

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

КУЗЕНКОВ Олександр Олександрович

УДК 519.8

**ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН:
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, МЕТОДИ, АЛГОРИТМИ,
ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Харків – 2026

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України

Офіційні опоненти:

член-кореспондент Національної академії наук України, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Стецюк Петро Іванович

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
НАН України,
завідувач відділом методів негладкої оптимізації;

доктор технічних наук, професор

Скоб Юрій Олексійович

Національний аерокосмічний університет
«Харківський авіаційний інститут»,
професор кафедри математичного
моделювання та штучного інтелекту;

доктор технічних наук,

старший науковий співробітник

Чугай Андрій Михайлович

Інститут енергетичних машин та систем ім.
А.М. Підгорного НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
нелінійної механіки та математичного
моделювання

Захист відбудеться «20» травня 2026 р. о 14 год. 00 хв. На засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.051.09 при Харківському національному університеті імені В.Н.Каразіна за адресою: 61022, м.Харків, майдан Свободи, 4
Безпечний простір_____

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна за адресою 61022, м.Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий «11» квітня 2026 р.

Учений секретар

Спеціалізованої вченої ради Д 64.051.09



Є.С.Меняйлов

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота є подальшим розвитком теорії оптимального розбиття множин (ОРМ), що є новим розділом нескінченновимірної математичної програмування з булевими змінними. Для розв'язання динамічних задач оптимального розбиття, застосовуються сучасні чисельні методи, субградієнтні методи з розтягом простору та інші методи негладкої оптимізації. Для отримання розв'язку систем диференціальних рівнянь використовуються аналітичні та чисельні методи, а для якісного дослідження таких систем якісна теорія диференціальних рівнянь, зокрема, метод Ляпунова.

Актуальність роботи. Широкий перелік практично важливих задач різного типу та спрямованості, різних галузей та складності можна звести до задач розбиття множин на підмножини з мінімізацією/максимізацією певного критерію або оптимізацією значення цільового функціоналу. До таких задач можна віднести задачі класифікації, кластеризації, розміщення, маршрутизації, розбиття, покриття, розподілу ресурсів, оптимального керування тощо. Умовно такі задачі, залежно від прикладного змісту, можна поділити на неперервні (для континуальної множини, що підлягає розбиттю) та дискретні.

До найпоширеніших задач, що класифікуються як неперервні, можна віднести нескінченновимірні транспортні задачі та нескінченновимірні задачі розміщення підприємств. У таких задачах вважається, що область, яка підлягає розбиттю, неперервно заповнена споживачами. Основною метою розв'язання таких задач є розбиття множини на підмножини, що обслуговуватимуться центрами забезпечення/виробництва для мінімізації витрат на транспортування продукції від центру постачання до споживача.

Широкий перелік задач у різних постановках обумовлений змістовним спектром варіацій таких задач. Зокрема, задачі в постановці можуть відрізнятися складністю (лінійні, нелінійні), кількістю продуктів (однопродуктові, багатодуктові), стохастичністю (стохастичні, детерміновані), статичністю (статичні, динамічні), розміщенням центрів (з фіксованими центрами та з їх відшукуванням) та іншими аспектами. Таким чином, задачі оптимального розбиття множин у своїй математичній постановці можуть по-різному комбінувати названі

характеристики, змінюючи не тільки математичну постановку задачі, але й застосовні методи, що суттєво залежать від обмежень задачі та прикладного застосування таких постановок. Слід зазначити, що результати застосування сучасних методів розв'язання таких задач показують високу адекватність та є інтуїтивно зрозумілими, проте, на відміну від евристичних рішень, є більш чисельно конкретизованими, що дозволяє отримати рішення з більш оптимальним значенням цільового функціоналу.

Одним із вагомих та малодосліджених у наш час напрямів розвитку теорії оптимального розбиття множин є відповідні задачі в динамічних постановках. Переважна більшість задач, що розглядаються та досліджуються, містять статичні параметри. Проте очевидно, що, принаймні, такі фактори, як вартість перевезення та потужність виробництв, можуть змінюватися з плином часу або залежати, наприклад, від типу продукції, що виготовляється, рівня інфляції, вартості паливно-мастильних матеріалів тощо. Намагання власників виробництв розширити спектр товарів, збільшити обсяги виробництва або амортизувати транспортні засоби для зменшення середньої вартості перевезення одиниці продукції є рушійними для розвитку бізнесу.

Серед вітчизняних та закордонних науковців існує ряд опублікованих робіт з тематики динамічних задач теорії оптимального розбиття множин. Проте в цих роботах під динамічними аспектами, здебільшого, розуміється не стільки динамічність властивостей параметрів моделі, скільки застосування управління до системи, в якій можливі динамічні прояви. Саме тому актуальними у наш час залишаються динамічні задачі оптимального розбиття множин, де під динамічністю розуміється мінливість у часі ключових параметрів системи та залежність оптимального розбиття від фазової траєкторії заданої динамічної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження проводилися відповідно до планів наукових досліджень науково-дослідної лабораторії оптимізації складних систем кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара у межах держбюджетних тем:

«Математичні моделі і методи оптимізації складних систем на основі нелінійної теорії оптимального розбиття множин» (№ держреєстрації 0112U000193, 2012–2014 рр.), «Математичні моделі та алгоритми розв’язання неперервних задач покриття на основі теорії оптимального розбиття множин» (№ держреєстрації 0115U002392, 2015–2017 рр.), «Розробка математичних моделей та алгоритмів розв’язання прикладних задач класифікації, кластеризації на основі теорії оптимального розбиття множин» (№ держреєстрації 0119U100600, 2019–2021 рр.), а також у рамках наукових тем «Математичні моделі, методи та алгоритми аналізу складних систем» (№ держреєстрації 0113U003558, 2013–2015 рр.), «Теоретичні основи математичних моделей та методів дослідження складних систем» (№ держреєстрації 0116U002214, 2016–2018 рр.), «Математичні моделі, методи та алгоритми розв’язання задач аналізу складних систем» (№ держреєстрації 0119U101302, 2019–2021 рр.) при кафедрі обчислювальної математики та математичної кібернетики відповідно до тематичних планів науково-дослідних робіт Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Мета і завдання дослідження. *Мета роботи* полягає у створенні теоретичної методології, зокрема, методів і алгоритмів розв’язання динамічних задач оптимального розбиття множин як у класичних, так і в ускладнених постановках. Це включає побудову нових ефективних алгоритмів та методів на основі обґрунтованих підходів та їх числову реалізацію.

Для досягнення означеної мети були поставлені такі *основні завдання дослідження*:

- формалізувати нову динамічну задачу оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин;
- розробити новий клас математичних моделей динамічної задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин;
- розробити метод та алгоритм розв’язання нового класу математичних моделей динамічної задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин;

- формалізувати нову динамічну задачу оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин;
- розробити новий клас математичних моделей динамічної задачі оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин;
- розробити метод та алгоритм розв'язання нового класу математичних моделей динамічної задачі оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин;
- формалізувати нову динамічну задачу оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин в умовах невизначеності;
- розробити новий клас математичних моделей динамічної задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин в умовах невизначеності;
- розробити метод та алгоритм розв'язання нового класу математичних моделей динамічної задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин в умовах невизначеності;
- розробити програмне забезпечення для розв'язання нових класів динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами та відшукуванням їх координат в тому числі в умовах невизначеності;
- здійснити імплементацію нового класу математичних моделей динамічних задач оптимального розбиття множин в прикладних задачах охорони здоров'я, планування регіональної інфраструктури та використання регіональних військових потужностей;
- з використанням сучасних чисельних методів реалізувати чисельний експеримент для підтвердження адекватності нових математичних моделей динамічних задач оптимального розбиття множин.

Об'єкт дослідження — процес математичного моделювання складноорганізованих технічних систем.

Предмет дослідження — методи та алгоритми розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин та їх застосування в конкретних прикладних задачах.

Методи дослідження включають підходи з теорії неперервних задач оптимального розбиття, якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії некласичних задач оптимізації, теорії двоїстості та методи недиференційованої оптимізації, зокрема r -алгоритм Н.З.Шора.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- вперше узагальнено класифікацію динамічних задач оптимального розбиття множин залежно від типів параметрів, що дозволило враховувати їх динамічні зміни;
- вперше запропоновано методологію розв'язання неперервних динамічних задач оптимального розбиття множин на основі інтеграції методів теорії оптимального розбиття множин, якісної теорії диференціальних рівнянь і методів негладкої оптимізації;
- вперше розроблено методи розв'язання динамічних задач оптимального розбиття з відшукуванням центрів підмножин із застосуванням r -алгоритму Шора, що дозволило враховувати негладкість цільової функції;
- вперше розроблено метод нейро-нечіткої ідентифікації параметрів у динамічних задачах оптимального розбиття множин в умовах невизначеності;
- набули подальшого розвитку математичні моделі задач оптимального розбиття множин, що дозволило враховувати еволюцію параметрів системи в часі;
- набули подальшого розвитку методи розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин шляхом побудови відповідних чисельних схем з урахуванням аналізу якісних властивостей систем диференціальних рівнянь;
- удосконалено моделі динамічних задач оптимального розбиття множин в умовах невизначеності із застосуванням теорії оптимального розбиття множин та нечіткої логіки;
- удосконалено підходи до моделювання оптимізаційних задач динамічного розбиття множин із формулюванням нових постановок прикладних задач за умов параметричної невизначеності.

Практичне значення одержаних результатів дисертаційної роботи полягає в розробці нових ефективних методів і алгоритмів для розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин, які мають теоретичне

обґрунтування та програмну реалізацію. Створені програмні комплекси застосовані для розв'язання прикладних оптимізаційних проблем, що у формалізованому вигляді зводяться до неперервних задач оптимального розбиття множин. Серед таких задач:

– зонування територій для забезпечення доступу до медичних установ в умовах поширення інфекцій, що підтверджується довідкою про впровадження результатів дисертаційного дослідження на рівні Дніпропетровської обласної державної адміністрації та Дніпропетровської обласної ради;

– побудова оптимальних траєкторій у процесах тривимірного друку, що підтверджується довідкою про впровадження результатів дисертаційного дослідження на ТОВ “Скайрора” (Skyroga UA);

– оцінка ефективності розміщення центрів гірничого обладнання до місць видобутку корисних копалин, що підтверджується актом про впровадження науково-прикладних розробок придніпровського наукового центру НАН України та МОН України;

– динамічне розміщення вогневих груп, що підтверджується пам'ятним нагрудним знаком “За сприяння Повітряним Силам Збройних Сил України”.

Результати дисертаційної роботи впроваджено в навчальний процес Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара під час викладання автором дисциплін «Математичні основи інформаційних технологій» та «Основи системного аналізу», а також у процесі керівництва курсовими й дипломними роботами студентів факультету прикладної математики та інформаційних технологій, які навчалися за спеціальностями F1 (113) – прикладна математика та F4 (124) – системний аналіз.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наукові результати, викладені в дисертаційній роботі, отримані автором особисто, зокрема й визначення загального плану досліджень. У працях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в такому: [1] – постановка чисельного експерименту, якісний аналіз математичної моделі; [2], [4] – побудова математичної моделі, якісний аналіз математичної моделі, постановка чисельного експерименту; [3], [5], [6] – побудова математичної моделі, постановка

чисельного експерименту, ретроспективний аналіз отриманих результатів; [7], [13] – побудова математичної моделі, якісний аналіз математичної моделі, постановка чисельного експерименту, прикладна інтерпретація отриманих результатів; [8], [9], [10] – побудова математичної моделі, якісний аналіз математичної моделі, постановка чисельного експерименту; [14] – постановка задачі, побудова математичної моделі; [15], [19] – постановка задачі, побудова математичної моделі, постановка чисельного експерименту; [16] – побудова математичної моделі, формалізація методу та алгоритму дослідження; [17], [18], [20] – формалізація задачі, побудова математичної моделі, розробка алгоритму, інтерпретація отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні ідеї, принципи, положення і результати дисертаційного дослідження доповідалися й обговорювалися на наукових конференціях та семінарах різного рівня, серед яких: II Всеукраїнська конференція з електроніки та комп'ютерної інженерії (UKRCON 2019); XVIII, XIX, XX, XXI, XXII Міжнародні науково-практичні конференції “Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем” (МПЗІС 2020–2024); III Міжнародна конференція з системного аналізу та інтелектуальних обчислень (SAIC 2022); Міжнародна конференція smart-технологій в міському інжинірингу (STUE 2023); II Всеукраїнська науково-практична конференція молодих науковців та студентів “Сучасні науково-технічні дослідження у контексті мовного простору” (Дніпро, 2023); XXVII Міжнародна конференція з автоматичного керування «Автоматика 2024» (Дніпро, 2024); науковий семінар “Теорія оптимальних рішень”.

Публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи повною мірою викладено в 44 наукових публікаціях, з них 26 статей [1–26] та 18 тез доповідей [27–44] у збірниках матеріалів міжнародних наукових конференцій. Серед 26 статей 13 статей [4–17] – у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України з відповідної дисертаційній роботі наукової галузі (відповідних спеціальностей), 7 статей [1–4, 18–20] – у наукових періодичних виданнях інших держав із напрямку, з якого підготовлено дисертацію, включених до наукометричної бази Scopus, серед яких 2 [1, 2] наукові публікації у

виданнях, віднесених до першого квартиля (Q1) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank або Journal Citation Reports та 6 [21–26] інших статей за темою дисертаційної роботи.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 200 найменувань на 22 сторінках та додатків на 47 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 308 сторінок, обсяг основного тексту – 229 сторінок. Робота містить 53 рисунки та 24 таблиці.

Автор висловлює щирю вдячність члену-кореспонденту НАН України, д.ф.-м.н. наук, професору Кісельовій Олені Михайлівні за консультації та цінні поради під час проведення наукових досліджень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність розробки методів та алгоритмів розв’язання динамічних задач оптимального розбиття множин; визначені: мета, об’єкт, предмет та методи дослідження; показано зв’язок з науковими програмами, планами, темами; відзначено наукову новизну, теоретичне і практичне значення одержаних результатів; висвітлено особистий внесок здобувача у працях опублікованих у співавторстві.

У **першому розділі** наведено огляд і критичний аналіз наукових публікацій з питань розв’язання задач ОРМ та визначено напрямки подальшого розвитку теорії ОРМ, зокрема з питань динамічних постановок класичних задач, методів та алгоритмів їх розв’язання. Відзначається, зокрема, що актуальним залишається дослідження задач ОРМ, в яких або окремі параметри, що входять до опису моделі змінюються з часом, або параметри є нечіткими, що обумовлює застосування окремих методів та алгоритмів до їх розв’язання. Обґрунтовано застосування динамічних постановок теорії ОРМ в прикладних задачах та особливості методів та алгоритмів, що в таких задачах мають місце.

У **підрозділі 1.1** структуровано інформацію та висвітлено роль основних етапів розвитку теорії оптимального розбиття множин.

У **підрозділі 1.2** здійснено класифікацію неперервних задач оптимального розбиття множин n -вимірному евклідовому простору E_n на підмножини.

У **підрозділі 1.3** детально розглянуто клас задач оптимального розбиття множин в нечітких постановках.

У **підрозділі 1.4** обґрунтовано актуальність та методика застосування біфуркаційного аналізу динамічних систем, що покладені в основу динамічних задач оптимального розбиття множин.

У **другому розділі** дисертації сформульовані математичні постановки класу динамічних задач ОРМ з фіксованими центрами та викладені методи та алгоритми щодо їх розв'язання побудовані на основі поєднання методів теорії ОРМ, якісної теорії диференціальних рівнянь та сучасних чисельних методів.

У **підрозділі 2.1** наведена математична постановка однопродуктової динамічної задачі розбиття множин з заданим положенням центрів підмножин. Зокрема вважається, що Ω – обмежена замкнена n -вимірною за Лебегом множиною в n -вимірному евклідовому просторі E_n . Сукупність n -вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ множини $\Omega \subset E_n$ (серед яких можуть бути і порожні) названо можливим розбиттям цієї множини, якщо $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, (i \neq j)$, де $N > 0$ – задане натуральне число; $\text{mes}(\cdot)$ – міра Лебега.

Позначено через \sum_{Ω}^N клас всіх можливих розбиттів множини $\Omega \subset E_n$ на задану кількість N її n -вимірних за Лебегом підмножин:

$$\sum_{\Omega}^N = \{ \bar{\omega} \equiv \{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \} \in \Omega^N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, i \neq j \}$$

Далі, через τ_1, \dots, τ_N позначено сукупність еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, які названо центрами цих підмножин: $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = 1, \dots, N$, і вважається, що координати усіх центрів задані.

Постановка задачі. Знайти розбиття $\bar{\omega} = \{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \} \in \sum_{\Omega}^N$ множини $\Omega \subset E_n$ і векторну функцію $c(x, \tau, t) = (c_1(x, \tau_1, t), \dots, c_N(x, \tau_N, t))$, визначену м.в. для $x \in \Omega$ при заданому фіксованому наборі центрів $\tau = \{ \tau_1, \dots, \tau_N \} \subset \Omega^N$ та всіх $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\bar{\omega} \in \sum_{\Omega}^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} F(\bar{\omega}, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (1)$$

де

$$F(\bar{\omega}, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt \quad (2)$$

за наявності умов

$$\begin{aligned} \frac{dc_i(x, \tau_i, t)}{dt} &= \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot f_j(c_j(x, \tau_j, t)), 0 \leq t \leq T \\ c_i(x, \tau_i, t_0) &= c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

м.в. для $x \in \Omega$, при фіксованих $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = 1, \dots, N$, та умови замкненості системи

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} = 1, j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Тут $c_i(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$, – шукані дійсні функції, визначені на $\Omega \times \Omega \times [0, T]$, які при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i$ неперервно диференційовані за аргументом t на відрізку $[0, T]$ м.в. для $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$, обмежені та вимірні за аргументом x на Ω для всіх $t \in [0, T]$; $m(x, \tau_i), c_{0i}(x, \tau_i)$ – задані дійсні функції, визначені на $\Omega \times \Omega$, обмежені та вимірні за аргументом $x \in \Omega$ при будь-якому фіксованому $\tau_i \in \Omega_i$ для всіх $i = 1, \dots, N$ (зокрема, $m(x, \tau_i)$ може відігравати роль метрики на $\Omega \times \Omega$); $f_i(c_i(x, \tau_i, t)), i = 1, \dots, N$, – задані дійсні функції, неперервні та ліпшицеві в області свого визначення; $\rho(x)$ – задана невід'ємна функція, обмежена та вимірна на Ω ; $a_i, i = 1, \dots, N$, – задані, як правило, невід'ємні числа; $0 \leq A_{ij} \leq 1, i, j = 1, \dots, N$, – задані числові параметри; $T > 0$ та $t_0 \in [0, T]$ задані.

Інтеграли розуміються в сенсі Лебега та вважається, що міра множини межових точок підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ дорівнює нулю.

Пара $(\bar{\omega}^*, c^*(x, \tau, t))$, що доставляє функціоналу (2) мінімальне значення на множині $\sum_{\Omega}^N \times L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])$ за умов (3), (4), названа оптимальним розв'язком задачі (1)–(4). При цьому розбиття $\bar{\omega}^* = \{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$ названо оптимальним розбиттям множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин, а векторну функцію

$c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])$ – оптимальною фазовою траєкторією динамічної системи (3) в задачі (1)–(4).

З предметної точки зору, незалежна змінна $t \in [0, T]$ у наведеній математичній постановці динамічної задачі оптимального розбиття може відігравати роль часової змінної, а $T > 0$ та $t_0 \in [0, T]$ – задані кінцевий та початковий моменти часу у досліджуваному динамічному процесі відповідно. Функції $f_i(c_i(x, \tau_i, t)), i = 1, \dots, N$, у диференціальних зв'язках (3), що відображають динаміку цін на транспортування, можуть мати різний вигляд, в залежності від предметного змісту, який в неї вкладається. В якості базової у 2-му розділі дисертаційної роботи обрана модель інфляції/дефляції у вигляді (5), що відображає схильність цін до постійного (експоненціального) зростання/спадання

$$\begin{aligned} f_i(c_i(x, \tau_i, t)) &= d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t), \\ x \in \Omega, \tau_i &= (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (5)$$

де $d_i, i = 1, \dots, N$ - задані дійсні коефіцієнти, що відображають схильність вартості транспортування одиниці продукції i -го центру споживачу до зростання/спадання.

У підрозділі 2.2 наведено обґрунтування методу розв'язання однопродуктової динамічної задачі розбиття множин з заданим положенням центрів підмножин. Вважається, що $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N$ – деяке можливе розбиття вихідної замкненої обмеженої вимірної множини $\Omega \subset E_n$ на N її вимірних за Лебегом неперетинних підмножин. Введено у розгляд на множині $\Omega \subset E_n$ характеристичні функції $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$ підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

і переформульована задача (1)–(4) у термінах характеристичних функцій підмножин у більш зручному вигляді. У переформульованому вигляді задачі потрібно знайти векторні функції $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x)), x \in \Omega$ і $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)), x \in \Omega$, при фіксованих $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$ та $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (6)$$

де функціонал $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot))$ має вигляд

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i dx dt, \quad (7)$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \} \quad (8)$$

за умов (3)-(4). Очевидно, що для функціонала $F(\bar{\omega}, c(\cdot, \cdot, \cdot))$ виду (2) і функціонала $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot))$ виду (7) виконується рівність $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = F(\bar{\omega}, c(\cdot, \cdot, \cdot))$.

Далі від задачі (6)–(8) за умов (3)–(4) з булевими значеннями функцій $\lambda_i(\cdot), i = 1, \dots, N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot), i = 1, \dots, N$, що змінюються на відрізьку $[0, 1]$.

Задача. Знайти векторні функції $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x)), x \in \Omega$ і $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)), x \in \Omega$ при фіксованих $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$ та $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (9)$$

де функціонал $J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot))$ має вигляд

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (10)$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \} \quad (11)$$

за умов (3)-(4).

Перша компонента $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ оптимального розв'язку такої задачі м.в. для $x \in \Omega$ і для кожного $i = 1, \dots, N$ має вигляд

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо виконується умова (13)} \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (12)$$

$$\int_0^T (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dt = \min_{k=\overline{1, N}} \left(\int_0^T (c_k(x, \tau_k, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dt \right) \quad (13)$$

при заданих $\tau_i \in \Omega, i = 1, \dots, N$.

У **підрозділі 2.3** наведено алгоритм розв'язання однопродуктової динамічної задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин у такому вигляді:

Крок 1. Множину Ω включаємо в n - вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою.

Крок 2. Задаємо значення функцій $c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$, з початкових умов (3) в вузлах сітки.

Крок 3. Покриваємо відрізок $[0, T]$ сіткою з кроком h_t .

Крок 4. Для кожного вузла сітки та для кожного $\tau_i, i = 1, \dots, N$ розв'язуємо задачу

Коші для системи ЗДР (3) на часовому відрізку $[0, T]$ та знаходимо функції

$$c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$$

Крок 5. Визначаємо характеристичну функцію $\lambda^*(x)$ у вузлах сітки з пункту 1 за формулами (12), (13) при знайдених $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$.

Крок 6. Знаходимо мінімальне значення цільового функціонала (10) при знайдених $\lambda^*(x)$ та $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$.

У **підрозділі 2.4** наведено вісім модельних задач, розв'язаних з використанням наведеного алгоритму для різних параметрів моделі. Наведені модельні задачі відрізняються кількістю центрів, кількість яких приймає значення від 2 до 5, початковою вартістю перевезення одиниці продукції для кожного центру та швидкістю збільшення/зменшення вартості перевезення одиниці продукції з плином часу. До кожної модельної задачі наведено прикладну інтерпретацію отриманих результатів, що дають змогу оцінити валив та залежність вартості транспортування у поточний момент із оптимальним розбиттям, що є розв'язком динамічної задачі оптимального розбиття з фіксованими центрами.

У **третьому розділі** дисертації сформульовані математичні постановки класу динамічних задач ОРМ з відшукуванням координат центрів підмножин. Наведені розроблені методи та алгоритми щодо їх розв'язання, що базуються на основі сучасних методів теорії ОРМ, якісної теорії диференціальних рівнянь та

сучасних чисельних методів.

У **підрозділі 3.1** наведена математична постановка однопродуктової динамічної задачі розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин. Зокрема вважається, що Ω – обмежена замкнена вимірنا за Лебегом множина в n -вимірному евклідовому просторі E_n .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ множини $\Omega \subset E_n$ (серед яких можуть бути і порожні) названо можливим розбиттям цієї множини, якщо $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, (i \neq j)$, де $N > 0$ – задане натуральне число; $\text{mes}(\cdot)$ – міра Лебега.

Позначено через \sum_{Ω}^N клас всіх можливих розбиттів множини $\Omega \subset E_n$ на задану кількість N її вимірних за Лебегом підмножин:

$$\sum_{\Omega}^N = \{\bar{\omega} \equiv \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Omega^N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, i \neq j\}$$

Далі, через τ_1, \dots, τ_N позначено сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ відповідно, які назвемо центрами цих підмножин: $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = 1, \dots, N$, і вважається, що координати усіх центрів невідомі та є такими, що підлягають знаходженню.

