесконечного числа точечных взаимодействий на плоскости; дизъюнктность и дан критерий трансверсальности в случае бесконечного числа точечных взаимодействий в пространстве. Унифицированно построены базисные граничные тройки и вычислены функции Вейля для сопряженных операторов Шрёдингера в случае точечных взаимодействий на плоскости и в пространстве.

Литература

1. Арлинский Ю.М. Класс сжатий в гильбертовом пространстве / Ю.М. Арлинский // Укр. Мат. Журн. – 1987. – Т.39, № 6. – С.691-696. English translation in Ukr. Math. J. – 1987. – V.39, No 6. – P.560-564.

2. Арлински Ю.М. Квази-самосопряженные сжимающие расширения эрмитовых сжатий / Ю. Арлинский и Э. Цекановский // Теор. Функц., Функц. Анал. Приложен. – 1988. – №50. – С.9-16.

3. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве /Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М.: Наука, 1966. – 544с.

4. Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. - К.: Наукова думка, 1965. – 798с.

5. Березин Ф.А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф.А. Березин, Л.Д. Фаддеев. // Докл.Акад.Наук СССР. – 1967. – Т. 137, № 5. – С.1011-1014.

6. Бирман М.Ш. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов / М.Ш. Бирман. // Мат. сб. – 1956. – Т.38, №4. – С.431-450.

7. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии / В.М. Брук // Мат. сб. – 1976. – Т.100, №2. – С.210-216.

8. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений / М.И. Вишик // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1952. – №1. – С.187-246.

9. Голощапова Н.И. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шредингера с точечными взаимодействиями / Н.И. Голощапова, В.П. Заставный, М.М. Маламуд // Матем. заметки. – 2011. – Т.90, №1 – С.151-156.

10. Голощапова Н.И. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными δ- и δ'-взаимодействиями / Н.И. Голощапова, Л.Л. Оридорога // Матем. заметки. – 2008. – Т.84, №1. – С.127–131.

11. Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / М.Л. Горбачук, В.И. Горбачук. – К.: Наук. Думка, 1984. – 284с.

12. Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. М.: Наука. – 1965. – 448с.

13. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. М: ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 1108с.

14. Деркач В.А. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией / В.А. Деркач и М.М. Маламуд // Препринт 85-9, Физ.-Техн. Инст. Акад. Наук Украины. – 1985. – С.50

15. Деркач В.А. Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция / В.А. Деркач, М.М. Маламуд, Э.Р. Цекановский // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №2. – С.151-158 English translation in Ukr. Math. J. – 1989. – V.41, №2. – P.136-142.

16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. / Т. Като - М.: Мир. – 1972.- 740с.

17. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / А.Н. Кочубей // Мат. Заметки. – 1975. – Т.17, №1. – С.41-48.

18. Кочубей А.Н. Одномерные точечные взаимодействия / А.Н. Кочубей // Укр. Мат. Журн. – 1989. – Т.41, №10. – С.90-95.

19. Кошманенко В.Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов / В.Д. Кошманенко. К.: Наукова Думка, 1993. – 195с.

20. Кошманенко В.Д. Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів / В.Д. Кошманенко, М.Є. Дудкін. К.: Праці Інституту математики НАН України т.96. 2013. – 320с.

21. Ковалев Ю.Г. Неотрицательные 2D Гамильтонианы для точечных взаимодействий / Ю.Г. Ковалев // Весник ВНУ им.В.Даля, Луганск. – 2010. – №8(150). – С.150-159.

22. Ковалев Ю.Г. К теории неотрицательных гамильтонианов на плоскости и в пространстве / Ю.Г. Ковалев // УМБ, Донецк. – 2014. – Т.11, №2. – С. 203-226. English translation in Journal of Math. Sciences. – 2015. – V.204, №3. – P.315-322.

23. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения / М.Г. Крейн // Мат. сб. – 1947. – Т.20, №3. – С.431-495.

24. Крейн М.Г. О Q-функциях и сс-резольвентах неплотно определенного эрмитова сжатия / М.Г. Крейн и И.Е. Овчаренко // Сибирский Мат. Ж. – 1977. – №18. – С.728-746.

25. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е.М. Ландис. М.: Наука, 1971. – 288с.

26. Лянце В.Е. Методы теории неограниченных операторов / В.Е. Лянце, О.Г. Сторож. К.: Наукова Думка, 1983. – 144с.

27. Маламуд М.М. О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами / М.М. Маламуд // Укр.Мат. Журн. – 1992. – Т.44, №2. – С.215–234. English translation in Ukr. Math. J. – 1992. – V.44, №2. – P.190-204.

28. Михайлец В.А. Одномерный оператор Шредингера с точечными взаимодействиями / В.А. Михайлец // Доклады РАН. – 1994. – №49. – С.345-349.