Постановка задачі. Знайти розбиття $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N$ множини $\Omega \subset E_n$, векторну функцію $c(x, \tau, t) = (c_1(x, \tau_1, t), \dots, c_N(x, \tau_N, t))$, визначену майже всюди (м.в.) для $x \in \Omega$, координати центрів $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$ та всіх $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\bar{\omega} \in \sum_{\Omega}^N ; \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N ; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} F(\bar{\omega}, \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (14)$$

де

$$F(\bar{\omega}, \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt \quad (15)$$

за наявності умов

$$\frac{dc_i(x, \tau_i, t)}{dt} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot f_j(c_j(x, \tau_j, t)), 0 \leq t \leq T \quad (16)$$

$$c_i(x, \tau_i, t_0) = c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$$

м.в. для $x \in \Omega$ та умови замкненості системи

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} = 1, j = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Тут $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$ - шукані центри підмножин з координатами $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega, i = 1, \dots, N$; $c_i(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$, - шукані дійсні функції, визначені на $\Omega \times \Omega \times [0, T]$, що є неперервно диференційованими за аргументом t на відрізку $[0, T]$ м.в. для $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$, обмежені та вимірні за аргументом x на Ω для всіх $t \in [0, T]$; $m(x, \tau_i), c_{0i}(x, \tau_i)$ - задані дійсні функції, визначені на $\Omega \times \Omega$, обмежені та вимірні за аргументом $x \in \Omega$ (зокрема, $m(x, \tau_i)$ може відігравати роль метрики на $\Omega \times \Omega$); $f_i(c_i(x, \tau_i, t)), i = 1, \dots, N$, - задані дійсні функції, неперервні та ліпшицеві в області свого визначення; $\rho(x)$ - задана невід'ємна функція, обмежена та вимірна на Ω ; $a_i, i = 1, \dots, N$, - задані, як правило, невід'ємні числа; $0 \leq A_{ij} \leq 1, i, j = 1, \dots, N$, - задані числові параметри; $T > 0$ та $t_0 \in [0, T]$ задані.

Інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо та вважається, що міра множини межових точок підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ дорівнює нулю.

Трійку $(\bar{\omega}^*, \tau^*, c^*(x, \tau, t))$, що доставляє функціоналу (15) мінімальне значення на множині $\sum_{\Omega}^N \times L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])$ за умов (16), (17), назвемо оптимальним розв'язком задачі (14)–(17). При цьому розбиття $\bar{\omega}^* = \{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$ назвемо оптимальним розбиттям множини $\Omega \subset E_n$ на N підмножин, $\tau^* = \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\} \subset \Omega^N$, $\tau_i^* = (\tau_i^{*(1)}, \dots, \tau_i^{*(n)}), i = 1, \dots, N$ оптимальними центрами та їх координатами відповідно, а векторну функцію $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])$ - оптимальною фазовою траєкторією динамічної системи (16) в задачі (14)–(17).

З предметної точки зору, незалежна змінна $t \in [0, T]$ у наведеній математичній постановці динамічної задачі оптимального розбиття може відігравати роль часової змінної, а $T > 0$ та $t_0 \in [0, T]$ – задані кінцевий та початковий моменти часу у досліджуваному динамічному процесі відповідно. Так, функції $f_i(c_i(x, \tau_i, t)), i = 1, \dots, N$, у диференціальних зв'язках (16), що відображають динаміку цін на транспортування, можуть мати різний вигляд проте як і у розділі 2 функція $f_i(c_i(x, \tau_i, t)), i = 1, \dots, N$ прийнято розглядати у вигляді (5). Базову функцію для моделі (14)-(17) обрано аналогічно з математичною моделлю наведеному у розділі 2 для наочної демонстрації позитивних змін у значеннях цільового функціоналу в однопродуктовій динамічній задачі оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин.

У **підрозділі 3.2** наведено обґрунтування методу розв'язання однопродуктової динамічної задачі розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин. Вважається, що $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N$ – деяке можливе розбиття вихідної замкненої обмеженої вимірної множини $\Omega \subset E_n$ на N її вимірних за Лебегом підмножин, що не перетинаються.

Введено у розгляд на множині $\Omega \subset E_n$ характеристичні функції $\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)$ підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, відповідно:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

і переформульовано задачу (14)–(17) у термінах характеристичних функцій підмножин у більш зручному вигляді. Потрібно знайти векторні функції $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x)), x \in \Omega$, $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)), x \in \Omega$ при $t \in [0, T]$ та координати центрів $\tau^* = \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\} \subset \Omega^N$, які забезпечують

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1; \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (19)$$

де функціонал $J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot))$ має вигляд

$$J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (20)$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \quad (21)$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\}$$

за умов (16)-(17). Очевидно, що для функціонала $F(\bar{\omega}, \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot))$ виду (15) і функціонала $J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot))$ виду (20) виконується рівність $J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = F(\bar{\omega}, \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot))$.

Далі від задачі (19)–(21) за умов (16)–(17) з булевими значеннями функцій $\lambda_i(\cdot), i = 1, \dots, N$, перейдено до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot), i = 1, \dots, N$, що змінюються на відрізку $[0, 1]$.

Задача. Знайти векторні функції $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x)), x \in \Omega$ і $c^*(x, \tau, t) = (c_1^*(x, \tau_1, t), \dots, c_N^*(x, \tau_N, t)), x \in \Omega$, центри $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$ при $t \in [0, T]$, які забезпечують

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma; \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (22)$$

де функціонал $J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot))$ має вигляд

$$J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (23)$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega; \quad (24)$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N\}$$

за умов (16)-(17).

Перша компонента $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \dots, \lambda_N^*(x))$ оптимального розв'язку такої задачі м.в. для $x \in \Omega$ і для кожного $i = 1, \dots, N$ має вигляд

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо виконується умова (26)} \\ 0, \text{ в іншому випадку} \end{cases} \quad (25)$$

$$\int_0^T (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dt = \min_{k=1, \dots, N} \left(\int_0^T (c_k(x, \tau_k, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dt \right). \quad (26)$$

У **підрозділі 3.3** наведено алгоритм розв'язання однопродуктової динамічної задачі оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин, що базується на одному з варіантів методу загального

градієнтного спуску з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних загальних градієнтів (r-алгоритм), спрямований в загальному випадку на пошук локальних мінімумів недиференційованої багатоекстремальної цільової функції

$$G(\tau) = \int_0^T \int_{\Omega} \inf_{k=1, \dots, N} (c_k(x, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx dt \rightarrow \inf$$

$$\tau \in \Omega^N \subset \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N$$

Зокрема, необхідно визначити i -ту компоненту вектора субградієнту $g_G^\tau(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$ функції

$$G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega} \inf_{i=1, \dots, N} c_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; t) \cdot m(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \rho(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} dt$$

в точці $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ наступним чином:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = g_G^{\tau_i}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \int_0^T \int_{\Omega} c_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; t) \times g_m^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \times$$

$$\times p(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} dt, i = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

де $g_m^{\tau_i}(x, \tau)$ - i -та компонента N - вимірного вектора субградієнту $g_M^\tau(x, \tau)$ функції $m(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$.

Для розв'язання задачі r-алгоритмом у В-формі включаємо область Ω у n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Для простоти вважатимемо $p(x) = 1$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою та переходимо до основного етапу.

Основний етап:

Крок 1. Обираємо початкове наближення $\tau = \tau^{(0)}$ та коефіцієнт розтягу простору $\alpha > 1$. Покласти $B_0^\tau = I_n$.

Крок 2. Задаємо значення функцій $c_{0i}(x)$, $i = 1, \dots, N$, з початкових умов (16) в вузлах сітки, та покриваємо відрізок $[0, T]$ сіткою з кроком h_t .

Крок 3. Для кожного вузла сітки розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (16) на часовому відрізку $[0, T]$ та знаходимо функції $c_i^{(k)}(x, t)$, $i = 1, \dots, N$.

Крок 4. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ вузлах сітки за формулами (18) коли $\tau = \tau^{(k)}$.

Крок 5. Обчислюємо $g_G(\tau)$ – за формулою (27) коли $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x), \tau = \tau^{(k)}$.

Крок 6. Обчислюємо ξ_k^τ за формулою $\xi_k^\tau = \frac{(B_k^\tau)^T g_G(\tau)}{\|(B_k^\tau)^T g_G(\tau)\|}$ при $\tau = \tau^{(k)}$.

Крок 7. Розраховуємо $\tau = \tau^{(k+1)}$ за формулою $\tau^{k+1} = P_\Pi(\tau^k - h_k B_k^\tau \xi_k^\tau)$

де P_Π - оператор проектування на Π .

Крок 8. Для кожного вузла сітки розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (16) на часовому відрізку $[0, T]$ та знаходимо функції $c_i^{(k+1)}(x, t), i = 1, \dots, N$.

Крок 9. Обчислюємо значення $\lambda^{(k+1)}(x)$ вузлах сітки за формулами (18) коли $\tau = \tau^{(k+1)}$.

Крок 10. Обчислюємо $g_G(\tau)$ – за формулою (27) коли $\lambda(x) = \lambda^{(k+1)}(x), \tau = \tau^{(k+1)}$.

Крок 11. Обчислити

$$\eta_k^\tau = \frac{(B_k^\tau)^T r_k^\tau}{\|(B_k^\tau)^T r_k^\tau\|}, r_k^\tau = g_G(\tau^{(k+1)}) - g_G(\tau^{(k)})$$

$$R_\beta(\eta_k^\tau) = I_n + (\beta - 1)\eta_k^\tau (\eta_k^\tau)^T, \beta = \frac{1}{a} < 1$$

$$B_{k+1} = B_k^\tau R_\beta(\eta_k^\tau)$$

Крок 12. Якщо умова

$$\|\tau^k - \tau^{k+1}\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (28)$$

не виконується, вважаємо $k = k + 1$ і переходимо до кроку 6, в іншому випадку переходимо до кроку 13.

Крок 13. Вважаємо $\lambda_*(x) = \lambda^{(n)}(x), c_*(x, t) = c^{(n)}(x, t), \tau_* = \tau^{(n)}$, де n – номер ітерації на якій виконалась умова (28).

Крок 14. Розраховуємо оптимальне значення цільового функціоналу по формулі

$$G(\tau) = \int_0^T \int_\Omega \inf_{i=1, \dots, N} (c_i(x, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt$$

при $\tau = \tau_*$.

У **підрозділі 3.4** наведено результати розв'язання шести модельних задач при різних параметрах математичної моделі. Зокрема, розглядаються модельні задачі з різною кількістю центрів. Зважаючи на те, що в якості базової для задачі з відшукуванням координат центрів так само, як і у другому розділі обрана модель (5), в підрозділі 3.4 наведено результати порівняльного аналізу наведених модельних задач з результатами відповідних модельних задач другого розділу. Показано координати оптимального розміщення центрів та значень цільового функціоналу, що для задач з розміщенням центрів прогнозовано приймає менші значення в порівнянні з відповідними модельними задачами другого розділу.

У **четвертому розділі** розглядається клас однопродуктових динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами в нечітких постановках. Наведено обґрунтування за яких умов може виникнути в таких задачах невизначеність, класифіковано такі умови та подано прикладну інтерпретацію невизначеності в динамічних задачах ОРМ.

У **підрозділі 4.1** наведена математична постановка нечіткої динамічної задачі оптимального розбиття множин. Так в постановці динамічної задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами (1)-(2) за умов (3)-(4) передбачалося, що усі параметри задані константами. Однак на практиці точні значення цих констант, як правило, невідомі або задані лінгвістично (нечітко). У підрозділі 4.1 розглянуто більш детально параметри a_1, \dots, a_N у цільовому функціоналі (7). Для виробничо-транспортних задач ці параметри задають постійні витрати підприємств. Залежно від обставин постійні витрати можуть включати витрати з експлуатації заводу, страховку і, можливо, утримання мінімального числа працівників. Ці витрати постійні і залишаються незмінними незалежно від обсягу випуску фірми. Зрозуміло, що у багатьох практичних виробничо-транспортних задачах величини цих параметрів (постійних витрат) залежать від багатьох факторів реального процесу, не врахованих у наведеній в роботі моделі. Модель з фіксованими значеннями параметрів a_1, \dots, a_N може виявитися занадто «грубою», тому що на практиці відомими бувають не конкретні точні значення параметрів, а множини їх можливих значень.

Для зняття невизначеності при завданні параметрів a_1, \dots, a_N у цільовому функціоналі (7) розглядають їх як нечіткі змінні, що, в свою чергу, залежать від нечітких факторів $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Такими факторами для постійних витрат виробництва можуть бути вартості засобів виробництва, вартості трудових, природних ресурсів та ін. Урахування подібної додаткової інформації ускладнює вихідну математичну модель, але, тим не менше, вона може виявитися прийнятно більш точною та адекватною, з прикладної точки зору, тому що враховує вплив додаткових факторів на параметри a_1, \dots, a_N .

Для формалізації нечіткості використовується нейро-нечіткі технології. Для цього параметри $a_i, i = 1, \dots, N$, представлено як параметри, що залежать від нечітких факторів $\gamma_j, j = 1, \dots, n$ у вигляді

$$a_i \equiv a_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (29)$$

Тоді цільовий функціонал (7) пропонується записати з нечіткими параметрами (29) у такому вигляді:

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t)m(x, \tau_i) + a_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n))\rho(x)\lambda_i dx dt . \quad (30)$$

У **підрозділі 4.2** представлено метод роз'язання динамічної задачі ОРМ з нечітким параметром у цільовому функціоналі, зокрема метод нейрон-нечіткої ідентифікації нечітких параметрів. Так для спрощення опису методу нейроннечіткої ідентифікації, кожний нечіткий параметр $a_i, i = 1, \dots, N$ позначено як a та розглянуто функціональну залежність виходу a від входів $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ у вигляді:

$$a = a(\gamma), \text{ де } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (31)$$

Для задачі ідентифікації передбачаються відомими:

1) області визначення входів і область зміни виходу для (31):

$$Y_i = [\gamma_{\min_i}, \gamma_{\max_i}] - \text{області визначення вхідних змінних } \gamma_i, i = 1, \dots, n, \quad (32)$$

$$D = [a_{\min}, a_{\max}] - \text{область зміни вихідної змінної } a; \quad (33)$$

2) експертно-експериментальна інформація про залежність (31) у вигляді вибірки з M пар даних про входи та вихід об'єкта $\{\gamma^{(m)}_{\text{exp}}, a^{(m)}_{\text{exp}}\}$, де $\gamma^{(m)}_{\text{exp}} = \{\gamma^{(m)}_{1_{\text{exp}}}, \gamma^{(m)}_{2_{\text{exp}}}, \gamma^{(m)}_{n_{\text{exp}}}\}$ - вхідний вектор в m -ій парі, $m = 1, \dots, M$.

Нейро-нечіткаа ідентифікація складної, як правило нелінійної, функціональної залежності складається з двох етапів:

перший етап (структурна ідентифікація) - побудова нечіткої моделі об'єкта (31) у вигляді нечіткої продукційної моделі за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язок виходу a та входів $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, як узгодженої множини окремих нечітких продукційних правил «ЯКЩО – ТО»;

другий етап (параметрична ідентифікація) - настройка параметрів нечіткої моделі з метою мінімізації відхилення результатів моделювання від експериментальних даних.

Перший етап нейро-нечіткої ідентифікації об'єкта (31) з декількома входами і одним виходом складається з таких блоків: фазифікація, нечітке логічне виведення, дефазифікація.

У блоці фазифікація для знаходження залежності (31) в явному вигляді будемо розглядати вхідні змінні $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ і вихідну змінну a як лінгвістичні змінні, задані на універсальних множинах (31)-(32) відповідно. Для оцінки лінгвістичних змінних a та $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ будемо використовувати терми з таких терм-множин:

$D = \{D_k\}$ – терм-множина змінної a , де D_k – k -й лінгвістичний терм змінної a , $k = 1, 2, \dots, L$, L – число різних класів виходу a . Для кожного класу D_k виберемо «найбільш характерного представника» $d_k \in D_k$ і назвемо його центром класу;

$Y_i = \{Y_{ir}\}$ – терм-множина змінної γ_i де Y_{ir} – r -й лінгвістичний терм змінної γ_i , $i = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, p_i$, p_i – кількість термів в терм-множині Y_i змінної γ_i . Причому, в загальному випадку, $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$.

Значення лінгвістичних термів D_k та Y_{ir} отримуємо на основі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, що моделюється (31).

Лінгвістичні терми $Y_{ir} \in Y_i$ та $D_k \in D$ розглядаються як нечіткі множини, задані на універсальних множинах, визначених в (32)-(33) відповідно. Кожний з нечітких термів $Y_{ir} \in Y_i$ представляє відповідну нечітку підмножину на множині

значень γ_i . А кожному нечітку множині, в свою чергу, задамо її узагальненою дзвоною функцією належності $\mu_{ir}(\gamma_i)$, яку представимо у вигляді:

$$\mu_{ir}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{\gamma_i - b_{ir}}{c_{ir}} \right|^{2t_{ir}}}, i = 1, \dots, n, r = 1, \dots, p_i \quad (34)$$

де c_{ir} – число у діапазоні $[0,1]$, яке характеризує суб'єктивну міру відповідності значення γ_i нечіткому терму Y_{ir} , b_{ir}, c_{ir}, t_{ir} – параметри, які спочатку обираються експертом, а потім налаштовуються на експериментальні дані: b_{ir} – координата максимуму функції $\mu_{ir}(\gamma_i)$, причому $\mu_{ir}(b_{ir}) = 1$, c_{ir} – коефіцієнт концентрації-розтягнення функції $\mu_{ir}(\gamma_i)$, t_{ir} – коефіцієнт крутизни функції $\mu_{ir}(\gamma_i)$, $t_{ir} > 0$.

Провівши операцію побудови нечіткої моделі по вхідним експертним даним, отримаємо нечітку модель у вигляді:

$$a = F(\gamma, B, C, T, W) \quad (35)$$

де $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – вхідний вектор,

$W = \{w_j^k\}, j = 1, \dots, s_k, k = 1, \dots, L$, набір вагових коефіцієнтів правил,

$B = \{b_{ij}^k\}, C = \{c_{ij}^k\}, T = \{t_{ij}^k\}$ – набори параметрів настройки функцій належності,

$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s_k, k = 1, \dots, L$;

F – функція зв'язку вхід-вихід, яка включає перетворення.

Якщо побудована модель (35) недостатньо точно описує модельований об'єкт (31), то необхідно налаштувати її, тобто знайти такі параметри B, C, T, W , які мінімізують відхилення між модельними (теоретичними, отриманими за моделлю (35)) і експериментальними даними.

Перейдемо до етапу настройки нечіткої моделі (35). Тоді в термінах математичного програмування завдання настройки нечіткої моделі може бути сформульована таким чином: знайти вектор (B, C, T, W) , який забезпечує

$$\|F(\gamma, B, C, T, W) - a_{\text{exp}}\| \rightarrow \min_{B, C, T, W} \quad (36)$$

Позначимо вектор $Q = (B, C, T, W)$ і запишемо задачу оптимізації у вигляді:

$$\varphi(Q) \rightarrow \min_Q, \quad (37)$$

де $\varphi(Q) = \|a - a_{\text{exp}}\|$, a – результати, розраховані за моделлю (35), a_{exp} – експериментальні дані.

Тут норма $\|\cdot\|$ визначається як евклідова метрика

$$\|a - a_{\text{exp}}\| = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a_{\text{exp}}^{(m)})^2}, \quad (38)$$

де $a_{\text{exp}}^{(m)}$ – значення вихідної змінної a з m -ої пари експериментальної вибірки $\{\gamma^{(m)}_{\text{exp}}, a_{\text{exp}}^{(m)}\}, m = 1, \dots, M$, $a^{(m)}$ – результати, розраховані за моделлю для значень вхідних змінних з m -ої пари експериментальної вибірки.

Для розв'язання задачі оптимізації (37) застосуємо метод мінімізації з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Шора). Задача оптимізації (37) може виявитися нелінійною, тому застосування класичних градієнтних методів, що вимагають гладкості функцій, може викликати проблеми в збіжності цих методів.

В результаті розв'язання задачі оптимізації (37) отримуємо вектор $Q^* = (B^*, C^*, T^*, W^*)$, який доставляє мінімальне значення цільовій функції $\varphi(Q)$. Тобто отримуємо такі значення $W^* = \{w_j^{k*}\}$ – для набору вагових коефіцієнтів правил і наборів параметрів $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}, C^* = \{c_{ij}^{k*}\}, T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$ функцій належності, для яких відхилення вигляду (38) між експериментальними і модельними даними, отриманими після настройки нечіткої моделі, досягає мінімального значення.

Запишемо результуючу нейронечітку ідентифікацію нечіткого параметра a , яку далі будемо використовувати для розв'язання поставленої задачі, у вигляді таких відношень:

$$a(\gamma) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}^*(a)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(a)}, \quad \gamma \in Y = Y_1 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n, \quad (39)$$

де

$$\mu_{D_k}^*(a) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{S_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{S_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \leq 1 \\ 1 & \text{інакше} \end{cases} \quad (40)$$

$$p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) \quad (41)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right)^2}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, s_k, k=1, \dots, L. \quad (42)$$

В співвідношеннях (39)-(42) значення $\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i)$, $p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\mu_{D_k}^*(a)$ розраховуються при оптимальних значеннях параметрів $W^* = \{w_j^{k*}\}$, $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$, $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$, отриманих після настройки нечіткої моделі (35).

У підрозділі 4.3 подано алгоритм розв'язання динамічної задачі ОРМ з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі у такому вигляді:

Крок 1. Множину Ω включаємо в n - вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою.

Крок 2. Задаємо значення функцій $c_{0i}(x, \tau_i), i=1, \dots, N$, з початкових умов (3) в вузлах сітки.

Крок 3. Покриваємо відрізок $[0, T]$ сіткою з кроком h_t .

Крок 4. Для кожного вузла сітки та для кожного $\tau_i, i=1, \dots, N$ розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (3) на часовому відрізку $[0, T]$ та знаходимо функції $c_i^*(x, \tau_i, t), i=1, \dots, N$.

Крок 5. Розраховуємо значення параметрів $a_i, i=1, \dots, N$, за формулами (39)-(42).

Крок 6. Визначаємо характеристичну функцію $\lambda^*(x)$ у вузлах сітки з пункту 1 за формулами (25), (26) при знайдених $c_i^*(x, \tau_i, t), i=1, \dots, N$ та відновлених у пункті 5 значеннях нечітких параметрів $a_i, i=1, \dots, N$.

Крок 7. Знаходимо мінімальне значення цільового функціонала (10) при знайдених $\lambda^*(x)$ та $c_i^*(x, \tau_i, t), i=1, \dots, N$.

У підрозділі 4.4 наведено результати обчислення нечітких параметрів моделі до настройки та після настройки, а також чисельну реалізацію восьми модельних задач побудованих на основі модельної задачі 2.1 розділу 2. Так, зокрема, на часовому проміжку $[0; 0,8]$ розв'язано вісім задач оптимального

розбиття з фіксованими центрами. Результати порівняно з результатами оптимального розбиття з нечіткими параметрами до налаштування та після налаштування. В якості критерію відповідності оптимального розбиття після настройки оптимальному розбиттю з чіткими параметрами, обрано числове значення площі підмножин та значення цільового функціоналу. В результаті змістовного порівняльного аналізу встановлено, що оптимальне розбиття з нечіткими параметрами після настройки з похибкою, що не перебільшує 1% відповідає оптимальному розбиттю з чіткими параметрами.

В підрозділі 4.5 досліджено питання виникнення біфуркацій в динамічних системах, до яких, зокрема, може бути віднесена система (3)-(5), що прийнята для задач ОРМ в якості базової. Окреслено умови виникнення в системі як простих біфуркацій так і біфуркацій ковимірності >1 . У вигляді теорем подано умови при яких регулярні та ізольовані стаціонарні стани системи є гіперболічними та еліптичними, стійкими та нестійкими, або мають ковимірність >1 .

У п'ятому розділі розглянуто розробку та впровадження системи альтернативного оповіщення «Світло» у контексті підвищення ефективності реагування на загрози, пов'язані з ракетними та іншими повітряними ударами в умовах воєнного стану. Основну увагу було зосереджено на аналізі її функціональних можливостей, зокрема інтеграції з системами ППО, і потенційному використанні геоінформаційних даних для оперативного відображення ситуації у режимі реального часу.

Окрему увагу приділено динамічній задачі оптимального розбиття території області, зокрема зони відповідальності Повітряного командування «Схід», з метою розміщення 51 вогневої групи, координати центрів яких задаються вручну з урахуванням тактичної доцільності. Розроблена математична модель дозволяє гнучко адаптуватися до змін у розстановці сил, напрямках загроз і структурі місцевості. Такий підхід має суттєве значення в умовах мобільного театру бойових дій, де швидкість прийняття рішень визначає ефективність оборони.

У підрозділі 5.1 здійснено змістовний огляд прикладної проблеми. Окреслені основні задачі, що покладені в основу дослідження, історію виникнення задачі та основні практичні та кібернетичні підходи до їх вирішення.

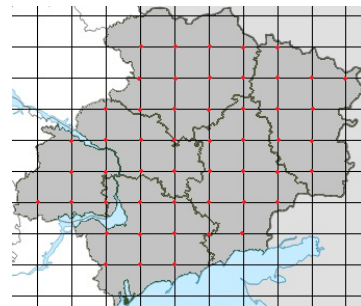
Здійснено критичний огляд існуючих аналогів серед вітчизняних та зарубіжних розробок, кожна з яких орієнтована на окрему групу користувачів, задачі та проблеми. В результаті критичного огляду виділено ті під задачі, що станом на наш час не вирішені. Результати огляду прикладної проблеми було покладено в основу предметної постановки задачі, наведеної в наступному підрозділі.