29. Михайлец В.А. О разрешимых и секториальных граничных задачах для операторного уравнения Штурма — Лиувилля / В.А. Михайлец // Укр. Мат. Ж. – 1974. – Т.26, №4. – С.450-459.

30. Наймарк М.А. О квадрате замкнутого симметрического оператора / М.А. Наймарк // Докл. Акад. Наук СССР. – 1940. – Т.26. – С.863-867.

31. Наймарк М.А. Дополнение к докладу "О квадрате замкнутого симметрического оператора"/ М.А. Наймарк // Докл. Акад. Наук СССР. – 1940. – Т.28. – С.206-208.

32. Рофе-Бекетов Ф.С. Числовая область линейного отношения и максимальное отношение / Ф.С. Рофе-Бекетов // Теория Функций, Функц. Анал. и Прилож. – 1985. – Т.44. – С.103-112.

33. Цекановский Э. Несамосопряженные аккретивные расширения положительных оператров и теоремы Фридрихса-Крейна-Филипса / Э. Цекановский // Функ. Анал. и Приложен. – 1980. – Т.14, №2. – С.87-89.

34. Abramovitz M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables Dover Publications /M. Abramovitz, I. Stegun. – New-York, 1972. – 832p.

35. Adamyan V. Nonnegative Perturbations of Nononegative Self-adjoint Operators / V. Adamyan // Methods Funct.Anal.Topology. – 2007. – V13, №2. – P.103-109.

36. Albeverio S. Solvable models in quantum mechanics/S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hϕegh-Krohn, and H. Holden. Texts and Monographs in Physics, New York: Springer-Verlag, 1988. – 452p.

37. Albeverio S. Spectral theory of semibounded Sturm-Liouville operators with local interactions on a discrete set. / S. Albeverio, A. Kostenko, and M. Malamud // J. Math. Phys. – 2010. – V51, №10. – P.24

38. Albeverio S. Singular perturbations of differential operators and solvable Schrodinger type operators. / S. Albeverio, P. Kurasov // Cambridge University Press, 2000.

39. Ando T. Positive selfadjoint extensions of positive symmetric operators. / T. Ando, K. Nishio // Tohóku Math. J. – 1970. – V22. – P.65-75.

40. Arens R. Operational calculus of linear relations. / R. Arens // Pacific J. Math. – 1961. – №11. – P.9-23.

41. Arlinskiĭ Yu.M. Positive spaces of boundary values and sectorial extensions of a nonnegative symmetric operator / Yu.M. Arlinskiĭ // Ukrainian Math. Zh. – 1988. – V40, №1. – P.5–10.

42. Arlinskiĭ Yu.M. Characteristic functions of operators of the class $C(\alpha)$ / Yu.M. Arlinskiĭ // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1991 – №2. – P.13–21.

43. Arlinskiĭ Yu.M. On proper accretive extensions of positive linear relations / Yu.M. Arlinskiĭ // Ukr.Math.Journ. – 1995. – V47, №6. – P.723–730.

44. Arlinskiĭ Yu.M. Maximal sectorial extensions and associated with them closed forms / Yu.M. Arlinskiĭ // Ukr. Math. J. – 1996. – V.48, №6. – P.809–827.

45. Arlinskiĭ Yu.M. Extremal extensions of sectorial linear relations / Yu.M. Arlinskiĭ // Matematichnii Studii. – 1997. – V.7, №1. – P.81-96.

46. Arlinskiĭ Yu.M. On functions connected with sectorial operators and their extensions / Yu.M. Arlinskiĭ // Int. Equat. Oper. Theory – 1999. – V.33, №2. – P.125–152.

47. Arlinskiĭ Yu.M. Abstract boundary conditions for maximal sectorial extensions of sectorial operators / Yu.M. Arlinskiĭ // Math. Nachr. – 2000. – V.209. – P.5-36.

48. Arlinskiĭ Yu. Conservative Realizations of Herglotz-Nevanlinna functions / Yu. Arlinskiĭ, S. Belyi, and E. Tsekanovski // Birkhauser Verlag: Operator Theory: Advances and Applications. – 2011. – V.217.

49. Arlinskiĭ Yu.M. Q-functions of Hermitian contractions of Kreĭn – Ovcharenko type / Yu.M. Arlinskiĭ, S. Hassi, and H.S.V. de Snoo // Integral Equations and Operator Theory. – 2005. – V.53, №2. – P.153-189.

50. Arlinskiĭ Yu. On the class of extremal extensions of a nonnegative operators / Yu. Arlinskiĭ, S. Hassi, Z. Sebestyen, H. de Snoo // Operator Theory: Advan. and Appl. – 2001. – V.127. – P.41-81.