У **підрозділі 5.2** окреслена предметна постановка задачі для розробки системи альтернативного оповіщення “Світло” (АСО “Світло”). Предметна постановка задачі базується на огляді прикладної проблеми, зокрема, обмеженнях на систему в плані безпеки та шифрування даних, переваг та недоліків виявлених в результаті порівняння проєкту АСО “Світло” з існуючими вітчизняними та іноземними аналогами тощо.

У **підрозділі 5.3** формалізована математична постановка задачі. В термінах теорії оптимального розбиття множин описана область, що підлягає розбиттю, з урахуванням її складеної форми. Під формою, що підлягає розбиттю, розуміється зона відповідальності повітряного командування “Схід” (ПвК “Схід”), а саме Луганська, Донецька, Дніпропетровська та велика частина Харківської та Запорізької областей. Центри розміщено рівномірно у прямокутнику описаному довкола області відповідальності ПвК “Схід” (див.рис.1-а)), після чого виключено 49 центрів, що знаходяться поза межами названої зони відповідальності (рис.1-б)).



а)



б)

Рисунок 1. Зона відповідальності ПвК “Схід” а) без та б) з центрами розміщення вогневих груп.

У **підрозділі 5.4** наведено опис розробленого програмного додатку та адміністративної панелі АСО “Світло”. Наведено детальний опис користувацького додатку, що має встановлюватись на смартфонах користувачів, військових та цивільних для передачі локацій виявлення ворожих повітряних

цілей та адміністративну панель розраховану для операторів ППО. Зокрема в підрозділі наведено основні прийоми візуалізації інформації про виявлені повітряні цілі, принцип відображення цілей, що були виявлені з врахуванням часу, що минув з моменту їх виявлення, можливості оператора корегувати інформацію, що відображається на карті та принципи відслідковування кореспондентів, що знаходяться на зв'язку для розуміння зон покриття системою. На модельних прикладах продемонстровано принцип відображення траєкторій руху ворожих цілей та інструментарій оператора роботи з такими траєкторіями.

У **підрозділі 5.5** здійснена змістовна оцінка ефективності роботи АСО “Світло”. Зважаючи на те, що кількість кореспондентів даної системи перевищувало тисячу абонентів, які у переважній більшості знаходились на зв'язку постійно, а принципи шифрування та безпеки системи вимагали потужного використання мережі, що об'єктивно в різних частинах зони відповідальності ПвК “Схід” мала малу потужність, ефективність роботи АСО “Світло” забезпечувались відповідними технічними рішеннями. В підрозділі окреслені основні результату аналізу ефективності та технології, що використовувались для їх реалізації.

У **шостому розділі** наведено результати дослідження та розв'язання задачі побудови оптимальних траєкторії при тривимірному друці. Здійснено огляд сучасних рішень та проведеної критичний аналіз, в результаті якого виокремлені основні переваги та недоліки існуючих рішень. Вхідний об'єкт, що підлягає друку представлений у вигляді триангульованої фігури у форматі .stl. Алгоритм оптимального друку здійснювався у декілька етапів, а саме:

- 1) розподіл фігури на рівні відповідно до технічних характеристик 3Д принтера, а саме ширини та висоти друківної голівки;
- 2) визначення зовнішніх та внутрішніх контурів;
- 3) визначення зон друку деталі;
- 4) ідентифікація відокремлених зон друку та їх центрів з використанням розв'язку динамічних задач ОРМ;
- 5) ідентифікація початкових точок для друку областей;
- 6) побудова оптимальної траєкторії;

7) поєднання рівнів між собою у загальну траєкторію;

8) обчислення цільового функціоналу.

В підрозділі наведено достатньо прикладів, що дозволяють оцінити оптимальні траєкторії сформовані в результаті застосування алгоритму. Розглянуті випадки тривимірного друку складних деталей малої форми та без чітко виокремленої основи.

У **підрозділі 6.1** здійснено огляд прикладної проблеми. Описані існуючі програмні рішення для розв'язання типових задач. В результаті критичного огляду означені їх переваги та недоліки.

У **підрозділі 6.2** здійснено змістовну постановку предметної задачі в першу чергу в термінах прикладної проблеми та в другу чергу в термінах теорії оптимального розбиття множин для розв'язання основної під задачі.

У **підрозділі 6.3** формалізовано математичну постановку задачі в термінах прикладної проблеми та теорії оптимального розбиття множин для розв'язання основної під задачі побудови оптимальної траєкторії тривимірного друку. Надано прикладне обґрунтування поняттю центра підмножини та описано основні принципи ідентифікації параметрів.

У **підрозділі 6.4** наведено розроблений алгоритм для побудови оптимальної траєкторії тривимірного друку з використанням двох околів (Мура та Неймана). Використані принципи теорії клітинних автоматів та окреслено переваги та недоліки двох алгоритмів. Висвітлено математичний підхід покладений в основу таких етапів, як:

1. розділення деталей на рівні;
2. визначенні напрямку початкового руху друкарської голівки ;
3. принцип друку границі рівня;
4. розділення рівня на зовнішні та внутрішні контури;
5. фільтрація контурів;
6. побудова оптимальної траєкторії.

В підрозділі наведено загальний алгоритм роботи програми, структуру бази даних необхідної для коректної роботи програмного додатку, та основні інтерфейси, що дозволяють завантажувати деталь до програмного додатку у

форматі .stl, визначати основні параметри алгоритму побудови оптимальної траєкторії та інтерфейс візуалізації розв'язку задачі.

У **підрозділі 6.5** описаний програмний додаток, наведено інтерфейси та чисельні приклади отриманих розв'язків для різних деталей. На рис.2-а) наведено результати побудови оптимальної траєкторії при тривимірному, а на рис.2-б) двовимірному друці простих деталей (“Куб”).

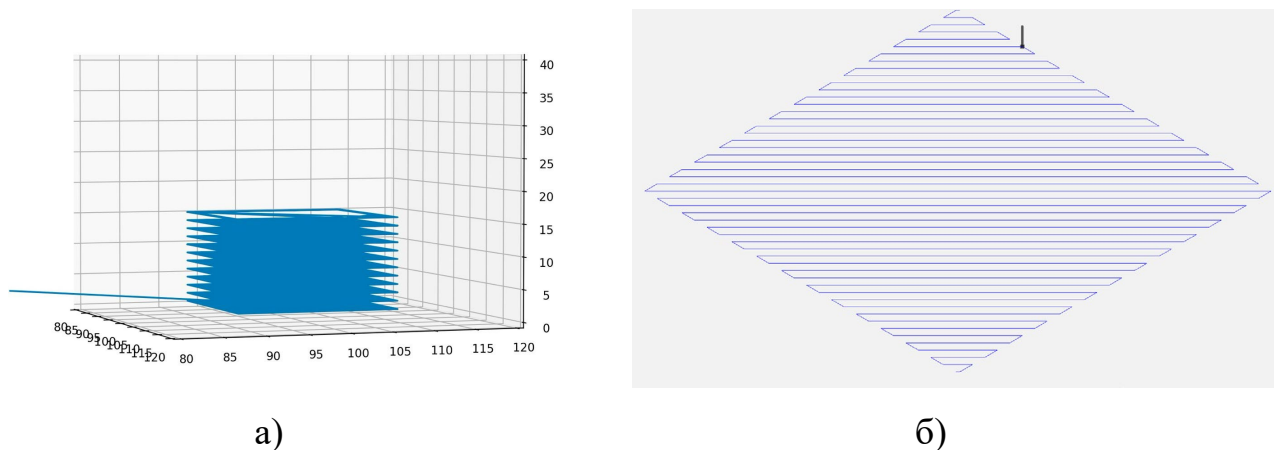


Рисунок 2. Результати побудови оптимальної траєкторії а) тривимірного, б) двовимірного друку простих деталей (“Куб”)

Оптимальні траєкторії тривимірного друку більш складених деталей, представлено на рис.3.

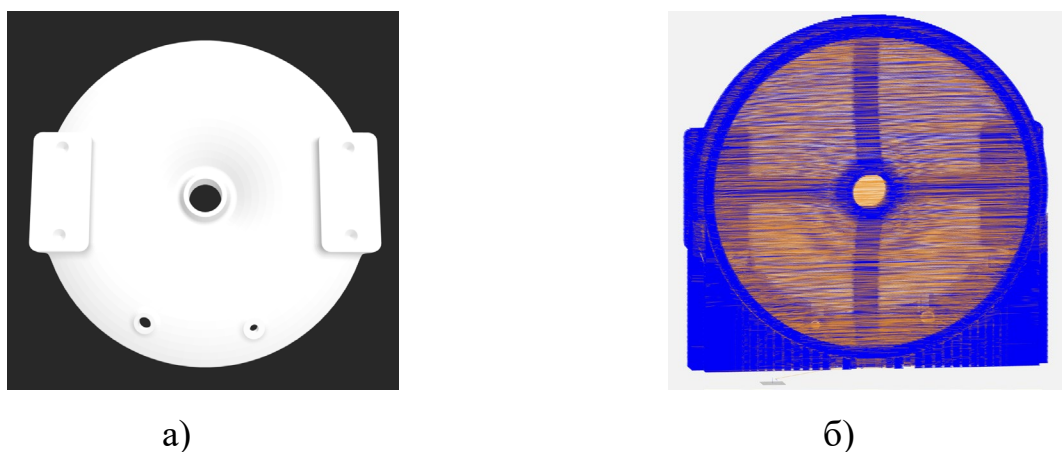


Рисунок 3 – Оптимальна траєкторія тривимірного друку деталі “Деталь17” у форматі а).stl та б) g-code

На рис.4 наведено отримані рішення для друку деталей з над малими розмірами.

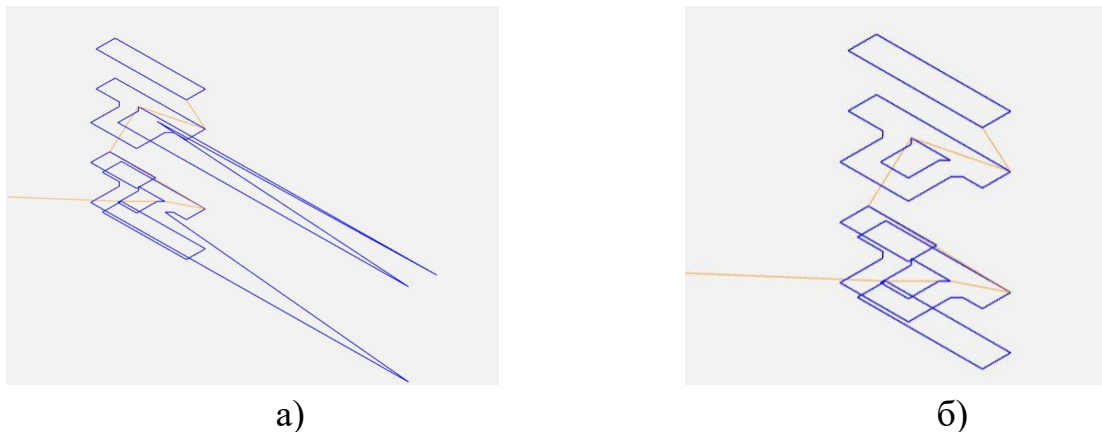


Рисунок 4 - Оптимальна траєкторія тривимірному друку деталі “Деталь03” у форматі g-code

У цьому розділі запропоновано та детально описано дві нові компартментальні математичні моделі для прогнозування поширення COVID-19 та інших подібних інфекційних захворювань. Проведено змістовний аналіз літературних джерел з тематики математичного моделювання інфекційних захворювань, висвітлені переваги та недоліки існуючих підходів. Адекватність і достовірність моделей підтверджено шляхом їхнього тестування на прикладі поширення COVID-19 у двох регіонах України — Дніпропетровській та Харківській областях, що відзначаються значною чисельністю населення та великою площею території. Проведений чисельний експеримент дозволив створити шість прогнозів поширення інфекції на 90 днів для кожного регіону. Кожен з прогнозів продемонстрував високий рівень точності, при цьому середня похибка становила не більше 8,6%, що підтверджує високу надійність моделі та її практичну цінність для прогнозування епідемічних процесів.

У підрозділі 7.1 Здійснено змістовний огляд прикладної проблеми. Означено основні етапи появи та поширення COVID-2019, деякі особливості протікання епідемії в різних країнах та їх групах. Означені основні медичні тези, щодо протікання хвороби у людини, що покладені в основу математичної моделі.

У підрозділі 7.2 здійснена предметна постановка задачі в термінах прикладної проблеми. Означено прикладний зміст оптимального розбиття, можливі фактори, що можуть вплинути на оптимальність в реальній системі, конкретизовані фактори, що є складовими математичної моделі оптимального розбиття.

У підрозділі 7.3 формалізована математична постановка задачі. Задача

розглядається на площах двох регіонів України, що мають сумарну площу більше 62 000 км.кв. та на яких проживає більше 6 мільйонів населення. Зважаючи на наведені параметри двох областей України, на площах якої здійснювалось математичне моделювання, вхідні данні є репрезентативними та попри дискретність задачі, дозволяють використання неперервних математичних моделей. Математична модель представлена у вигляді системи автономних диференціальних рівнянь вигляду (43).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -\sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j \\ \dot{I}_1 = \beta_1 \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j - \gamma_1 \cdot I_1 \\ \dot{I}_2 = \beta_2 \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j - \gamma_2 \cdot I_2 \\ \dots \\ \dot{I}_p = \beta_p \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j - \gamma_p \cdot I_p \\ \dot{R} = \sum_{i=1}^p \gamma_i \cdot I_i \end{array} \right. \quad (43)$$

де

S — кількість осіб у субпопуляції, які не інфіковані (сприйнятливі);

I_i — кількість інфікованих осіб в i -тій субпопуляції, яка характеризується окремою ймовірністю зараження та тривалістю перебігу хвороби;

p — кількість субпопуляцій інфікованих осіб, кожна з яких має унікальні значення ймовірності інфікування та тривалості захворювання;

N — загальна кількість осіб у мета популяції. При цьому вважається, що

$$N = S + \sum_{i=1}^p I_i + R;$$

β_i — ймовірність зараження для осіб з i -тої субпопуляції;

γ_i — ймовірність одужання для осіб з i -тої субпопуляції;

R — кількість осіб, які вибули з популяції (одужали або померли).

Також була розроблена та чисельно реалізована спрощена компартментальна модель розповсюдження COVID-2019 на території Дніпропетровської області у вигляді (44).

$$\begin{cases} \dot{V}_i = -\alpha_i \cdot V_i + (1 - \beta_i) \cdot (I_i + C_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n (1 - \alpha_j - G_{ij}) \cdot \varphi_{ij} \\ \dot{I}_i = \alpha_i \cdot V_i - \beta_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot c_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_j + G_{ij}) \cdot \varphi_{ij} \\ \dot{P}_i = \beta_i (I_i + C_i) \end{cases} \quad (44)$$

де $i = \overline{1..n}$;

V_i - кількість здорових мешканців i -го територіального сектору;

I_i - кількість інфікованих пацієнтів i -го територіального сектору;

P_i - кількість померлих від COVID-19 в i -му територіальному секторі;

N_i - загальна кількість інфікованих за весь період дослідження в i -му територіальному секторі;

n_i - загальна кількість мешканців в i -му територіальному секторі;

D - загальна кількість тижнів дослідження;

d_i - загальна кількість померлих від COVID-19 в i -му територіальному секторі;

c_i - загальна кількість персоналу (медичного та допоміжного), задіяного в обслуговуванні інфікованих пацієнтів в i -му територіальному секторі;

C_i - кількість інфікованого персоналу (медичного та допоміжного), який був задіяний в обслуговуванні інфікованих пацієнтів в i -му територіальному секторі;

φ_{ij} - пасажиропотік, що прибуває в сектор i за прийнятий часовий інтервал (тиждень) з сектора j ;

m_{ij} - середня кількість рейсів із сектора j у сектор i за прийнятий часовий інтервал (тиждень);

s_{ij} - середня площа транспортних засобів, що застосовуються для здійснення перевезень із сектора j у сектор i .

n - кількість секторів, на які була поділена досліджувана область.

Допоміжні параметри $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, G_{ij}, S_{ij}$ пропонується розраховувати за формулами (45).

$$\alpha_i = \frac{N_i}{n_i \cdot D}; \beta_i = \frac{d_i}{n_i \cdot D}; \gamma_i = \frac{C_i}{c_i \cdot D}; G_{ij} = \frac{1}{S_{ij} + \frac{1}{1-a_j}}; S_{ij} = \frac{m_{ij} \cdot s_{ij}}{\varphi_{ij}}. \quad (45)$$

У підрозділі 7.4 на базі математичної моделі (43) проведено моделювання розповсюдження COVID-2019 на території Дніпропетровської та Харківської областей.

На рисунку 5 наведено результати чисельного моделювання для Харківської області за період 2020–2024 років. Рисунок 5-а) ілюструє результати моделі SIS, а рисунок 5-б) — моделі SIR, подані у відносних одиницях, де вісь ординат показує частку інфікованого населення відносно загальної чисельності населення області (2,658 мільйона осіб).

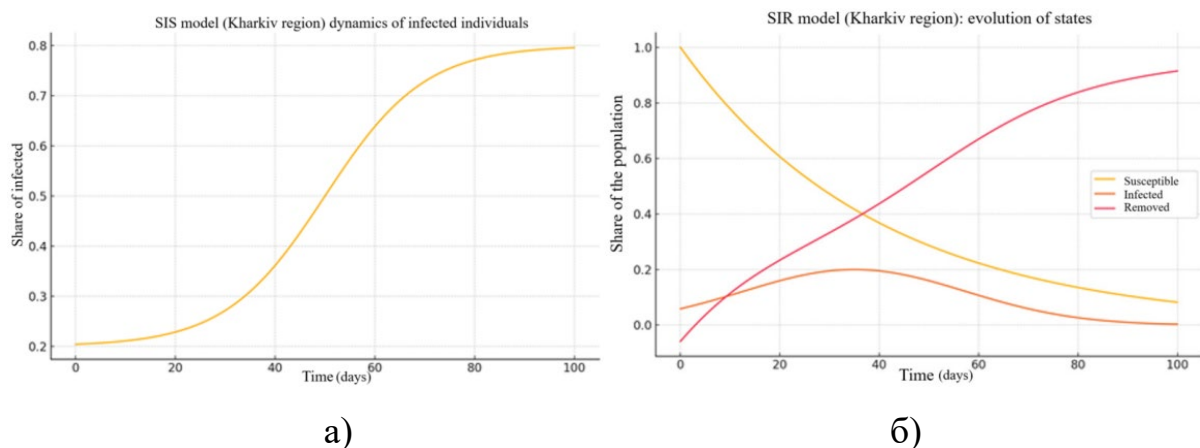


Рисунок 5. Результати чисельної реалізації моделей: а) SIS, б) SIR для Харківської області за період 2020-2024 років.

Рисунок 6 ілюструє результати моделі SEIR за той самий період 2020-2024 років.

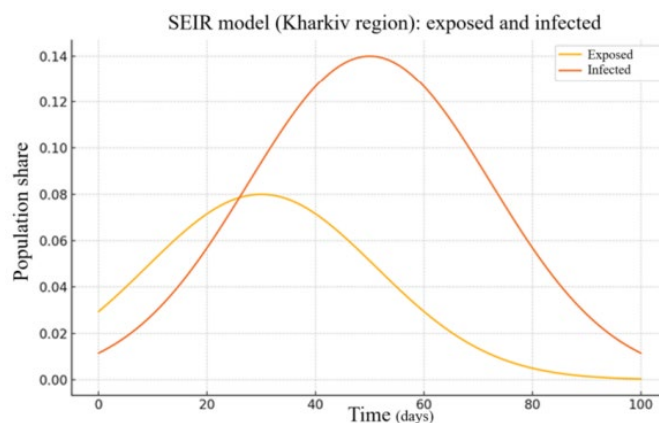


Рисунок 6. Результати чисельної реалізації моделі SEIR для Харківської області за період 2020-2024 років.

У таблиці 1 наведено результати аналізу похибки використаних моделей для Харківської області.

Таблиця 1

Відносна похибка результатів моделювання динаміки поширення COVID-19 у Дніпропетровській та Харківській областях за період 2020–2024 років для моделей SIS, SIR і SEIR.

Період	SIS	SIR	SEIR	Період	SIS	SIR	SEIR
04.2020-06.2020	6,75%	4,99%	3,65%	10.2022-12.2022	7,77%	6,49%	3,62%
07.2020-09.2020	3,71%	4,39%	4,74%	01.2023-03.2023	7,59%	2,02%	4,21%
10.2020-12.2020	2,92%	2,75%	2,64%	04.2023-06.2023	3,17%	7,29%	4,46%
01.2021-03.2021	6,35%	6,76%	3,62%	07.2023-09.2023	5,04%	6,64%	4,81%
04.2021-06.2021	3,62%	4,03%	4,50%	10.2023-12.2023	7,47%	2,42%	3,84%
07.2021-09.2021	5,21%	6,23%	3,11%	01.2024-03.2024	6,95%	7,12%	2,01%
10.2021-12.2021	6,74%	2,28%	3,32%	04.2024-06.2024	4,85%	4,44%	2,06%
02.2022-03.2022	5,14%	2,57%	4,08%	07.2024-09.2024	6,05%	7,50%	4,07%
04.2022-06.2022	2,74%	4,11%	3,55%	10.2024-12.2024	2,26%	2,32%	2,37%
07.2022-09.2022	4,85%	4,40%	2,31%				
Максимальна відносна похибка	6,75%	6,76%	4,74%	Максимальна відносна похибка	7,77%	7,50%	4,81%

На рисунку 7 наведено результати чисельного експерименту результатів моделювання розповсюдження COVID-2019 для Дніпропетровської області України за період 2020–2024 років. Рисунок 7-а) демонструє динаміку поширення COVID-19 відповідно до моделі SIS, а рисунок 7-б) - відповідні результати для моделі SIR.

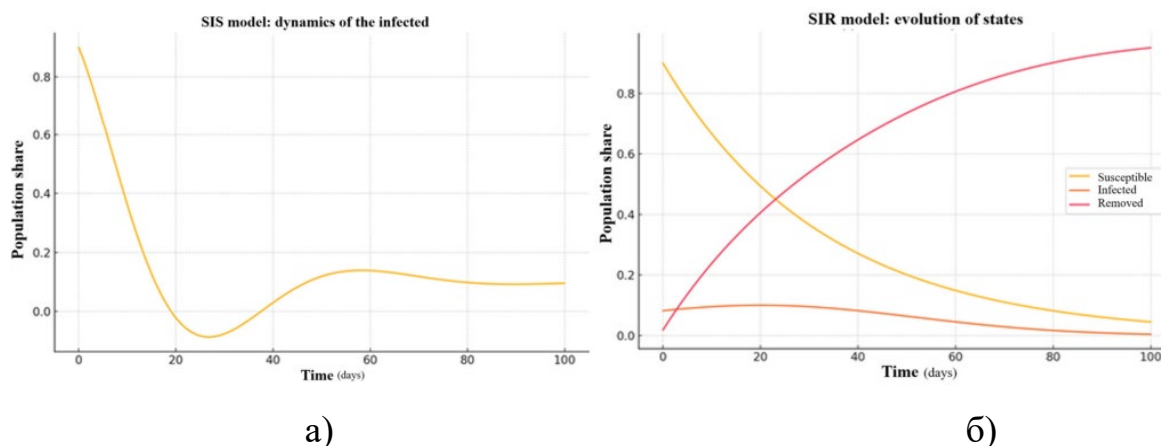


Рисунок 7. Результати чисельної реалізації моделей: а) SIS, б) SIR для Дніпропетровської області за період 2020–2024 років.

Результати, представлені на рисунку 7, свідчать про те, що обидві моделі адекватно відтворюють динаміку захворюваності в абсолютних величинах. Вісь ординат відображає частку інфікованого населення відносно загальної чисельності населення регіону (3,1 мільйона осіб). Максимальна відносна похибка для всіх моделей не перевищує 8%, що вважається прийнятним рівнем для епідеміологічного прогнозування. Відтак запропонована модель була використана для прогнозування кількості інфікованих осіб і оцінки потреб у ліжко-місцях у регіоні.

Рисунок 8 ілюструє результати застосування моделі SEIR на тому ж наборі даних, що і для чисельного експерименту наведеному на рис 7.

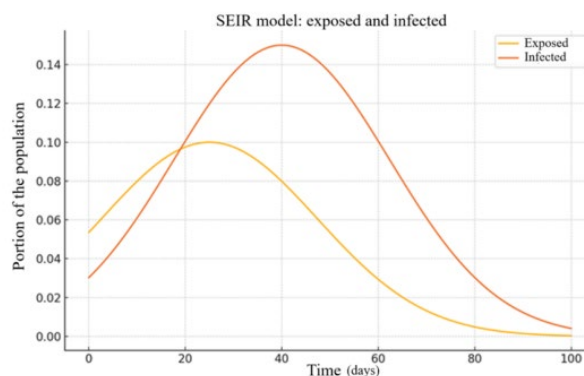


Рисунок 8. Результати чисельної реалізації моделі SEIR для Дніпропетровської області за період 2020–2024 років.