51. Arlinskiĭ Yu. Quasi-self-adjoint maximal accretive extensions of nonnegative symmetric operators / Yu. Arlinskiĭ, Yu. Kovalev and Ed. Tsekanovskiĭ // TEKA Kom. Motor. i Energ. Roln. – 2010. –OL PAN, XA. – P.6–14.

52. Arlinskiĭ Yu. Accretive and sectorial extensions of nonnegative symmetric operators / Yu. Arlinskiĭ, Yu. Kovalev and Ed. Tsekanovskiĭ // Complex Anal. Oper. Theory. – 2012. – V.6. – P.677-718.

53. Arlinskiĭ Yu. *Factorizations of nonnegative symmetric operators*/ Yu. Arlinskii, Yu. Kovalev // MFAT – 2013. – V.19, №3. – P.211–226.

54. Arlinskiĭ Yu. Operators in divergence form and their Friedrichs and Kreĭn extensions / Yu. Arlinskiĭ, Yu. Kovalev // Opuscula Mathematica – 2011. – V.31, №4. – P.501-517.

55. Arlinskiĭ Yu.M. Non-self-adjoint contractive extensions of Hermitian contractions and M.G. Kreĭn's theorems / Yu.M. Arlinskiĭ and E.R. Tsekanovskiĭ // Uspekhi mat. nauk. – 1982. – V.37, №1. – P.131–132.

56. Arlinskiĭ Yu.M. Generalized resolvents of quasi-self-adjoint contracting extensions of a Hermitian contraction / Yu.M. Arlinskiĭ and E.R. Tsekanovskiĭ // Ukrain. Mat. Zh. – 1983. – V.35, №5. – P.15-29.

57. Arlinskiĭ Yu. On sectorial extensions of positive hermitian operators and their resolvents / Yu. Arlinskiĭ and E. Tsekanovskiĭ // Dokl. Akad. Nauk Armenian SSR – 1984. – V.5 – P.199–202.

58. Arlinskiĭ Yu. On the theory of non-negative self-adjoint extensions of a non-negative symmetric operator / Yu. Arlinskiĭ and E. Tsekanovskiĭ // Report of National Academy of Scinces of Ukraine. – 2002. – №11. – P.30-37.

59. Arlinskiĭ Yu.M. On von Neumann's problem in extension theory of nonnegative operators / Yu.M. Arlinskiĭ, E.R. Tsekanovskiĭ // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2002. – V.10, №10. – P.3143–3154.

60. Arlinskiĭ Yu.M. The von Neumann problem for nonnegative symmetric operators / Yu.M. Arlinskiĭ, E.R. Tsekanovskiĭ // Int. Equat. Oper. Theory. – 2005. – V.51, №3. – P.315–356.

61. Arlinskiĭ Yu. Krein's research on semi-bounded operators, its contemporary developments, and applications / Yu. Arlinskiĭ, E. Tsekanovskiĭ // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – №190. – P.65–112.

62. Arsene Gr. Completing matrix contractions / Gr. Arsene and A. Geondea // J. Oper. Theory – 1982. – №7. – P.179-189.

63. Ashbaugh, M. A Survey on the Kreĭn-von Neumann Extension, the Corresponding Abstract Buckling Problem, and Weyl-type Spectral Asymptotics for Perturbed Kreĭn Laplacians in Nonsmooth Domains / Gesztesy, F., Mitrea, M., Shterenberg, R., Teschl, G.// Operator Theory: Advances and Applications, **232** (2013), 1—106.

64. Bozhok R.V. Parametrization of Supersingular Perturbations in the Method of Rigged Hilbert Spaces/R.V. Bozhok, V.D. Koshmanenko// Russ. J. Math. Phys. – 2007. – V.14, №4. – P.409-416.

65. Brasche J.R. Has every symmetric operator a closed restriction whose square has a trivial domain? / J.R. Brasche and H. Neidhardt // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1993. – V.58. – P.425–430.

66. Buschmann D. One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions/D. Buschmann, G. Stolz, J. Weidmann// J. Reine Angew. Math. – 1995. – V.467. – P.169-186.

67. Chernoff P.R. A semibounded closed symmetric operator whose square has trivial domain / P.R. Chernoff // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V.89. – P.289–290.

68. Deift P.A. Applications of a commutation formula / P.A. Deift // Duke Math. J. – 1977. – V.45, №2. – P.267–310.

69. Davis Ch. Norm preserving dilations and their applications to optimal error bounds / Ch. Davis, W.M. Kahan, and H.F. Weinberger // SIAM J. Numer. Anal. – 1982. – V.19, №3. – P.445–469.

70. Derkach V.A. Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps / V.A. Derkach and M.M. Malamud // J. Funct. Anal. – 1991. – V.95, №1. – P.1-95.