Як показано на рисунку 8, модель SEIR дає більш детальне представлення прогресування хвороби, тісно співпадаючи з результатами моделей SIS та SIR. Втім, її довгострокова точність обмежена через труднощі ідентифікації параметрів, що не повністю враховують такі фактори, як нереєстровані випадки (наприклад, особи, які лікуються вдома без ПЛР тестування). Це сприяє збільшенню рівня непередбачуваності захворювання, що у свою чергу впливає на коректність та ефективність обмежувальних заходів та як наслідок інших негативних наслідків. Незважаючи на ці обмеження, модель SEIR точно прогнозує кількість позитивних ПЛР тестів і необхідну кількість ліжко-місць, з максимальною відносною похибкою 5,6%, що перевищує точність моделей SIS та SIR похибка якої складає, як було показано вище близько 8%.

У таблиці 2 наведено результати аналізу похибки використаних моделей для Дніпропетровської області.

Таблиця 2.

Відносна похибка результатів моделювання динаміки поширення COVID-19 у Дніпропетровській та Харківській областях за період 2020–2024 років для моделей SIS, SIR та SEIR.

Період	SIS	SIR	SEIR	Період	SIS	SIR	SEIR
04.2020-06.2020	6,54%	2,88%	4,69%	10.2022-12.2022	6,93%	6,42%	2,6%
07.2020-09.2020	6,92%	3,60%	3,79%	01.2023-03.2023	6,15%	7,89%	3,51%
10.2020-12.2020	4,16%	7,34%	2,02%	04.2023-06.2023	2,16%	4,13%	4,2%
01.2021-03.2021	3,57%	7,49%	3,61%	07.2023-09.2023	5,87%	5,09%	3,27%
04.2021-06.2021	7,64%	6,23%	3,51%	10.2023-12.2023	4,59%	5,66%	2,94%
07.2021-09.2021	2,71%	4,74%	3,74%	01.2024-03.2024	5,32%	6%	5,6%
10.2021-12.2021	4,94%	2,54%	3,94%	04.2024-06.2024	6,22%	2,92%	2,06%
02.2022-03.2022	2,67%	7,07%	2,89%	07.2024-09.2024	2,81%	3,81%	4,68%
04.2022-06.2022	4,38%	2,89%	3,43%	10.2024-12.2024	5,78%	5,86%	4,3%
07.2022-09.2022	4,82%	5,36%	3,22%				
Максимальна відносна похибка	7,64%	7,49%	4,69%	Максимальна відносна похибка	6,93%	7,89%	5,6%

На базі математичної моделі (44) - (45) здійснено чисельний експеримент, проведений 21.07.2020 року, на період 28 днів. Результати представлено у таблиці 3, в якій були використані позначення: **РП** – реалістичний прогноз; **ОП** – оптимістичний прогноз; **ПП** – песимістичний прогноз.

Таблиця 3

Результати чисельного експерименту математичного моделювання кількості підтверджених випадків інфікування населення Дніпропетровської області (на період з 22.07.2020р. по 18.08.2020р.)

Дата	РП	ОП	ПП	Дата	РП	ОП	ПП
22.07.2020	13	10	22	05.08.2020	18	15	31
23.07.2020	14	11	23	06.08.2020	19	15	32
24.07.2020	15	12	25	07.08.2020	19	15	33
25.07.2020	15	12	25	08.08.2020	20	16	34
26.07.2020	15	12	25	09.08.2020	20	16	35
27.07.2020	15	12	26	10.08.2020	20	16	35
28.07.2020	17	14	29	11.08.2020	20	16	34
29.07.2020	16	13	28	12.08.2020	20	16	35
30.07.2020	19	15	33	13.08.2020	21	17	35
31.07.2020	21	16	35	14.08.2020	21	17	35
01.08.2020	17	14	30	15.08.2020	21	17	36
02.08.2020	18	14	30	16.08.2020	22	17	37
03.08.2020	18	14	30	17.08.2020	22	18	37
04.08.2020	18	14	31	18.08.2020	22	18	38

За результатами числового розрахунку було побудовано шість прогнозів (від 22.07, 29.07, 05.08, 12.08, 19.08 та 06.10). Кожен з прогнозів був побудований на термін 90 діб. У таблиці 4 наведено інформацію про похибку моделювання кожного з шести прогнозів.

Таблиця 4

Аналіз похибки шести розроблених прогнозів динаміки COVID-19 у
Дніпропетровській області

№ з/п	Дата побудови прогнозу	Термін моделювання	Похибка
1	22 липня 2020р.	1 тиждень	0,0%
2	29 липня 2020р.	1 тиждень	5,(45)%
3	05 серпня 2020р.	1 тиждень	8,6%
4	12 серпня 2020р.	1 тиждень	7,0%
5	19 серпня 2020р.	1 місяць (вересень)	3,8%
6	06 листопада 2020р.	1 місяць (жовтень)	3,1%

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено системне дослідження задач оптимального розбиття множин в динамічних постановках, що включає формалізацію математичних моделей, розробку алгоритмів розв'язання, аналіз впливу нечітких параметрів та прикладну реалізацію у конкретних прикладних задачах. Набули подальшого розвитку теоретичні основи оптимального розбиття множин у напрямі створення та обґрунтування методів для задач, у яких враховуються різноманітні динамічні чинники.

Основні наукові результати дисертації полягають у наступному.

1. Здійснено критичний огляд задач оптимального розбиття множин, в яких окремі параметри змінюються з часом або є сталими. Проведено критичний аналіз існуючих методів та алгоритмів розв'язання подібних задач, окреслені їх переваги та недоліки.
2. Сформульовано новий клас динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами. Наведено методи та алгоритми розв'язання таких задач. Результати чисельного експерименту, дозволяють наочно оцінити оптимальність розв'язку, при якому розбиття відбувається таким чином, що центри розміщено в центрів відповідних підмножин.

3. Сформульовано новий клас динамічних задач оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин, в яких вартість транспортування змінюється з часом. Наведено методи та алгоритми розв'язання таких задач. Результати чисельного експерименту, ілюструють суттєве зменшення значення цільового функціоналу в порівнянні із динамічними задачами з фіксованими центрами.

4. Клас динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами розширено на нечітку постановку. Розроблено метод та алгоритм розв'язання таких задач. Результати чисельного експерименту, дозволяє достовірно встановити, що оптимальне розбиття з нечіткими параметрами після настройки відрізняється від чіткого розбиття не більше як на 1%.

5. З використанням розроблених моделей розв'язана задача оптимального розміщення вогневих груп. Розроблено програмний продукт, що представляє собою систему альтернативного оповіщення "Світло", що був ефективно використаний в період з квітня 2022 року по січень 2023 року, дозволив виявити десятки безпілотних летальних апаратів в небі над Дніпропетровською областю та одну ракету Іскандер-М, що були в результаті своєчасного виявлення успішно ліквідовані.

6. З використанням розроблених моделей оптимального розбиття множин та дискретних алгоритмів побудованих на базі теорії клітинних автоматів розроблено та реалізовано у вигляді програмного додатку алгоритм побудови оптимальної траєкторії тривимірного друку деталей представлених у форматі .stl. Оптимальна траєкторія тривимірного друку показала кріщі результати ніж траєкторія побудована експертами в цій галузі та дозволила скоротити час побудови траєкторії в рази, а точність друку деталей ві 25% до 33%.

7. З використанням розробленої математичної моделі розв'язано задачу оптимального розміщення медичних закладів та розбиття території Дніпропетровської області на зони відповідальності медичних закладів при епідемії COVID-2019. Ідентифікація параметрів була здійснена на базі актуальних даних про перебіг епідемії, отриманих з відкритих та офіційних джерел. Результати математичного моделювання дозволили сформувати перелік

ефективних рекомендацій, що були використані для побудови обмежувальних заходів на території Дніпропетровської області в період з травня 2020 року по березень 2021 року. Результати математичного моделювання дозволили з точністю до 7 діб передбачити пікове значення кількості інфікованих в області, з похибкою, що не перевищувала 8,6% кількість інфікованих на перод 28 к.д. та вжити оперативних та ефективних обмежувальних заходів, що в свою чергу сповільнило динаміку епідемії на території Дніпропетровської області. В рамках порівняльного аналізу аналогічне дослідження було проведено на прикладі Харківської області, де кількісні та якісні результати виявились кращими за Дніпропетровську область.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kiseleva O., Yakovlev S., Prytomanova O., Kuzenkov O. Mathematical Modeling of Regional Infectious Disease Dynamics Based on Extended Compartmental Models. *Computation* (2025), 13(8), 187. ISSN: 2079-3197, DOI: 10.3390/computation13080187 (*Scopus, Q1*)
2. Kiseleva O., Yakovlev S., Chumachenko D., Kuzenkov O. Exploring Bifurcation in the Compartmental Mathematical Model of COVID-19 Transmission. *Computation* 2024, 12, 186. ISSN: 2079-3197, DOI: 10.3390/computation12090186 (*Scopus, Q1*)
3. Busher V., Chorny O., Kuzenkov O., Tryputen M., Kuznetsov V., Rumiantsev V. Investigation of the Bifurcation Properties of the Dynamics of a Biological Population Based on a Logistic Model. *Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 463. Springer, Cham. P. 203–212, ISSN: Print: 2367-3370, Electronic: 2367-3389, DOI: 10.1007/978-3-031-03877-8_18 (*Scopus, Q4*)
4. Stopkin V., Nikolenko A., Kuznetsov V., Tryputen M., Kuzenkov O. The Urgency of Using Adaptive Observers to Identify the Parameters of the DC. *Smart Technologies in Urban Engineering*. Vol. 536, P. 213–224. ISSN: Print: 2367-3370, Electronic: 2367-3389. DOI: 10.1007/978-3-031-20141-7_20 (*Scopus, Q4*)
5. Kuzenkov O., Dubovyk V. Software implementation of the COVID-2019 spread simulation algorithm using the theory of optimal set partitioning. *Актуальні проблеми*

- автоматизації та інформаційних технологій. № 24 (2020). – ДНУ, 2020. С. 96–103. ISSN-print: 2312-119X, DOI: 10.15421/432011
6. Кісельова О. М., Кузенков О. О. Програмна реалізація алгоритму розв'язання динамічної задачі побудови оптимальних траєкторій тривимірного друку. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. № 25 (2021). – ДНУ, 2021. С. 182–197. ISSN-print: 2312-119X, DOI: 10.15421/432119
7. Kiseleva E., Kuzenkov O., Dubovyk V. Software implementation of the algorithm for solving the dynamic problem of optimal placement of fire groups. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. № 26 (2022). – ДНУ, 2022. С. 137–145. ISSN-print: 2312-119X, DOI: 10.15421/432217
8. Kostenko O., Kuzenkov O. Solving the facility location problem by genetic algorithms. Computer-integrated technologies: education, science, production, Lutsk, 2023, Vol.53, P.125–131, ISSN:2524-0552, DOI:10.36910/6775-2524-0560-2023-53-19
9. Kuzenkov O., Lozovskyi A. Software development for solving the dynamic problem of optimal set partitioning with fixed centers. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. № 27 (2023). – ДНУ, 2023. С. 212–220. ISSN-print: 2312-119X, DOI: 10.15421/432320
10. Kuzenkov O., Kostenko O. Software development for solving the dynamic problem of optimal set partitioning with determination of the coordinates of their centers. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. № 28 (2024). – ДНУ, 2024. С. 306–317. ISSN-print: 2312-119X, DOI: 10.15421/432429
11. Kuzenkov O.O. Algorithms and methods in dynamic problems of optimal track placement in three-dimensional printing. System technologies: collection of scientific works. – Dnipro, 2025. – Volume 2 (№ 157). P. 154–169. ISSN: Print: 1562-9945, Online: 2707-7977, DOI: 10.34185/1562-9945-2-157-2025-16
12. Kuzenkov O. Algorithms and methods in dynamic problems of optimal placement of fire groups. Modern problems of metallurgy. № 28 (2025). – Дніпро: УДУНТ, 2025. P. 294–309. ISSN-print 1991-7848, ISSN-online 2707-9457, DOI: 10.34185/1991-7848.2025.01.17
13. Kuzenkov O., Dubovyk V. Development of a dynamic partitioning model and a software system for image segmentation in the implementation of computer vision for