71. Derkach V.A. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem / V.A. Derkach, M.M. Malamud // J. Math. Sci. (New York) – 1995. – V.73. – P.141–242.

72. Douglas R.G. On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space / R.G. Douglas // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – V.17. – P.413–416.

73. Fillmore P.A. On operator ranges / P.A. Fillmore and J.P. Williams // Advances in Math. – 1971. – №7. – P.254-281.

74. Gesztezy F. One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a discrete set / F. Gesztezy, W. Kirsch // J. Reine Angew. Math. – 1985. – V.362. – P.27-50.

75. Gesztesy F. Some aplications of operator-valued Herglotz functions / F. Gesztesy, N. Kalton, K. Makarov, and E. Tsekanovskiĭ // Oper.Theory, Adv. and Appl. – 2001. – V.123. - P.271–321.

76. Goloschapova N. Multi-dimensional Schrödinger operators with point interactions / N. Goloschapova // MFAT. – 2011. – V.17, №2. – P.126-143.

77. Goloshchapova G. Radial positive definite functions and spectral theory of the Schrödinger operators with point interactions / N. Goloshchapova, M. Malamud, and V. Zastavnyi // Math. Nachr. – 2012. – V.285, №14-15. – P.1839–1859.

78. Gorbachuk V.I. Extension theory of symmetric operators and boundary value problems / V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk, and A.N. Kochubeĭ // Ukr. Mat. Z. – 1989. – V.41, №10. – P.1298–1313.

79. Hassi S. A general factorization approach to the extension theory of nonnegative operators and relations / S. Hassi, A. Sandovichi, H. de Snoo, and H. Winkler // J.Oper.Theory. – 2007. – V.58, №2. – P.351–386.

80. Kochubei A.N. Elliptic operators with boundary conditions on a subset of measure zero/ A.N. Kochubei// Funct. Anal. Appl. – 1982. – V.16, №2. – P.137-139.

81. Kostenko A. 1–D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set / A. Kostenko and M. Malamud // J. Differential Equations. – 2010. – №249. – P.253-304.

82. Kovalev Yu.G. 1D Nonnegative Schrödinger operators with point interactions / Yu.G. Kovalev // Matematychni Studii. – 2013. – V.39, №2. – P.150-163.

83. Kuzhel A.V. Regular extensions of Hermitian operators / A.V. Kuzhel, S.A. Kuzhel // VSP, the Netherlands. – 1998.

84. Lyantse V.E. On the Theory of One-Point Boundary-Value Problem for Laplas Operator / V.E. Lyantse, H.B. Majorga // Function Theory, Functional Analysis and their Applications. – 1982. – №38. – P.84–91.

85. Malamud M.M. On the unitary equivalence of absolutely continuous parts of selfadjoint extensions / M.M. Malamud and H. Neidhard // Journ. Funct. Anal. – 2011. – V.260, №3. – P.613-638.

86. Malamud M.M. Spectral theory of Schrödinger operators with infinitely many point interactions and radial positive definite functions / M.M. Malamud and K. Schmüdgen // Journ.of Funct. Anal. – 2012. – V.263. – P.3144—3194.

87. Mikhailets V.A. Spectral properties of the one-dimensional Schrödinger operator with point intersections / V.A. Mikhailets // Reports on Mathematical Physics. – 1995. – V.36, №2/3. – P.495-500.

88. Neumann J. von Zur Theorie des Unbeschränkten Matrizen / J. von Neumann // J. Reine Angew. Math. – 1929. – V.161. – P.208–236.

89. Prokaj V. On Friedrichs extensions of operators / V. Prokaj, Z. Sebestyén // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1996. – V.62. – P.243–246.

90. Reed M. Methods of modern mathematical Physics, II: Fourier Analysis, Self-adjoiness. / M. Reed and B. Simon. Academic Press, New-York, San-Francisco, London, 1975.

91. Sebestyén Z. Restrictions of positive selfadjoint operators / Z. Sebestyén, J. Stochel // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1991. – V.55. – P.149–154.

92. Sebestyén Z. Characterizations of positive selfadjoint extensions / Z. Sebestyén, J. Stochel // Proceedings of the AMS. – 2007. – V.135, №5. – P.1389–1397.

93. Sz.-Nagy B. Harmonic analysis of operators on Hilbert space / B. Sz.-Nagy and C. Foias. North-Holland, New York, 1970.

94. Schmüdgen K. On domains of powers of closed symmetric operators / K. Schmüdgen // J. Oper. Theory. – 1983. – V.9. – P.53–75.

95. Shmul'yan Yu.L. Blocks of a contractive operator matrix / Yu.L. Shmul'yan and R.N. Yanovskaya // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1981. – №7. – P.72-75.

96. Young R.M. An introduction to nonharmonic Fourier Series / R.M. Young. Academic Press, New York, 1980.