- robotic systems. Сучасні проблеми моделювання. № 27 (2025). – МДПУ, 2025. С. 123–135. ISSN-print: 2313-125X, DOI: 10.33842/2313-125X-2025-19-123-135
14. Яковлев С. В., Кісельова О. М., Гарт Л. Л., Кузенков О. О., Закутній Д. В. Про динамічну задачу оптимального розбиття множин з фіксованими центрами. Сучасні проблеми моделювання. № 28 (2025). – МДПУ, 2025. С. 190–203. ISSN-print: 2313-125X, DOI: 10.33842/2313-125X-2025-30-190-203
15. Кісельова О., Притоманова О., Кузенков О. Про динамічну задачу оптимального розбиття множин із фіксованими центрами за умов невизначеності. Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики», 2025, № 4. С. 6–23. ISSN: 2786-6491. URL: <https://jais.net.ua/index.php/files/article/view/525/599>
16. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Kuzenkov O.O. Software implementation of an algorithm for solving a dynamic problem of optimal set partitioning under uncertainty. Science and transport progress. – Д.: УДУНТ, 2025, 3(111). P. 59–67. DOI: 10.15802/stp2025/342252
17. Kiseleva E., Kuzenkov O. On the dynamic problem of optimal set partitioning with determination of subset center coordinates. Bulletin of V .N. Karazin Kharkiv National University, Series “Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems”, (65). P. 35–47. DOI: 10.26565/2304-6201-2025-65-03
18. Kiseleva E., Hart L., Prytomanova O., Kuzenkov O. An algorithm to construct generalized Voronoi diagrams with fuzzy parameters based on the theory of optimal partitioning and neuro-fuzzy technologies. Workshop Proceedings of the 8th International Conference on “Mathematics. Information Technologies. Education”, MoMLeT&DS-2019, Shatsk, Ukraine, June 2–4, 2019. P. 148–162, ISSN: 1613-0073, URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2386/paper12.pdf> (*Scopus, Q4*)
19. Kuzenkov O., Serdiuk T., Kuznetsova A., Tryputen M., Kuznetsov V., Kuznetsova Y. Mathematical model of dynamics of homomorphic objects. Proceedings of the 1st International Workshop on Information-Communication Technologies & Embedded Systems (ICTES 2019), Mykolaiv, Ukraine, November 14–15, 2019. P. 190–205, ISSN: 1613-0073, URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2516/paper15.pdf> (*Scopus, Q4*)

20. Kiseleva O., Kuzenkov O., Yakovlev S. Mathematical Modeling of Rhesus Agglutinin Dynamics in the Human Population. Proceedings of the 3rd International Workshop of IT-professionals on Artificial Intelligence (ProfIT AI 2023), Waterloo, Canada, November 20–22, 2023. P. 270–275, ISSN: 1613-0073, URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3641/short8.pdf> (*Scopus, Q4*)
21. Кузенков О. О., Падалко В. Г. Розробка математичної моделі популяційної динаміки резус-аглютиногену. Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2017. – Вип. 17. С. 125–133. ISSN: 2074-5893. DOI: 10.15421/321714
22. Кісельова О. М., Кузенков О. О., Падалко В. Г. Математичне моделювання розповсюдження COVID-19 у Дніпропетровській області. Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2020. – Вип. 20. – С. 65–73. ISSN: 2074-5893, DOI: 10.15421/322006
23. Кісельова О. М., Кузенков О. О., Балеєко Н. В. Узагальнені підходи до моделювання розповсюдження COVID-19 на закритих та відкритих ареалах. Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2021. – Вип. 21. – С. 105–115, ISSN: 2074-5893, DOI: 10.15421/322111
24. Кісельова О. М., Кузенков О. О. Класифікація (не)лінійних біфуркаційних кривих та гіперповерхонь математичної моделі міжгрупових взаємодій у випадку роздільної ніші. Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2023. – Вип. 23. – С. 83–93. ISSN: 2074-5893. DOI: 10.15421/322333
25. Kiseleva E. M., Hart L. L., Kuzenkov O. O., Zakutnii D. V. On the implementation of algorithms for solving the simplest dynamic problem of optimal set partitioning. Problems of applied mathematics and mathematical modeling: collection of scientific works. – Dnipro, 2024. – Volume 24. P. 66–75. ISSN: 2074-5893, DOI: 10.15421/322407
26. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Hart L. L., Zaytseva T. A., Kuzenkov O. O. Application of mathematical methods of artificial intelligence to solve problems of optimal set partitioning. Problems of applied mathematics and mathematical modeling: collection of scientific works. – Dnipro, 2024. – Volume 24. P. 89–98. ISSN: 2074-5893. DOI: 10.15421/322409

Список опублікованих праць апробаційного характеру

27. Kuzenkov O., Kuznetsov V., Tryputen N. Analysis of phase trajectories of the third-order dynamic objects. 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), Lviv, Ukraine, 2019, pp. 1235–1243. DOI: 10.1109/UKRCON.2019.8879819 (*Scopus*)
28. Кісельова О. М., Падалко В. Г., Кузенков О. О. Математичне моделювання розповсюдження COVID-19 у Дніпропетровській області. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем : тези доповідей XVIII Міжнародної науково-практичної конференції, 18–20 листопада. – Д.: 2020. – С. 129–130.
29. Кісельова О. М., Кузенков О. О. Математичне моделювання періодичних процесів розповсюдження COVID-19 у Дніпропетровській області. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем : тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції, 17–19 листопада.–Д.:2021. – С. 84.
30. Костенко О. В., Кузенков О. О. Алгоритми розв’язання логістичних задач. Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем : тези доповідей XX Міжнародної наук.-практ. конференції, 23–25 листопада. – Д.: 2022. – С. 110.
31. Kuzenkov O., Lozovskyi A. Algorithms for solving logistic problems under conditions of uncertainty. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2022): Abstracts of the XX International Scientific and Practical Conference. – November 23–25. – Dnipro: DNU, 2022. – P. 118–119.
32. Kuzenkov O., Busher V., Chornyi O., Nikolenko A., Kuznetsov V., Savvin O. Nonlinear Analysis of Bifurcatory Properties of Mathematical Model of Subpopulation Dynamics in the Case of a Single Niche for Subpopulation. 2022 IEEE 3rd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC), 04–07 October 2022. (*Scopus*). DOI: 10.1109/SAIC57818.2022.9923003
33. Kiseleva O., Kuzenkov O., Lozovskyi A. The risk management in logistics problems. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International Scientific and Practical Conference. – November 22–24. – Dnipro: DNU, 2023. – P. 14–15.

34. Kiseleva O., Kuzenkov O., Feschenko M. Algorithms and methods for 3D printing trajectories. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International Scientific and Practical Conference. – November 22–24. – Dnipro: DNU, 2023. – P. 16–17.
35. Kuzenkov O., Masych M., Siryk S. Design and software implementation of the server part of the “Svitlo” – the alternative notification system. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International Scientific and Practical Conference. – November 22–24. – Dnipro: DNU, 2023. – P. 25–26.
36. Kuzenkov O., Oleshko O. Design and software implementation of the client part of the “Svitlo” – the alternative notification system. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2023): Abstracts of the XXI International Scientific and Practical Conference. – November 22–24. – Dnipro: DNU, 2023. – P. 27–28.
37. Kostenko O., Honcharova Yu., Kuzenkov O. The main transport problems. Сучасні науково-технічні дослідження у контексті мовного простору (англійською мовою): матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих науковців та студентів. – Дніпро, 11 травня 2023 р. – Дніпро: Видавець Біла К. О., 2023. – С. 271–273.
38. Kiseleva O. M., Kuzenkov O. O. Use of discrete and continuous algorithms for the construction of an optimal trajectory in 3D printing. Automatics 2024: Abstracts of the XXVII International Conference of Automatic Control, Dnipro, November 20–22, 2024. – Dnipro: DNU, 2024. – P. 28.
39. Кісельова О. М., Гарт Л. Л., Кузенков О. О., Закутній Д. В. Про найпростішу динамічну задачу оптимального розбиття множин. Автоматика 2024: тези XXVII Міжнародної конференції з автоматичного керування, Дніпро, 20–22 листопада 2024 р. – Дніпро: ДНУ, 2024. – С. 121–122.
40. Kiseleva O. M., Yakovlev S. V., Prytomanova O. M., Kuzenkov O. O. Mathematical modeling of spatial dynamics of infectious diseases. Automatics 2024: Abstracts of the XXVII International Conference of Automatic Control, Dnipro, November 20–22, 2024. – Dnipro: DNU, 2024. – P. 30–32.
41. Kozakova N. L., Hryhorenko O., Kuzenkov O. O., Baleyko N. Mathematical modeling of the problems of optimal distribution and planning in conditions of

uncertainty. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2024): Abstracts of the XXII International Scientific and Practical Conference, Dnipro, November 20–22, 2024 / Under the general editorship of E. M. Kiseleva. – Dnipro: DNU, 2024. – P. 26.

42. Kozakova N. L., Lupynskyi S., Kuzenkov O. O., Baleyko N. Bifurcation analysis and control in natural process models related to distribution and allocation. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2024): Abstracts of the XXII International Scientific and Practical Conference, Dnipro, November 20–22, 2024 / Under the general editorship of E. M. Kiseleva. – Dnipro: DNU, 2024. – P. 27.

43. Kozakova N. L., Shvedov V., Kuzenkov O. O., Baleyko N. Algorithmic approaches to solving dynamic problems of optimal placement and distribution. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2024): Abstracts of the XXII International Scientific and Practical Conference, Dnipro, November 20–22, 2024 / Under the general editorship of E. M. Kiseleva. – Dnipro: DNU, 2024. – P. 28–29.

44. Kostenko O.V., Kuzenkov O.O. Solution of the facility location problem using the genetic algorithm method. Mathematical Support and Software for Intelligent Systems (MSSIS-2024): Abstracts of the XXII International Scientific and Practical Conference, Dnipro, November 20–22, 2024 / Under the general editorship of E. M. Kiseleva. – Dnipro: DNU, 2024. – P. 305–306.

АНОТАЦІЯ

Кузенков О.О. Динамічні задачі оптимального розбиття множин: математичні моделі, методи, алгоритми, практичне застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, МОН України, Харків, 2025.

Дисертаційна робота є подальшим розвитком теорії оптимального розбиття множин, що є новим розділом нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними, для динамічних задач оптимального

розбиття, у яких для отримання оптимального розбиття, в динамічній постановці, застосовуються сучасні чисельні методи, субградієнтні методи з розтягом простору та інші методи негладкої оптимізації.

Розроблено та теоретично обґрунтовано методи та алгоритми розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин в ускладнених постановках, а саме: з фіксованими центрами, з відшукуванням координат центрів та в умовах невизначеності. Методи та алгоритми застосовані до сформульованих в роботі трьох математичних моделей. Розроблено та теоретично обґрунтовано методи і алгоритми розв'язання динамічних задач у випадках коли параметри задачі змінюються з плином часу. Запропоновані алгоритми засновані на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин, методів розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем, а також з модифікаціями r -алгоритму Шора для розв'язання задач недиференційовної оптимізації.

Сформульовані в роботі математичні моделі, методи та алгоритми їх розв'язання застосовані для розв'язання трьох прикладних задач, а саме задачі оптимального розміщення вогневих груп, побудови оптимальних траєкторії тривимірного друку та оптимального розбиття регіону на зони забезпечення медичними закладами при спалахах інфекційних захворювань. Розроблено комплекси комп'ютерних програм для реалізації запропонованих алгоритмів розв'язання задач оптимального розбиття множин в тому числі для означених прикладних задач.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, теорія оптимального розбиття множин, динамічна задача, чисельні методи, недиференційовна оптимізація, r -алгоритм Шора.

ABSTRACT

Kuzenkov O.O. Dynamic problems of optimal set partitioning: mathematical models, methods, algorithms, practical applications. – Qualification scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in specialty 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods. – V.N. Karazin Kharkiv national university, Kharkiv, 2025.

The dissertation represents a further development of the theory of optimal set partitioning, which is a new branch of infinite-dimensional mathematical programming with Boolean variables, applied to dynamic optimal partitioning problems. To obtain an optimal partition in a dynamic setting, modern numerical methods are used, including subgradient methods with space stretching and other nonsmooth optimization techniques.

Methods and algorithms for solving dynamic problems of optimal set partitioning in complex formulations have been developed and theoretically substantiated, namely: with fixed centers, with the determination of center coordinates, and under conditions of uncertainty. The methods and algorithms have been applied to the three mathematical models formulated in the work. Methods and algorithms for solving dynamic problems in cases where problem parameters change over time have also been developed and theoretically substantiated. The proposed algorithms are based on a synthesis of methods from the theory of optimal set partitioning, methods for solving differential equations and their systems, as well as modifications of Shor's r-algorithm for solving non-differentiable optimization problems.

The mathematical models, methods, and algorithms for their solution formulated in this work have been applied to solve three practical problems, namely the problem of optimal placement of fire units, the construction of optimal trajectories for 3D printing, and the optimal division of a region into zones for medical facility coverage during infectious disease outbreaks. Computer program complexes have been developed to implement the proposed algorithms for solving optimal set partitioning problems, including for the specified practical tasks.

Keywords: infinite-dimensional mathematical programming, theory of optimal set partitioning, dynamic problem, numerical methods, nonsmooth optimization, Shor's r-algorithm.